

RELATÓRIO CLASSIFICATÓRIO IYPT 2024



BOHRBULHANTES

Gabriel Bassi de Barros Moreira (Capitão)

João Vitor de Castro Carvalho

Juliana de Prado Campos Ferreira

Lucas do Vale Aratake

Pedro Joviano Vaz de Oliveira

22 de junho de 2025

Sumário

1	Resumo	1
2	Introdução	1
2.1	Enunciado do Problema	1
2.2	Análise do Enunciado	2
2.3	Objetivos do relatório	2
3	Abordagem Teórica	3
3.1	Tipos de Andadores	3
3.2	Dinâmica de um corpo rígido	4
3.2.1	O movimento do andador	4
3.2.2	Graus de Liberdade	6
3.2.3	Coeficiente de Atrito	7
3.3	Velocidade Terminal	8
4	Abordagem Matemática	9
4.1	Formulação Lagrangeana	9
4.1.1	Cálculo da Energia	9
4.1.2	Equação do Movimento	10
5	Procedimento Experimental	11
5.1	Objetivos do Procedimento Experimental	11
5.2	Materiais	11
5.3	Construção do andador	12
5.4	Construção da rampa	13
5.5	Obtenção dos Coeficientes de Atrito Estático	14
5.6	Experimento	14

6	Resultados e Discussão	15
6.1	Geometria do Andador	16
6.2	Deslocamento e Oscilações	16
6.3	Angulação do Plano	17
6.4	Coeficiente de Atrito	18
7	Conclusão	19
7.1	Pontos Positivos	19
7.2	Pontos à Melhorar	20
8	Bibliografia	20

1 Resumo

O problema descreve um fenômeno que ocorre ao colocar um brinquedo de rampa sob um plano inclinado, tal fenômeno pode ser explicado pela influência da força de atrito nas patas do brinquedo e pelo torque gerado pelo peso no plano inclinado. Quando colocado sobre uma rampa, o brinquedo apoia-se sobre a pata fixa e inclina-se diante o plano, com isso é gerado um torque pelo peso do andador, fazendo com que sua pata móvel fique suspensa e oscile até que atinja a pata fixa. A partir desse instante, o apoio fica sobre o pé móvel e o andador inclina-se, gerando novamente um torque pelo peso até que o pé fixo encoste na rampa. Assim o andador vai se movimentando até o fim do plano inclinado. Com o objetivo de investigar a maneira que a geometria do andador e seus parâmetros influenciam sua velocidade terminal, será utilizada uma abordagem teórica e matemática, por meio da mecânica lagrangeana [1] para a geometria do patinho de quatro patas, a qual considerará a explicação supracitada. Visando validar a teorica, realizou-se a experimental variando as icognitas percebidas na equação. Os dados obtidos foram analisados pelo software *Tracker* e comparados com os valores teóricos. Após a abordagem feita, determinou-se que a geometria do andador tem impacto direto no movimento que ocorre, assim como a angulação e peso, vale ressalva ao coeficiente de atrito, que não apresenta influência tão grande ao ser variado. Dessa maneira, observou-se uma acurácia significativa da teoria.

2 Introdução

2.1 Enunciado do Problema

“Construa um brinquedo de rampa (Ramp Walker) rígido com quatro pernas (por exemplo, na forma de um escada). A construção pode começar a “andar” por uma rampa áspera. Investigue como a geometria do andador e parâmetros afetam sua velocidade terminal de caminhada.” [7]

2.2 Análise do Enunciado

O enunciado descreve um clássico brinquedo de madeira, a construção de brinquedos desse tipo, conhecidos como "Ramp Walker", oferece uma oportunidade única para explorar os princípios fundamentais da física, mecânica e geometria. Ao colocar o brinquedo em uma rampa áspera, o fenômeno de caminhada se manifesta, revelando uma interação complexa entre a estrutura do andador e as condições do ambiente, descrita por um sistema de oscilações das patas do andador, influenciado pela angulação do plano, peso do objeto e atrito da rampa. À medida que o andador avança pela rampa, o ciclo de movimento oscilante continua e cada perna do andador toca a superfície em uma sequência coordenada, garantindo um movimento contínuo ao longo da rampa, fazendo parecer com que a construção comece a "andar".



Figura 1: Ramp Walker descendo uma rampa

2.3 Objetivos do relatório

Nesse contexto, este relatório tem o objetivo de explorar os parâmetros relevantes para o fenômeno e, também, como a geometria do andador influenciam no movimento, ademais, avaliar, com a comparação teórico-experimental, a acurácia dessa investigação. Para alcançar tal objetivo será apresentado, primeiramente, uma abordagem teórica, posteriormente com uma análise matemática do problema. Em segundo momento, será conduzida uma metodologia experimental, descrevendo o experimento em questão. Em terceira análise, será qualificado, pelos resultados obtidos, o quão bem a teoria explica o fenômeno, como também possíveis melhorias. Por fim, na conclusão, será feito uma síntese do conteúdo apresentado no relatório e será avaliado se concluiu seus objetivos.

3 Abordagem Teórica

3.1 Tipos de Andadores

Primeiramente, vale ressaltar que existem diferentes tipos de "Ramp Walkers", mas que, na prática, possuem o mesmo princípio de funcionamento, que é das oscilações das patas produzindo uma espécie de movimento semelhante a uma caminhada. Andadores podem variar seu formato, assim como o da pata, a quantidade de patas e de patas móveis, além de outros fatores. Vale salientar que a superfície de contato da pata influencia diretamente no "andar" do objeto, por exemplo: patas com geometrias esféricas (i.e, patas em formato de um segmento esférico) vão variar em dois eixos de liberdade, já que a pata permite movimento nos eixos x e z ; diferentemente da pata de geometria circular, que possui superfície de contato apenas em uma faixa de comprimento horizontal em relação ao plano, podendo variar, então, somente no eixo x . Dentre diversos exemplos, abaixo são apresentados dois tipos de "Ramp Walkers":



(a) Andador com 4 patas móveis



(b) Andador com 1 perna móvel

Figura 2: Exemplos de Andadores Móveis

Em (a) pode ser observado um andador com corpo de geometria cilíndrica fracionado para cada eixo de mobilidade do objeto, além disso, possui quatro patas que rotacionam independentemente entre si e com geometria esférica. Já na figura (b) é apresentado um andador com uma geometria variada, com formato de um galo — em geral os "Ramp Walkers" variam entre diferentes formatos, para atender a diversas necessidades no desenvolvimento infantil de uma criança, sendo a maioria deles em formatos de animais —, e duas patas (vale ressaltar que esse mesmo modelo também

pode apresentar quatro patas, sendo duas da frente fixas e as duas posteriores móveis alinhadas a um eixo comum). Sendo que a dianteira está fixada no corpo e a traseira oscila livremente, com o eixo de rotação definido de forma que as duas possuam o mesmo comprimento (exposto) ao deixar o andador em equilíbrio.

Retomando o enunciado: “Construa um brinquedo de rampa (Ramp Walker) rígido com quatro pernas [...]”. Diante disso, respeitando ao enunciado, foi analisado, neste relatório, um andador rígido (feito por meio de filamento de impressora 3D) com quatro patas, sendo as duas dianteiras fixas ao corpo, e as duas traseiras móveis, ligadas a uma haste, de modo que variem uniformemente.

Essa escolha é resultado do maior equilíbrio que esse andador proporciona (e foi observado experimentalmente) como também por

ser possível definir as suas coordenadas em um plano 2D, vide os movimentos da pata serão espelhados.



Figura 3: Andador utilizado nos estudos

3.2 Dinâmica de um corpo rígido

“Um corpo rígido corresponde a um conceito limite ideal, de um corpo indeformável quaisquer que sejam as forças a ele aplicadas” [5]. Nenhum corpo é perfeitamente rígido, entretanto o andador possui deformações suficientemente pequenas para que possamos desprezá-las no estudo.

3.2.1 O movimento do andador

Denomina-se movimento a variação da posição espacial de um objeto ou ponto material em um dado intervalo de tempo. Como dito na seção 1, quando colocados sobre a rampa, o andador se apoia sobre o pé fixo e oscila o corpo para a frente até o momento em que o pé móvel oscila e bate no pé fixo. A partir deste instante o apoio fica sobre o pé móvel, novamente ocorre uma oscilação para frente até o pé fixo encostar na rampa, e assim o andador vai se movimentando

até completar a descida no plano inclinado. Nesse contexto fica claro que o plano inclinado é essencial para o movimento do objeto, já que a componente $\vec{P}_x$ do peso do andador é responsável pelo movimento no eixo x , definida por: $\vec{P}_x = mg \sin \theta$. Nesta é possível observar que variando o ângulo do plano inclinado varia-se também o movimento do andador.

Diante disso, é válido a análise das velocidades para futuras abordagens da equação de movimento e para a obtenção de dados para o estudo experimental do fenômeno. Como exposto anteriormente, o andador expressa um movimento oscilatório, o que nos permite escrever uma equação de oscilador harmônico para o centro de massa em relação ao eixo y , expressando sua posição em função do tempo e angulação do corpo (φ_a):

$$y(\varphi_a, t) = h \cos(\varphi_a t) \quad (1)$$

Tal que h é a amplitude da altura do movimento e φ_p é a angulação representada pelo corpo em relação ao eixo x .

Além disso, para obtermos a equação espaço-temporal do eixo x é necessário analisar a força resultante do sistema dada por:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a &= P_x - F_{at} \\ \ddot{x}_a &= \frac{m_a g \sin \theta - \mu m_a g \cos \theta}{m_a} \\ \ddot{x}_a &= g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

Na qual m_a é a massa do andador (sem considerar a massa das patas móveis). Nesse viés a equação espaço-temporal do movimento se dá por:

$$x_a = \frac{1}{2} g (\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2 \quad (3)$$

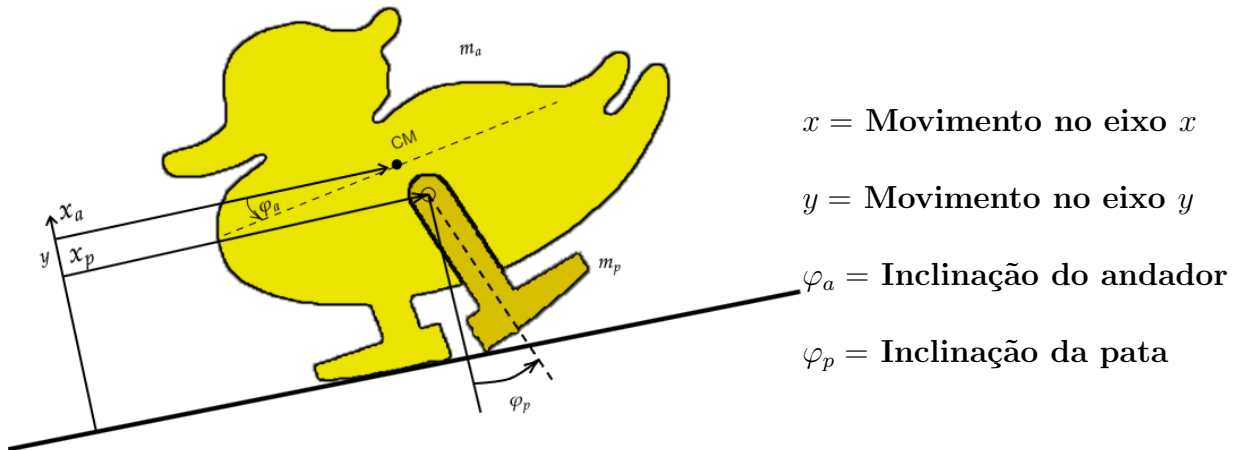
Derivando esta, se obtêm a equação da velocidade do sistema, que posteriormente observaremos:

$$\dot{x}_a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)t \quad (4)$$

3.2.2 Graus de Liberdade

“O número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema.” [4] . Para proceder com a abordagem matemática pelo método de Lagrange, será necessário definir as coordenadas generalizadas que representam as variáveis independentes do sistema. Essas coordenadas generalizadas serão essenciais para formular as equações de movimento que descrevem a dinâmica do ”Ramp Walkers” ao longo do tempo.

A partir da definição de Singiresu Rao faremos a análise dos graus de liberdade do sistema, sendo estes associados aos deslocamentos vertical e horizontal do objeto, bem como aos ângulos de inclinação das patas e do andador, levando em consideração que as patas dianteiras são fixas, sem interferir com o pedido do enunciado (nota-se na visão 2D do andador):



Na abordagem matemática, os quatro graus de liberdade serão utilizados na aplicação da Equação de Euler-Lagrange, para a obtenção da equação de movimento.

3.2.3 Coeficiente de Atrito

As forças de atrito ($\vec{F}_{at}$) são forças de resistência ao movimento, isto é, tangenciais à superfície de contato e opostas ao sentido da velocidade, que ocorre no contato entre dois corpos sólidos, causada pela interação entre as moléculas das superfícies em contato, ou seja, depende fortemente da natureza dos materiais em contato: rugosidade, grau de polimento, oxidação, presença ou não de camadas fluídas (água, lubrificantes).

Existem dois tipos de atrito: estático e cinético, o primeiro acontece enquanto a força oposta ($\vec{F}$) à $\vec{F}_{at}$ é menor, em módulo, neste a força de atrito se iguala gradualmente à força oposta, até que esta atinja um valor crítico, que chamaremos de $\vec{F}_e$:

$$F_{at} = -F, \quad \text{para } |F| < \vec{F}_e \quad (5)$$

No fenômeno, $|F|$ é dado por $\vec{P}_x$:

$$\vec{P}_x < \vec{F}_e \quad (6)$$

$$mg \sen \theta < \vec{F}_e \quad (7)$$

Pela lei de atrito, sabe-se que:

$$\vec{F}_e = \mu_e |N| \quad (8)$$

$$\vec{F}_e = \mu_e mg \sen \theta \quad (9)$$

onde μ_e é o coeficiente de atrito estático. O fato de que estas forças retardam o movimento, faz com que a oscilação entre as patas aconteça e o movimento atinja uma velocidade terminal, é claro que, se a superfície fosse polida, de forma que não houvesse atrito entre o andador e a superfície, o andador iria somente deslizar até o fim do plano, aceleradamente, por exemplo.

Como o deslizamento do andador escolhido é mínimo, o atrito do movimento será aproximado para unicamente ao estático. Entretanto, vale ressaltar que o andador com pata de geometria esférica possui influência do atrito cinético, já que apresenta um movimento nos eixos x e z , de tal forma que ao variar no eixo z o andador inclina-se e suspende as patas do plano, fazendo com que estas deslizem ao longo da rampa.

Em [7] e [9] percebe-se que a força crítica $\vec{F}_e$ é proporcional ao μ_e , massa, gravidade e inclinação do plano. Disso, obtêm-se que ao variar estes parâmetros a $\vec{F}_e$ também varia, de forma que o corpo continue em equilíbrio até que a inclinação do plano seja suficiente de forma que o torque gerado pelo peso seja o suficiente para que o corpo saia do equilíbrio.

3.3 Velocidade Terminal

Conforme os princípios fundamentais da mecânica dos fluidos, a velocidade terminal é caracterizada como a máxima velocidade atingida por um objeto quando a aceleração resultante sobre ele é nula. Este estado é alcançado quando a força de resistência do meio, no qual o objeto está imerso, iguala-se à força motora que o impulsiona. No contexto específico do fenômeno investigado, torna-se imperativo considerar o papel do atrito como uma força de resistência significativa, conforme discutido na seção **(3.2.3)**. O atrito, proveniente do contato das patas do andador com a superfície inclinada, desempenha um papel de relevância na influência direta sobre a velocidade terminal do andador, pois intervê no equilíbrio dinâmico do objeto. Este fenômeno conduz o andador a atingir um estado oscilatório entre o equilíbrio das patas na rampa, que é eventualmente rompido pelo torque do peso do objeto. Nesse contexto, o atrito emerge como um parâmetro essencial a ser analisado e compreendido para uma abordagem mais precisa da velocidade terminal do fenômeno em questão.

4 Abordagem Matemática

4.1 Formulação Lagrangeana

Para descrever o sistema de forma produtiva e simples, será efetivada a equação do movimento advinda da seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (10)$$

Tal que $\mathcal{L}$ é a Lagrangeana, na qual: $\mathcal{L} = E_C - E_P$. Além disso, q_j é a coordenada generalizada das partículas e Q_j indica as forças não representadas por uma energia potencial, ao modo que $(j = 1, 2, \dots, n)$.

4.1.1 Cálculo da Energia

Nesse movimento a Energia Cinética pode ser dada pela soma de *Energia Cinética Linear* $\mathbf{E}_L$ e *Energia Cinética Angular* $\mathbf{E}_A$.

$$E_C = E_L + E_A \quad (11)$$

Já que o corpo do andador é a única massa que apresenta movimento linear no sistema, o cálculo da Energia Cinética Linear do sistema se dá por:

$$E_L = \frac{1}{2} m_a v_a^2 \quad (12)$$

Sendo m_a e v_a a massa e velocidade do andador, respectivamente.

Analogamente a Energia Cinética Angular pode ser calculada pela expressão:

$$E_A = \frac{1}{2} \sum_i^n L_i \omega_i^2 \quad (13)$$

Expandindo o somatório obtêm-se a Energia Cinética Angular do sistema:

$$E_A = \frac{1}{2}L_p\omega_p^2 + \frac{1}{2}L_a\omega_a^2 \quad (14)$$

no qual ω_p e ω_a é a velocidade angular da pata e do andador, L_p e L_a é o momento de inercia da pata e andador, respectivamente.

Por fim, o sistema apresenta apenas um tipo de Energia Potencial, sendo ela gravitacional. Onde, pela geometria do problema, deduz-se a fórmula pelo referencial da rampa:

$$V = mgy(\varphi_a, t) \text{ sen } \theta \quad (15)$$

na qual m é a massa total do objeto sendo a soma da massa do andador e da pata.

4.1.2 Equação do Movimento

Substituindo as Energias obtidas na equação de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_av_a^2 + \frac{1}{2}|\vec{L}_a|\omega_a^2 + \frac{1}{2}|\vec{L}_p|\omega_p^2 - mgy(\varphi_a, t) \text{ sen } \theta \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(m_a\dot{x}_a^2 + |\vec{L}_a|\dot{\varphi}_a^2 + |\vec{L}_p|\dot{\varphi}_p^2) - mgh \cos(\varphi_a t) \text{ sen } \theta \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(m_a\dot{x}_a^2 + m_a|\vec{r}_a|\dot{x}_a\dot{\varphi}_a^2 + m_p|\vec{r}_p|\dot{x}_p\dot{\varphi}_p^2) - mgh \cos(\varphi_a t) \text{ sen } \theta \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\vec{r}_a$ é o eixo de rotação do andador e $\vec{r}_p$ é o eixo de rotação da pata.

Obtendo a equação de movimento pela equação de Euler-Lagrange [10], considerando φ_a como a coordenada generalizada q_j :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_a} (m_a\dot{x}_a^2 + m_a|\vec{r}_a|\dot{x}_a\dot{\varphi}_a^2 + m_p|\vec{r}_p|\dot{x}_p\dot{\varphi}_p^2) - mgh \cos(\varphi_a t) \text{ sen } \theta}{\partial \dot{\varphi}_a} \right) - \\ \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \varphi_a} (m_a\dot{x}_a^2 + m_a|\vec{r}_a|\dot{x}_a\dot{\varphi}_a^2 + m_p|\vec{r}_p|\dot{x}_p\dot{\varphi}_p^2) - mgh \cos(\varphi_a t) \text{ sen } \theta}{\partial \varphi_a} \right) = Q_j \end{aligned} \quad (17)$$

e então a equação do movimento resulta em:

$$\begin{aligned} m_a \dot{x}_a |\vec{r}_a| \ddot{\varphi}_a - \left(-mgh[-\sin(\varphi_a t)] \dot{\varphi}_a \sin \theta \right) &= Q_j \\ m_a \dot{x}_a |\vec{r}_a| \ddot{\varphi}_a - (m_a + m_p)gh \sin(\varphi_a t) \dot{\varphi}_a \sin \theta &= Q_j \end{aligned} \quad (18)$$

como o andador utilizado na análise do problema culmina, prioritariamente, no atrito estático, e neste não há dissipação de energia ($Q_j = 0$), a equação final do sistema fica:

$$m_a \dot{x}_a |\vec{r}_a| \ddot{\varphi}_a - (m_a + m_p)gh \sin(\varphi_a t) \dot{\varphi}_a \sin \theta = 0 \quad (19)$$

5 Procedimento Experimental

5.1 Objetivos do Procedimento Experimental

A partir das abordagens teóricas e matemáticas delineadas, procederemos à introdução de uma metodologia experimental. Essa abordagem experimental permitirá a coleta e análise de dados, proporcionando a fundamentação empírica necessária para avaliar a consistência e veracidade dos estudos propostos.

5.2 Materiais

Lixas (Gramaturas: 600, 400, 220, 120, 60)

Andadores

Câmera de Celular (240 ± 0.5)fps

Dobradiça de aço cromado 76.0x64.0(± 0.5)mm

Parafusos 4.0x19.0(± 0.5)mm

Painel de madeira sólida 400.0x200.0x17.0(± 0.5)mm

Bloco de madeira sólida 65.0x32.0x30.0(± 0.5)mm



Figura 4: Arranjo Experimental

5.3 Construção do andador

Pelo enunciado precisamos construir um andador rígido com quatro pernas, para isso utilizaremos uma impressora 3D.

Foram impressos três fragmentos de corpo — sendo um principal, apresentando o formato do corpo e cabeça de um pato, e dois secundários, apresentando somente a estrutura corporal — uma "perna", duas patas e uma haste.

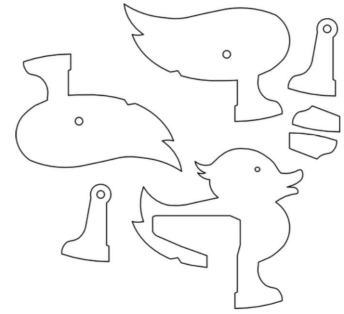


Figura 5: Modelo do andador

Primeiramente, foram colados, com cola instantânea, os três fragmentos de corpo do andador, de forma que fiquem todos alinhados. Semelhantemente foram colados os pés à pata. A pata e a

parte interna do corpo do andador foram lixados, para que não haja atrito entre a perna e o corpo, a fim de que a rotação da perna seja livre. Ademais, a haste foi fixada com a perna encaixada, ao furo no corpo do andador, com medidas feitas para que não haja oscilações inesperadas, de forma a evitar uma variação no movimento. Além disso, para seguir o enunciado, cortamos, com uma serra, a perna do corpo principal do andador, assim fazendo com que o andador torne a ter duas patas dianteiras fixas, uma de cada fragmento de corpo secundário do andador. Conjuntamente a isso, foi cortada, também, a perna ao meio, desde a superfície de contato do pé até pouco antes do eixo de rotação, para que continuem oscilando uniformemente como foi proposto em (3.1). A figura 2 mostra o modelo de andador utilizado no experimento.

Semelhantemente foi impresso e confeccionado um andador com geometria da pata esférica, como o descrito na seção 3.1 pela figura 1 - (a). O qual apresentou demasiado movimento no eixo z , de tal forma que não determinava estabilidade na superfície da rampa e acabava tombando de lado, inconsistentemente, fazendo com que seus experimentos fossem variáveis e incoerentes. Diante disso priorizamos o modelo do relatório no andador ao qual geometria da pata é circular,

representado pela figura 1 - (b).

5.4 Construção da rampa

Para a rampa utilizaremos as duas placas de madeira sólida, dobradiças, parafusos e uma chave de fenda.

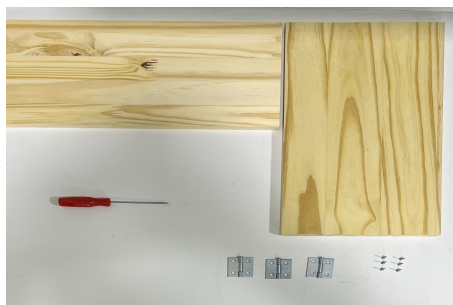


Figura 6: Conjunto experimental de construção da rampa

Primeiramente foram colocadas as placas em série, alinhadas, com um pequeno espaço entre elas, para que as dobradiças possam ser colocadas e parafusadas no local. Com auxílio de detergente, para lubrificar e prevenir os danos ao parafuso e à madeira, parafusamos as três dobradiças às placas em espaços equivalentes entre elas, de forma que a rampa não varie e fique rígida. Além disso, fixamos uma fita de velcro na base suporte da rampa, ao longo do seu comprimento, e no bloco de madeira, para que possamos variar a angulação precisamente. Por meio de um lápis foi demarcado a calibração do sistema, possibilitando o uso do software Tracker de forma eficiente, e também os ângulos que serão utilizados na análise, fazendo com que possamos analisar a velocidade terminal do andador em diferentes parâmetros. Ademais, para a análise do coeficiente de atrito foram utilizadas lixas de diferentes grãos, e fixadas ao plano inclinado, por meio de fita crepe, de tal maneira que não varie na linearidade de superfície de contato no plano. A seguir, o estado final da rampa:



Figura 7: Plano Inclinado

observa-se na foto uma das lixas fixadas rente ao plano, o bloco de apoio do plano inclinado, fixado com velcro, produzindo uma certa angulação e a calibração (dois traços na placa suporte do plano).

5.5 Obtenção dos Coeficientes de Atrito Estático

Para obter os coeficientes de atrito estático, os andadores foram colocados sob o plano inclinado, e feita a análise vetorial do sistema, na qual foi obtida que o coeficiente de atrito estático é igual à tangente do grau de inclinação limite ao deslizamento do objeto. Diante disso, foram feitos diversos experimentos, a fim de diminuir as incertezas obtidas, de todas as gramaturas das lixas. Já para a análise da influência do coeficiente de atrito estático na velocidade terminal, foram feitas filmagens dos andadores, em 240 frames por segundo, com o plano inclinado à $(10^\circ \pm 0,5)$, e sob influência de diferentes lixas, na qual, posteriormente, será analisada no Tracker e comparada com a velocidade obtida pela equação de movimento.

Gramatura da Lixa	Coeficiente de Atrito (μ_e)	Vel. Experimental (m/s)	Vel. Teórica (m/s)
600	0.958 ± 0.38	$(7.6 \pm 1.3) \times 10^{-2}$	6.65×10^{-2}
400	0.913 ± 0.44	$(7.7 \pm 0.9) \times 10^{-2}$	6.65×10^{-2}
220	0.945 ± 0.34	$(8.3 \pm 1.4) \times 10^{-2}$	6.65×10^{-2}
120	0.887 ± 0.48	$(6.15 \pm 0.32) \times 10^{-2}$	6.65×10^{-2}
060	0.903 ± 0.55	$(5.9 \pm 0.4) \times 10^{-2}$	6.65×10^{-2}

Tabela 1: Velocidade terminal em função do coeficiente de atrito

5.6 Experimento

Uma vez com o andador e rampa montados o procedimento experimental é bem simples, basta soltar o andador de uma posição pré-definida, variando, a posteriori, parâmetros importantes

como: rugosidade e angulação da rampa, peso e geometria do andador, para assim analisar como isso interfere na velocidade terminal do andador, respondendo, então, ao enunciado. Para a obtenção de dados foi utilizado o software *Tracker*. Com um tripé posicionado com a câmera do celular, gravando à (240 ± 1) frames por segundo, perpendicularmente ao plano da rampa, para uma maior precisão dos dados, gravamos um vídeo de cada angulação variando a rugosidade do plano em cada uma delas, e observamos o movimento indicado por cada andador por meio de gráficos feitos pelo programa citado acima.

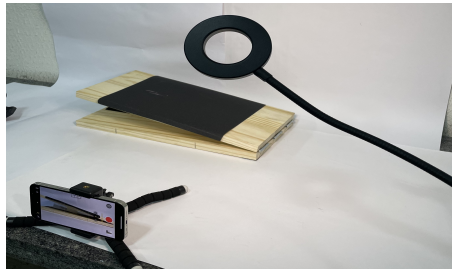


Figura 8: Imagem de como foram gravados os experimentos

Para a análise da angulação do plano, foram feitas filmagens dos andadores, em 240 frames por segundo, diante a ação da lixa de gramatura 600, e sob influência de diferente ângulos de inclinação do plano inclinado, posteriormente, foi observado no Tracker a velocidade terminal do objeto.

Velocidade Terminal (m/s)	Angulação ($\theta \pm 0,5$)°	Gramatura da Lixa
Não atingiu	5,0	600
$(3,4 \pm 0,5) \times 10^{-2}$	7,0	600
$(7,6 \pm 1,3) \times 10^{-2}$	10,0	600
$(11,13 \pm 1,5) \times 10^{-2}$	13,0	600
$(12,5 \pm 0,3) \times 10^{-2}$	15,0	600
Não atingiu	18,0	600

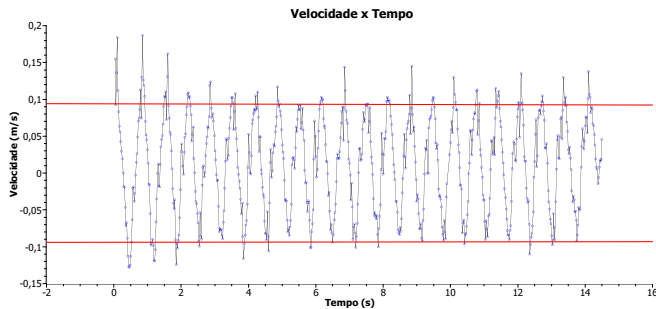
Tabela 2: Velocidade terminal em função da angulação

6 Resultados e Discussão

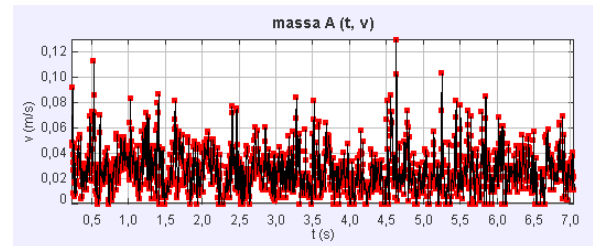
Nessa seção será apresentado os dados obtidos pela metodologia experimental, e, então, analisados e discutidos, determinando se a teoria proposta é válida e comprovada pelos experimentos.

6.1 Geometria do Andador

Como dito anteriormente, o movimento do andador de pata esférica se torna inviável de se analisar, pelo fato de apresentar movimento no eixo z , e isso torna-lo inconsistente. A seguir é representado gráficos da velocidade pelo tempo, demonstrando que o andador com pata de geometria circular atinge a velocidade terminal rapidamente, enquanto o outro apresenta inconsistência na velocidade, não atingindo o estado terminal.



(a) Pata de geometria circular



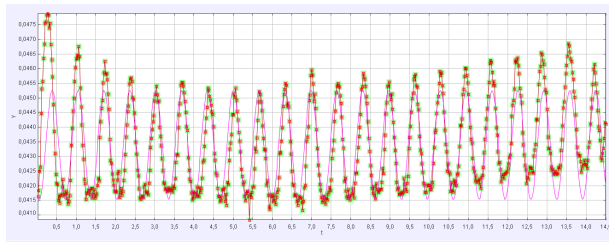
(b) Pata de geometria esférica

Figura 9: Gráficos da velocidade pelo tempo

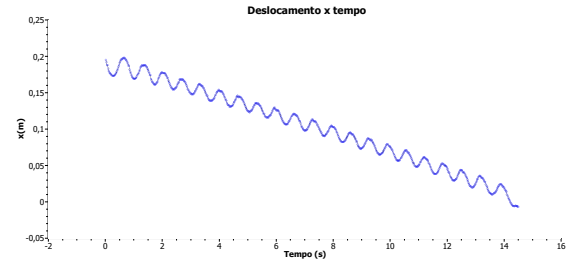
6.2 Deslocamento e Oscilações

Na fundamentação teórica foi abordado que o movimento se baseia em oscilações da pata e do corpo do andador, e, em suma, seria caracterizado por uma equação de movimento harmônico simples. Para analisar o movimento com mais precisão, foram plotados gráficos pelo software Tracker. Em fins de análise, o andador foi posto sobre uma angulação de $12,5^\circ$ e sobre ação de uma lixa d'água com gramatura de 600.

Como esperado o movimento representou uma oscilação harmônica do andador, contudo, como o eixo se apresenta deslocado pelo plano inclinado, o andador apresenta, além do movimento oscilatório, um decaimento linear, representado por seu deslocamento no eixo x ao longo do plano, figura 10 - (b).



(a) Gráfico eixo x



(b) Gráfico eixo y

Figura 10: Gráficos dos deslocamentos pelo tempo

Além disso, o gráfico da figura 10 - (a) representa o movimento oscilatório do andador no eixo y , com uma representação numérica (linhas em rosa) da função abordada anteriormente.

6.3 Angulação do Plano

Por meio dos experimentos foi observado que o andador possui, em geral, três comportamentos distintos em função do ângulo de inclinação. Quando o ângulo é suficientemente reduzido, a componente da força peso $\vec{P}_x$ não supera, em módulo, o atrito, pois é diretamente proporcional ao seno do ângulo de inclinação, como indicado em (3.2.1), isto resulta na imobilidade do andador. Ademais quando o ângulo é suficiente para que $\vec{P}_x$ seja maior, em módulo, que a força de atrito o andador ultrapassa a força de resistência e manifesta-se o fenômeno de caminhada. Em última análise, observou-se que, em situações em que o ângulo do plano é consideravelmente elevado, o torque provocado pelo peso supera a força normal e o andador, eventualmente, tomba no plano.

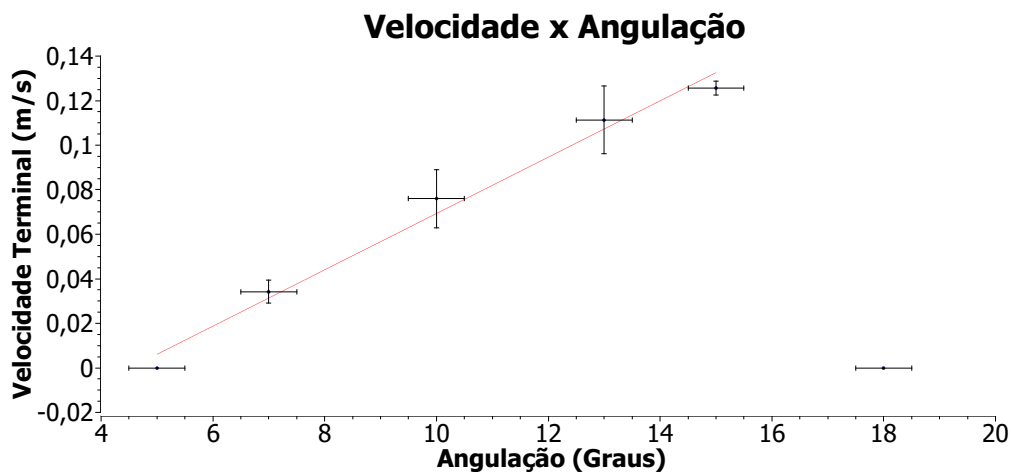


Figura 11: Gráfico da velocidade terminal em função da angulação

Perceba que o gráfico mostra os dois ângulos limites e representa a linearidade da velocidade em função da angulação, com as devidas incertezas. Diante disso, fica claro que a angulação do plano influencia diretamente na velocidade terminal do andador.

6.4 Coeficiente de Atrito

Na análise experimental do atrito foi observado que a variação deste não influencia na velocidade terminal do andador com pata de geometria esférica, uma vez que não há deslizamento da pata na rampa, sendo, então, apenas o coeficiente de atrito estático válido para o movimento. O gráfico a seguir demonstra isso:

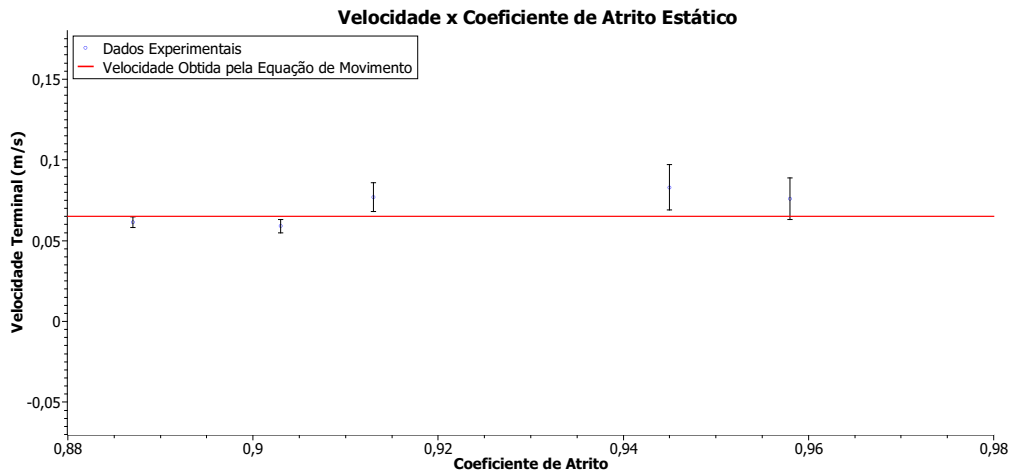


Figura 12: Gráfico da velocidade terminal em função do coeficiente de atrito

Obs: barras de erro horizontais ocultas por possuírem tamanho demasiado em relação à escala.

Note que as velocidade se mantiveram relativamente próximas do valor obtido pela equação de movimento, e constantes diante das variações dos coeficientes de atrito. Os desvios observados no gráfico ocorrem por diferentes fatores, dentre eles: o cálculo do coeficiente de atrito, a impressão do andador e pelo relevo causado pela fixação das lixas ao plano inclinado, influenciando diretamente nos dados obtidos. Vale ressaltar, como dito na seção (3.2.3, que o andador com pata de geometria esférica possui influência do atrito cinético, novamente, é de extrema importância destacar que o fato de que o andador varie no eixo z culmina em um movimento totalmente inconstante, sendo inviável para a análise no relatório.

7 Conclusão

O enunciado trata de um fenômeno que ocorre ao colocar um brinquedo em um plano inclinado, tal fenômeno culminou em um padrão sistemático de oscilações das patas e do andador, que produz o efeito de caminhada do objeto pelo plano inclinado. Para analisar a velocidade terminal e parâmetros relevantes, foi utilizado a formulação lagrangeana além de uma abordagem teórica, complementada ao final por uma abordagem experimental, comprovando a eficácia das previsões feitas na seção teórica.

Ao longo do relatório, foi visto que a teoria obteve grande precisão nas descrições do fenômeno em estudo, os experimentos evidenciaram os fatos descritos na abordagem teórica, os quais descreviam a sensibilidade da velocidade terminal do andador às variações na angulação do plano, grau de inclinação da pata e do andador destacando a importância desses elementos na eficiência do movimento. Além disso, foi comprovado a irrelevância do coeficiente de atrito estático para a velocidade terminal e observamos a variação que ocorre no movimento pela mudança na geometria do andador.

Em suma, conclui-se que o relatório apresentou grande eficácia na resolução do problema. No entanto, é crucial destacar que, apesar da eficácia geral do relatório, foram identificados alguns desvios decorrentes de imprecisões nos meios de medida, como o Tracker, e na obtenção do coeficiente de atrito. Além disso, espera-se que, no futuro, sejam utilizados mais andadores para analisar com maior precisão as variações que ocorrem no movimento devido à geometria.

7.1 Pontos Positivos

- Foi feita uma abordagem simples e funcional, por meio da formulação lagrangeana, do problema.
- Observado com precisão a influência dos parâmetros relevantes na velocidade terminal do andador.

- Análise sucinta da influência dos tipos de atrito no problema.

7.2 Pontos à Melhorar

- Foram utilizados poucos andadores, variando, então, poucos aspectos importantes da geometria.
- Representação matemática funcional apenas para movimentos bidimensionais.

8 Bibliografia

- [1] J. L. Lagrange. *Oeuvres de Lagrange*. 1882.
- [2] R. I. Leine. *Nonlinear dynamics and modeling of various wooden toys with impact and friction*. 2003.
- [3] João Barcelos Neto. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 2004.
- [4] Singiresu S. Rao. *Mechanical Vibrations Ed.4*. 2009.
- [5] H. Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Mecânica (Vol. 1)*. 2013.
- [6] *Modelo 3D do andador*. URL: <https://www.thingiverse.com/thing:652468/files>.
- [7] *Problemas IYPT Brasil 2024*. URL: <https://www.iyptbrasil.com/problemas-1>.