



Olimpíada Brasileira Online de Matemática

1ª Fase - 16 de agosto de 2025

Nome: _____

Série: _____

Nível Carlos
Moreira (Gugu)
Ensino Médio

Instruções de Prova

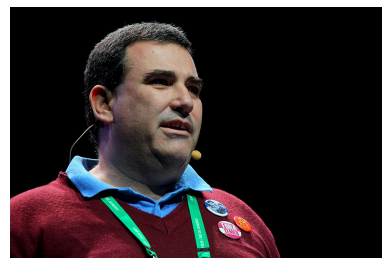
- I. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos do **ensino médio** e participantes da categoria aberta. Ela contém **vinte** questões. Todas as questões tem o mesmo valor.
- II. A prova é individual e sem consultas. Em particular, o uso de ferramentas de inteligência artificial é expressamente proibido. Respeite a cultura olímpica.
- III. Os materiais permitidos são: caneta, lápis/lapiseira, borracha, compasso, régua e esquadro (com ou sem marcação), papel em branco ou com pauta de qualquer tamanho (por exemplo, A4 ou A3). Transferidores e calculadoras de qualquer tipo não são permitidos.
- IV. A duração máxima desta prova é de **três** horas, sem tempo extra para o preenchimento do gabarito. Recomendamos que os estudantes preencham o gabarito conforme forem respondendo as perguntas.

Apoio:



Curiosidades:

Conhecido por gerações de estudantes como Gugu, Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira é pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e um dos maiores especialistas mundiais em sistemas dinâmicos, geometria fractal e conjuntos de Cantor. Medalhista olímpico na juventude e atual coordenador da OBM, Gugu tem dedicado décadas à formação de jovens talentos em matemática. Defendeu seu mestrado no IMPA aos 17 anos e concluiu o doutorado pouco depois, sob orientação de Jacob Palis. Fez pós-doutorado na Universidade Paris-Sul com o medalhista Fields Jean-Christophe Yoccoz, com quem desenvolveu resultados fundamentais sobre interseções de conjuntos de Cantor. Desde 1997, atua como pesquisador no IMPA, com contribuições que relacionam aproximações diofantinas, sistemas dinâmicos complexos, combinatória e teoria dos números. Seu espírito acessível e entusiasmo contagiante também se manifestam fora da lousa: é célebre por manter a contagem detalhada dos mais de 5.000 gols marcados em partidas de futebol ao longo dos anos. Recebeu, em 2018, o Prêmio Erdős da União Matemática Internacional, reconhecendo seu impacto na educação matemática por meio das olimpíadas. Para ele, a matemática é uma ciência viva, repleta de descobertas — e que, sim, é muito divertida.



Questão 1. Considere o número

$$N = 1^{2025} + 2^{2025} + 3^{2025} + \dots + 9^{2025}.$$

Qual é o algarismo das unidades de N ?

- (a) 3
- (b) 4
- (c) 5
- (d) 6
- (e) 9

Proposto por Isabela Pires

Para determinar o último dígito de N , calculamos $N \bmod 10$. O ciclo dos algarismos finais das potências mod 10 é conhecido:

k	Ciclo de $k^n \bmod 10$
1	1
2	2, 4, 8, 6
3	3, 9, 7, 1
4	4, 6
5	5
6	6
7	7, 9, 3, 1
8	8, 4, 2, 6
9	9, 1

Como $2025 \equiv 1 \pmod{4}$ e $2025 \equiv 1 \pmod{2}$, o expoente se reduz a 1 no ciclo.

Logo, o último dígito de k^{2025} é o primeiro termo do ciclo de k , para $k = 1, \dots, 9$.

Assim,

$$N \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \equiv \boxed{5} \pmod{10}.$$

Resposta: Alternativa (C).

Questão 2. Um número $n = \overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_l}$ é dito *alternado* quando d_1 é ímpar, d_2 é par, d_3 é ímpar, e assim por diante até d_l . Seja Q a quantidade de números alternados n de 2025 dígitos tais que 3 divide n . Quais são os três últimos dígitos de Q ?

Nota. Escrevemos $n = \overline{d_1 d_2 d_3 \dots d_l}$ para denotar que o dígito mais a esquerda na expansão de n na base 10 é d_1 , o segundo dígito mais a esquerda é d_2 , e assim por diante.

- (a) 026
- (b) 041
- (c) 042
- (d) 208
- (e) 958

Proposto por Tiago Trindade

Seja $a_{i,j}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, a quantidade de números alternados de i dígitos que são congruentes a $j \pmod{3}$.

Evidentemente,

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= 2 & a_{2n,0} &= 2a_{2n-1,0} + 2a_{2n-1,1} + a_{2n-1,2} & a_{2n+1,0} &= 2a_{2n,0} + a_{2n,1} + 2a_{2n,2} \\ a_{1,1} &= 2, & a_{2n,1} &= 2a_{2n-1,0} + a_{2n-1,1} + 2a_{2n-1,2}, & a_{2n+1,1} &= 2a_{2n,0} + 2a_{2n,1} + a_{2n,2} \\ a_{1,2} &= 1 & a_{2n,2} &= a_{2n-1,0} + 2a_{2n-1,1} + 2a_{2n-1,2} & a_{2n+1,2} &= a_{2n,0} + 2a_{2n,1} + 2a_{2n,2} \end{aligned}$$

pois em $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ há dois números que são $0 \pmod{3}$, um $1 \pmod{3}$ e dois $2 \pmod{3}$, e em $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ há dois $0 \pmod{3}$, dois $1 \pmod{3}$ e um $2 \pmod{3}$.

Dessas relações se prova facilmente por indução em n que

$$\begin{aligned} a_{2n,0} &= \frac{5^{2n}+2}{3} & a_{2n+1,0} &= \frac{5^{2n+1}+1}{3} \\ a_{2n,1} &= \frac{5^{2n}-1}{3}, & a_{2n+1,1} &= \frac{5^{2n+1}+1}{3} \\ a_{2n,2} &= \frac{5^{2n}-1}{3} & a_{2n+1,2} &= \frac{5^{2n+1}-2}{3} \end{aligned}$$

Dessa forma, a quantidade de números alternados de 2025 dígitos que são divisíveis por 3 é

$$a_{2025,0} = \frac{5^{2025} + 1}{3} \equiv \frac{5^3 + 1}{3} = 42 \pmod{1000}$$

Resposta: Alternativa (C).

Questão 3. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC = 13$ e $BC = 10$. Seja D o pé da altura de A sobre BC , E o ponto médio de AD , e F o ponto médio de AB . Calcule a área do triângulo AEF .

- (a) $\frac{15}{2}$
- (b) 8
- (c) 10

(d) 12

(e) 15

Proposto por Isabela Pires

Coloque o triângulo no plano coordenado:

- $B = (-5, 12)$, $C = (5, 12)$ pois $BC = 10$.

- $A = (0, 0)$ pois o triângulo é isósceles.

- O pé da altura D é o ponto médio de BC , $D = (0, 12)$.

- O ponto médio E de AD :

$$E = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+12}{2} \right) = (0, 6)$$

- O ponto médio F de AB :

$$F = \left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{0+12}{2} \right) = \left(-\frac{5}{2}, 6 \right)$$

A área do triângulo AEF é dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_A(y_E - y_F) + x_E(y_F - y_A) + x_F(y_A - y_E)|$$

Substituindo:

$$= \frac{1}{2} |0 \cdot (6 - 6) + 0 \cdot (6 - 0) + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (0 - 6)| = \frac{1}{2} \cdot 15$$

Resposta: Alternativa (A).

Questão 4. Seja $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Qual alternativa equivale a $(1 + i)^{2025}$?

(a) $2^{1012}(1 + i)$

(b) $2^{1012}(1 - i)$

(c) $2^{1012}(i - 1)$

(d) $2^{1013}(i - 1)$

(e) $2^{1013}(1 + i)$

Proposto por Fábio Medeiros

Note que $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Assim, $(1 + i)^{2025} = 2^{1012}i^{1012}(1 + i) = 2^{1012}(i + 1)$.

Resposta: Alternativa (A).

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) + xf(x) = 1.$$

Qual é o valor de $f(7)$?

(a) 0

(b) 1

(c) 7

(d) 9

(e) Nenhuma função f satisfaz a equação dada

Proposto por Isabela Pires

Suponha que tal função exista.

Substituindo $x = 0$,

$$f(f(0)) = 1. \quad (1)$$

Substituindo $x = 1$,

$$f(f(1)) + f(1) = 1. \quad (2)$$

Vamos provar que 0 não está em sua imagem. De fato, se $f(x_0) = 0$ então substituindo $x = x_0$ temos $f(0) + x_0 \cdot 0 = 1$ donde $f(0) = 1$. Então, (1) implica que $f(1) = 1$ donde $f(f(1)) + f(1) = 2$, contradizendo (2).

Se $f(x_1) = f(x_2)$ então

$$f(f(x_1)) + x_1 f(x_1) = 1 = f(f(x_2)) + x_2 f(x_2) \implies x_1 f(x_1) = x_2 f(x_1) \implies x_1 = x_2$$

Substituindo $x = f(0)$,

$$f(f(f(0))) + f(0) \cdot f(f(0)) = 1 \implies f(1) + f(0) = 1. \quad (3)$$

Mas agora (2) e (3) implicam que $f(f(1)) = f(0)$, donde pela injetividade de f temos $f(1) = 0$.

Assim, não existe função real f satisfazendo a equação.

Resposta: Alternativa (E).

Questão 6. Existem 2025 cidades em uma circunferência. Mansa Musa viajar por um trajeto que passa por cada cidade exatamente uma vez, sendo que esse trajeto não pode ser auto intersectante. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

(a) $2025 \cdot 2^{2023}$

(b) $2025 \cdot 2^{2024}$

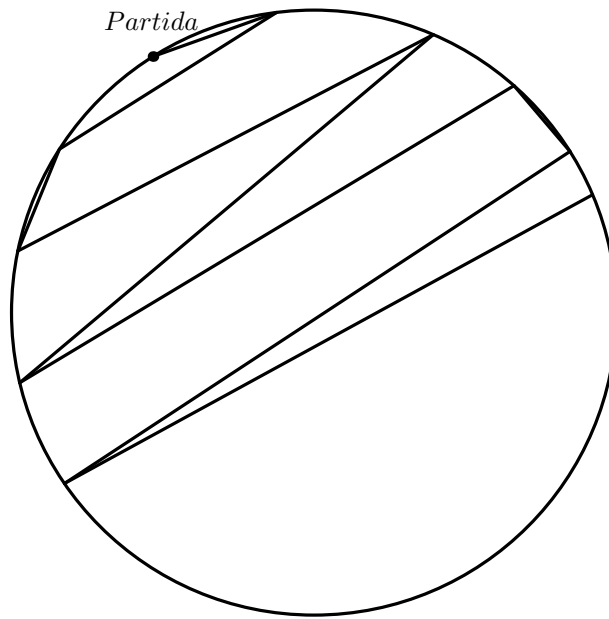
(c) $2024 \cdot 2^{2023}$

(d) 2^{2025}

(e) $2025!$

Proposto por Fábio Medeiros

Para não criar um trajeto auto intersectante, esse caminho não pode separar duas cidades ainda não visitadas por um segmento de reta. Caso contrário, ele seria cruzado futuramente. Assim, ele deve ir para a cidade mais a esquerda ou mais a direita ainda não visitada, tendo 2 opções a cada passo. Dessa forma, ele tem 2025 opções para escolher onde inicia e após isso multiplicamos por 2 a cada novo passo. Dessa forma, o total de maneiras é $2025 \cdot 2^{2023}$ (já que no último passo não há opção de direita e esquerda).



Resposta: Alternativa (A).

Questão 7. Considere a malha triangular infinita gerada pelas combinações inteiras de

$$\vec{a} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Seja $\mathcal{T}$ o conjunto dos triângulos equiláteros de lado 1 com vértices nessa malha.

Determine a quantidade de isometrias do plano que fixam a origem, transformam triângulos de $\mathcal{T}$ em triângulos de $\mathcal{T}$, e preservam a orientação.

Nota. Uma isometria do plano euclidiano é uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$, onde d é a distância euclidiana.

- (a) 3
- (b) 6
- (c) 9
- (d) 12
- (e) Infinito

Proposto por Isabela Pires

A malha triangular é simétrica por rotações de 60° em torno da origem e reflexões em eixos específicos.

- As rotações possíveis que preservam o padrão são: $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$, totalizando 6.
- Nenhuma reflexão preserva orientação.

Assim, o grupo de simetrias que preservam $\mathcal{T}$ tem exatamente 6 elementos.

Resposta: Alternativa (B).

Questão 8. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $ab = 180$. Considere o conjunto

$$B = \left\{ \frac{a}{5} + \frac{b}{3} : ab = 180, a, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determine o menor valor que pertence ao conjunto B .

Nota. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos inteiros positivos.

- (a) $\frac{100}{13}$
- (b) $\frac{104}{15}$
- (c) $\frac{31}{4}$
- (d) 8
- (e) $\frac{74}{9}$

Proposto por Isabela Pires

Como $b = \frac{180}{a}$, definimos

$$f(a) = \frac{a}{5} + \frac{180/(a)}{3} = \frac{a}{5} + \frac{60}{a}.$$

Pela desigualdade entre média aritmética e geométrica ($MA \geq MG$),

$$\frac{a}{5} + \frac{60}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{5} \cdot \frac{60}{a}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} \approx 6,928.$$

Testando os valores inteiros divisores de 180 para a e calculando $f(a)$:

a	$b = 180/a$	$f(a) = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}$
18	10	$\frac{18}{5} + \frac{10}{3} = \frac{54}{15} + \frac{50}{15} = \frac{104}{15} \approx 6,933$
20	9	$4 + 3 = 7$
15	12	$3 + 4 = 7$

O menor valor real atingido é $\frac{104}{15}$.

Resposta: Alternativa (B).

Questão 9. Seja n um inteiro positivo, e seja $F(n)$ a quantidade de maneiras que n pode ser escrito como $\sum_{i \geq 0} a_i 2^i$ onde $a_i \in \{0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots\}$ (isto é, $a_i = 2^k - 1$ para algum k inteiro não negativo). Quando vale $F(2025 - 10)$?

- (a) 2592
- (b) 3072
- (c) 3187
- (d) 4096
- (e) 8192

Proposto por Tiago Trindade

Claramente $F(0) = 1$.

Note que

$$n = a_0 + 2 \sum_{i \geq 0} a_{i+1} 2^i$$

Assim, se n for par a_0 deverá ser 0. Consequentemente $F(2n) = F(n)$.

Agora, se n for ímpar a_0 pode ser qualquer número da forma $2^k - 1$ que seja menor que n . Consequentemente, $F(2m - 1) = \sum_{2^t \leq m} F(m - 2^t)$.

Se prova facilmente por indução que $F(2^m) = 1$, $F(2^m - 1) = 2^{m-1}$, e que $F(2^m - (2^k + 1)) = 2^k 3^{m-k-2}$ para cada $1 \leq k \leq m - 2$.

Note que $2025 - 10 = 2^{11} - (2^5 + 1)$. Logo $F(2025 - 10) = 2^5 \cdot 3^4 = 2592$.

Resposta: Alternativa (A).

Questão 10. Determine o número de pares $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ que satisfazem

$$7x + 5y = 100,$$

com a condição extra de que $y \equiv 3 \pmod{5}$.

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

Proposto por Isabela Pires

Como $y \equiv 3 \pmod{5}$, escrevemos

$$y = 5k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Substituindo na equação:

$$7x + 5(5k + 3) = 100 \implies 7x + 25k + 15 = 100 \implies 7x + 25k = 85.$$

Assim,

$$7x = 85 - 25k.$$

Para $x \in \mathbb{N}$, $85 - 25k$ deve ser múltiplo de 7 e positivo.

Testando valores de k :

$$k = 0 : 85 \equiv 1 \pmod{7} \implies \text{não múltiplo de 7}$$

$$k = 1 : 60 \equiv 4 \pmod{7} \implies \text{não múltiplo}$$

$$k = 2 : 35 \equiv 0 \pmod{7} \implies x = 5 > 0$$

$$k = 3 : 10 \equiv 3 \pmod{7} \implies \text{não múltiplo}$$

Somente $k = 2$ gera solução válida. Verificando y :

$$y = 5 \cdot 2 + 3 = 13.$$

Logo, existe exatamente uma solução.

Resposta: Alternativa (B).

Questão 11. Arthur, Beatriz, Carlos, Diana e Eduardo brincam de um jogo de dedução. Dentre eles, há 3 **Guardiões**, 1 **Misterioso** e 1 **Desorientado**. As afirmações de cada jogador foram as seguintes:

- Arthur: “Beatriz é o Misterioso.”
- Beatriz: “Carlos e Diana não são ambos Guardiões.”
- Carlos: “Eduardo é o Misterioso.”
- Diana: “Arthur não é o Misterioso.”
- Eduardo: “Beatriz e Carlos não são ambos Guardiões.”

Sabendo que os **Guardiões nunca mentem**, e que o **Misterioso** e o **Desorientado** podem mentir ou falar a verdade, pode-se afirmar sempre que:

- (a) Arthur é o Misterioso.
- (b) Beatriz é o Guardião.
- (c) Carlos é o Guardião.
- (d) Diana é o Guardião.
- (e) Nenhuma das anteriores.

Proposto por Isabela Pires

Vamos analisar as afirmações considerando os papéis de cada jogador.

Passo 1: Definições

- Guardiões (3 pessoas) sempre dizem a verdade. - Misterioso (1 pessoa) pode mentir ou falar a verdade.
- Desorientado (1 pessoa) pode mentir ou falar a verdade.

Passo 2: Analisar as afirmações

Denotemos os papéis: G para Guardião, M para Misterioso, D para Desorientado.

Temos cinco pessoas: Arthur (A), Beatriz (B), Carlos (C), Diana (D), Eduardo (E).

A afirmação de Arthur: “Beatriz é o Misterioso.”

- Se Arthur é Guardião, sua afirmação é verdadeira, logo $B = M$. - Se Arthur não é Guardião, pode mentir.

A afirmação de Beatriz: “Carlos e Diana não são ambos Guardiões.”

- Se Beatriz é Guardião, essa afirmação é verdadeira, então pelo menos um entre Carlos ou Diana não é Guardião. - Se Beatriz não é Guardião, pode mentir.

A afirmação de Carlos: “Eduardo é o Misterioso.”

- Se Carlos é Guardião, afirmação verdadeira: $E = M$. - Se não, pode mentir.

A afirmação de Diana: “Arthur não é o Misterioso.”

- Se Diana é Guardião, essa afirmação é verdadeira: $A \neq M$. - Se não, pode mentir.

A afirmação de Eduardo: “Beatriz e Carlos não são ambos Guardiões.”

- Se Eduardo é Guardião, então B e C não são ambos Guardiões. - Se não, pode mentir.

Passo 3: Tentativa 1 — Suponha que Arthur é Guardião

Se $A = G$, então afirmação verdadeira:

$$B = M.$$

Assim, Beatriz é Misteriosa. Então, Beatriz pode mentir ou falar a verdade.

Sabemos que há 3 Guardiões, já temos 1 (Arthur) e 1 Misteriosa (Beatriz). Restam C, D, E para serem 2 Guardiões e 1 Desorientado.

Se Carlos fosse Guardião, sua afirmação que “Eduardo é Misterioso” seria verdadeira.

Mas sabemos que $B = M$, logo $E \neq M$, logo Carlos está mentindo. Logo, Carlos não pode ser Guardião.

Se Diana fosse Guardião, sua afirmação “Arthur não é Misterioso” é verdadeira. Ok, $A = G$ já assumimos. Diana pode ser Guardião.

Se Eduardo fosse Guardião, sua afirmação “Beatriz e Carlos não são ambos Guardiões”:

- Como $B = M$, Beatriz não é Guardião. - Carlos, segundo antes, não pode ser Guardião (pois mentiu). - Então Beatriz e Carlos não são ambos Guardiões, logo afirmação verdadeira. - Eduardo pode ser Guardião.

Assim, guardiões são: Arthur, Diana e Eduardo.

Misterioso: Beatriz

Desorientado: Carlos

Verificamos as mentiras e verdades:

- Arthur (Guardião): afirmação verdadeira.
 - Beatriz (Misteriosa): pode mentir ou não, afirmação: “Carlos e Diana não são ambos Guardiões.”
- Carlos é Desorientado, Diana é Guardião, logo Beatriz falou verdade.
- Carlos (Desorientado): diz “Eduardo é Misterioso”, falso pois Eduardo é Guardião. Pode mentir, ok.
 - Diana (Guardião): diz “Arthur não é Misterioso”, verdade.
 - Eduardo (Guardião): diz “Beatriz e Carlos não são ambos Guardiões”, verdade.

Tudo consistente.

Passo 4: Analisar as alternativas

- (A) Arthur é Misterioso? Não, ele é Guardião nesta hipótese.
- (B) Beatriz é Guardião? Não, é Misteriosa.
- (C) Carlos é Guardião? Não, é Desorientado.
- (D) Diana é Guardião? Sim, nesse cenário é.
- (E) Nenhuma das anteriores? Não.

Passo 5: Verificar se Diana sempre é Guardiã

Suponha outra hipótese onde Diana não seja Guardiã.

Análise similar levaria a inconsistências (exercício para o leitor).

Conclusão: A única afirmação que é sempre verdadeira é que **Diana é Guardiã**.

Resposta: Alternativa (D).

Questão 12. Ache o menor k inteiro positivo que satisfaça a seguinte propriedade:

Dado qualquer conjunto de inteiros com k elementos, existem dois tais que 2024 divide sua soma ou diferença.

- (a) 512
- (b) 1012
- (c) 1013
- (d) 1014
- (e) 2024

Proposto por Fábio Medeiros

Note que $k > 1013$ já que o conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 1011, 1012, 2024\}$ não satisfaz a condição. Vamos provar que qualquer conjunto de tamanho $k + 2$ tem dois elementos divisíveis por $2k$ e então nossa resposta será 1014.

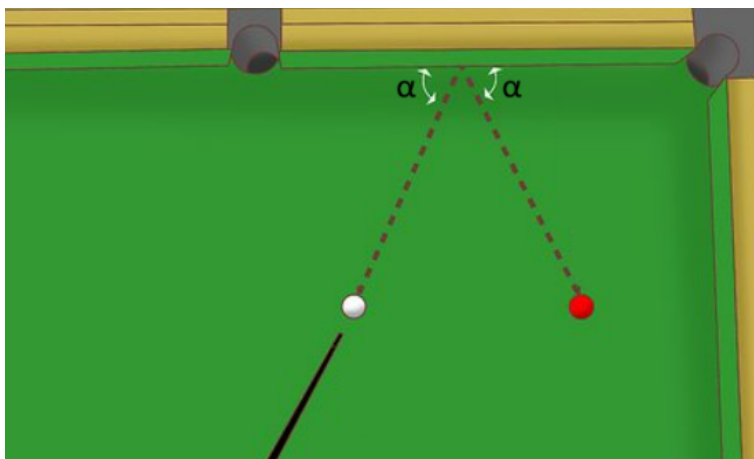
Se tivermos dois elementos congruentes mod $2k$, sua diferença será múltipla de $2k$. Então suponha que são todos incongruentes. Separe os restos mod $2k$ em $\{0\}, \{k\}, \{1, 2k - 1\}, \{2, 2k - 2\}, \dots, \{k - 1, k + 1\}$. Com $k + 2$ elementos, sabemos que pelo menos k serão distribuídos nas duplas da partição, que são $k - 1$. Por PCP, dois elementos estão na mesma dupla, logo, sua soma será múltipla de $2k$.

Resposta: Alternativa (D).

Questão 13. Uma mesa de bilhar tem formato de um quadrado $ABCD$. Uma bolinha está inicialmente no vértice A , sendo que Baianinho de Mauá tem uma missão especial: ele deve dar uma tacada nessa bolinha de modo que, após bater exatamente 2025 vezes nos lados do quadrado, ela chegue pela primeira vez a um dos vértices de $ABCD$.

Quanto são os possíveis valores do ângulo formado pelo lado AB com a trajetória inicial da bolinha para os quais Baianinho atinge seu objetivo?

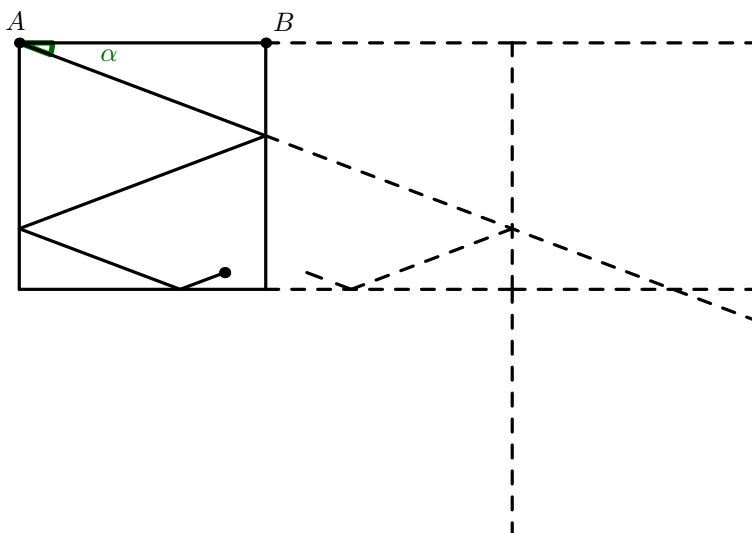
Nota. Assuma que as reflexões são perfeitas, como na figura abaixo.



- (a) 0
- (b) 1013
- (c) 2025
- (d) 2026
- (e) 4052

Proposto por Fábio Medeiros

São 2026 possíveis ângulos. Como a reflexão é perfeita, não precisamos ficar trabalhando no quadrado original, isso seria muito complicado! Podemos considerar que a bolinha segue para um quadrado imaginário em trajetória retilínea:



Assim, nosso problema se transforma em analisar tabuleiros $m \times n$. O desejo de Baianinho é acertar a bolinha do vértice A para o oposto, sendo que a bola não pode passar por nenhum ponto do quadriculado antes. Essa última condição se resume a $\text{mdc}(m, n) = 1$. Além disso, a bola deve colidir 2025 vezes com a parede, isto é, deve intersectar o reticulado 2025 vezes. Entretanto, o número de colisões é $(m-1) + (n-1) = m + n = 2027$. Assim, devemos achar a quantidade de pares (m, n) com $m + n = 2027$ e $\text{mdc}(m, n) = 1 \iff 1 = \text{mdc}(m, m+n) = \text{mdc}(m, 2027)$. Basta contar os $m < 2027$ com $\text{mdc}(m, 2027) = 1$, ou seja, queremos achar $\varphi(2027)$. Como 2027 é primo, o número de soluções é 2026.

Resposta: Alternativa (D).

Questão 14. Determine o número de pares ordenados (m, n) de inteiros positivos tais que

$$2^{n-1}n + 1 = m^2.$$

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 5

Proposto por Fábio Medeiros

Note que se $n = 1$, não existe tal m .

Para $n > 1$ temos

$$(m-1)(m+1) = m^2 - 1 = 2^{n-1}n$$

é par, logo m é ímpar. Como 4 não pode dividir $m-1$ e $m+1$ ao mesmo tempo, algum deles é $2I$ com I ímpar enquanto o outro é $2^{n-2}a$ com a inteiro. Já que $2^{n-2}a = m-1$ ou $m+1$, temos

$$2^{n-1}n = 2^{n-2}a \cdot (2^{n-2}a - 2) \text{ ou } 2^{n-2}a \cdot (2^{n-2}a + 2)$$

Em ambos os casos, segue que

$$2^{n-1}n \geq 2^{n-2} \cdot (2^{n-2} - 2) \Rightarrow 2n \geq 2^{n-2} - 2 \Rightarrow n \geq 2^{n-3} - 1$$

Entretanto, $n < 2^{n-3} - 1$ para $n \geq 6$ por indução. Assim, $n \leq 5$. Testando, a única solução é $(9, 5)$.

Resposta: Alternativa (B).

Questão 15. Um inteiro $n > 2$ é dito *show* se existem n retas em posição geral no plano de tal forma que o triângulo formado pela interseção de quaisquer 3 delas é isósceles. Determine a soma de todos os n *show*.

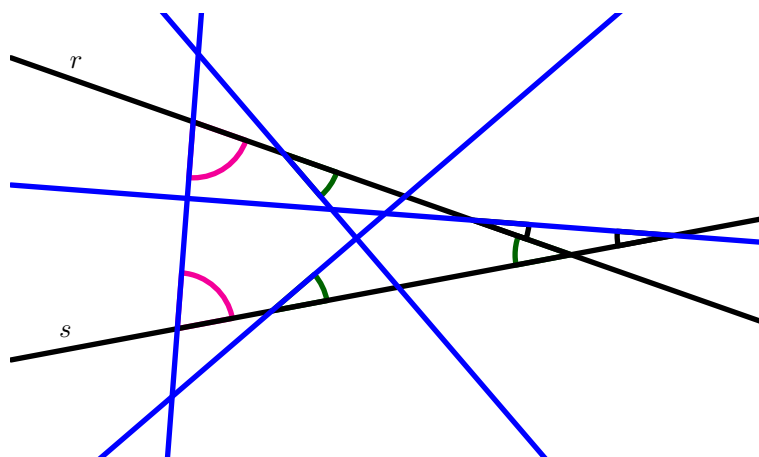
- (a) 7
- (b) 8
- (c) 9
- (d) 10
- (e) 12

Proposto por Fábio Medeiros

Os únicos n que funcionam são 3, 4 e 5. Portanto, o número buscado é 12.

Note que um pentágono regular funciona para $n = 5$, sendo que basta retirar retas para obter o exemplo para 3 e 4. Vamos provar que não existe tal conjunto de retas para qualquer $n > 5$. Basta provar que não existe para $n = 6$, pois todo conjunto com mais que isso tem um subconjunto de 6 retas.

Fixando duas retas r e s , todas as demais deverão ser como uma das seguintes azuis:



Há 4 possibilidades para uma outra reta:

- **Categoria 1)** ser paralela a alguma das bissetrizes (interna ou externa) de r e s .
- **Categoria 2)** ter o mesmo ângulo entre r e s com r ou com s .

Cada categoria tem dois tipos de reta. Note que não podemos ter duas retas do mesmo tipo já que teríamos duas paralelas, absurdo pois estão em posição geral. Suponha que existe um conjunto como no

enunciado com 6 retas. Assim, dadas as retas r e s , todas as azuis devem existir. Logo, temos duas retas perpendiculares em nosso conjunto (as da categoria 1).

Definindo essas retas como as de análise na posição r e s mostrada acima, o ângulo verde seria de 90° . Entretanto, não poderiam existir retas da categoria 2, visto que não existe triângulo isósceles com ângulo da base 90° . Portanto, o máximo de retas seria 4 nesse exemplo, e não 6.

Resposta: Alternativa (E).

Questão 16. Seja S um subconjunto de $\{1, 2, \dots, 2025\}$ tal que a diferença de quaisquer dois elementos de S não é um primo. Qual o maior tamanho possível de S ?

- (a) 498
- (b) 505
- (c) 506
- (d) 507
- (e) 512

Proposto por Fábio Medeiros

Note que $S = \{1, 5, 9, 13, \dots, 2025\}$ nos dá 507 elementos. Suponha por absurdo que dá para S ter cardinalidade 508.

Fato. Se selecionamos 3 elementos dentre 8 consecutivos, há dois com diferença prima.

Demonstração. Sejam $x, x+1, \dots, x+7$ os oito números. Sem perda, podemos supor que o primeiro número escolhido é x (estamos olhando pra diferenças, então basta transladar todos). Assim, $x+2, x+3, x+5, x+7$ não podem ser escolhidos, restando apenas $x+1, x+4, x+6$. Entretanto, a diferença de quaisquer dois deles é prima, então só podemos escolher mais um. $\square$

Olhando para a partição $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cup \dots \cup \{2017, \dots, 2024\} \cup \{2025\}$ do nosso conjunto original, pelo Fato acima, só podemos ter $2 \cdot \frac{2024}{8} + 1 = 507$ elementos.

Resposta: Alternativa (D).

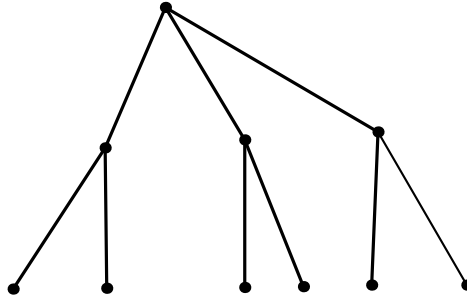
Questão 17. Todas as cidades em um certo estado são conectadas por estradas a não mais que outras três cidades. Sabendo que uma pessoa pode ir de qualquer cidade a qualquer outra usando uma ou duas estradas, qual o número máximo de cidades que esse estado pode ter?

- (a) 9
- (b) 10
- (c) 11
- (d) 12
- (e) 15

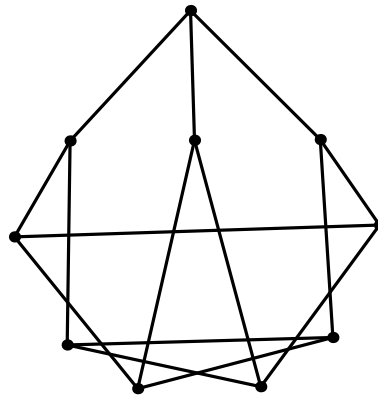
Proposto por Fábio Medeiros

Vamos analisar esse problema em formato de grafo. Fixando um vértice A , a 1ª camada são os vértices com distância 1 de A , a 2ª com distância 2. Note que não há terceira camada já que é dito no enunciado que de toda cidade chegamos a qualquer outra com 1 ou 2 passos.

Perceba que na primeira camada temos no máximo 3 vértices (já que A liga a no máximo 3). Na segunda, temos no máximo 6 já que cada um na primeira camada gera no máximo outros 2 (uma de suas 3 estradas já vai para A). Logo, a quantidade buscada é menor ou igual a 10.



Note que o seguinte exemplo funciona para 10, que é nossa resposta final.



Resposta: Alternativa (B).

Questão 18. Determine o valor da soma infinita a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

- (a) $\frac{3}{4}$
- (b) $\frac{5}{6}$
- (c) $\frac{6}{7}$
- (d) $\frac{7}{8}$
- (e) Nenhuma das anteriores

Proposto por Isabela Pires

Note que a soma é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta),$$

com $r = \frac{2}{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$. Isso pode ser resolvido utilizando a parte real da soma de uma PG complexa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - re^{i\theta}} \right).$$

Calculamos:

$$re^{i\theta} = \frac{2}{3}e^{i\pi/3} = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto:

$$1 - re^{i\theta} = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

O inverso é:

$$\frac{1}{\frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{3}{9}} = \frac{\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} \left(\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

A parte real é:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - re^{i\theta}} \right) = \frac{9}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{7}.$$

Resposta: Alternativa (C).

Questão 19. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ raízes do polinômio $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$. Determine $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}$.

- (a) $\frac{1}{6}$
- (b) $\frac{1}{3}$
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) $\frac{2}{3}$
- (e) $\frac{5}{6}$

Proposto por Fábio Medeiros

Lema. Se $r_1, r_2, \dots, r_n$ são raízes de um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e todas são não nulas, então $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n}$ são raízes de $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (invertendo-se a ordem dos coeficientes).

Demonstração. Sabemos que $P(r_i) = 0$ então $a_n r_i^n + a_{n-1} r_i^{n-1} + \dots + r_i a_1 + a_0 = 0$. Dividindo os dois lados por r_i^n obtemos que $\frac{1}{r_i}$ é raiz de Q .

Voltando ao problema, note que 0 não é raiz do polinômio do enunciado. Dessa forma, podemos aplicar o lema e concluir que $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\epsilon}$ são raízes de $-6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. Logo, pelas relações de girard, a soma desejada vale $\frac{5}{6}$.

Resposta: Alternativa (E).

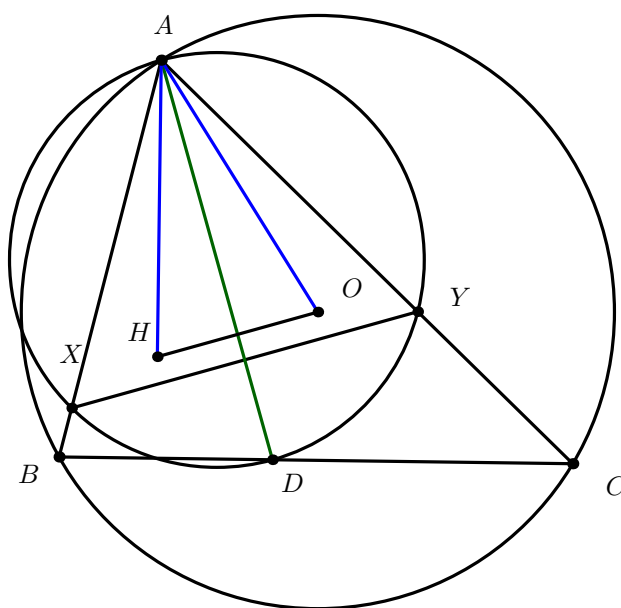
Questão 20. Seja ABC um triângulo acutângulo com bissetriz interna AD , D em BC . A circunferência de diâmetro AD intersecta AB e AC em X e Y respectivamente. Supondo que a reta XY é paralela à reta de Euler do triângulo ABC , determine a medida do ângulo $\angle BAC$.

Nota. A reta de Euler de um triângulo é a reta que passa pelo ortocentro e circuncentro do mesmo.

- (a) 30°
- (b) 45°
- (c) 60°
- (d) 75°
- (e) 90°

Proposto por Fábio Medeiros

Para valer a condição, devemos ter $\angle BAC = 60^\circ$.



Note que $DX = DY$ já que $\angle XAD = \angle DAY$. Como AD é diâmetro, então $AX = AY$ também. Assim, AD é mediatriz de XY e, em particular, perpendicular a essa reta. Portanto, para valer a suposição, devemos ter OH perpendicular à AD também. Mas em geral, sabemos que AH e AO são retas isogonais, isto é, $\angle BAH = \angle OAC$ (já que ambos equivalem a $90^\circ - B$). Portanto, para OH ser perpendicular à bissetriz sendo que H e O estão em retas isogonais, devemos ter $AH = AO$. Assim, $R = AO = AH \stackrel{*}{=} 2R \cos A \iff \cos A = \frac{1}{2} \iff A = 60^\circ$ já que o triângulo é acutângulo. Perceba que vale a volta em todos nossos argumentos, então 60° é um ângulo em que ocorre a hipótese.

★: $AH = 2R \cos A$ por lei dos senos no $\triangle ABH$: $\frac{AH}{\cos A} = \frac{AB}{\sin 180^\circ - C} = 2R \Rightarrow AH = 2R \cos A$.

Resposta: Alternativa (C).