

Homotetia

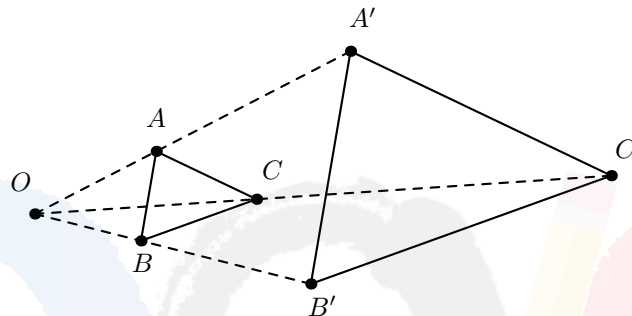
Fábio Medeiros

Esse material é composto por Teoria, Exemplos, Problemas, Dicas e Soluções. Caso você já seja experiente na matéria, sinta-se a vontade para partir direto aos problemas.

1 Homotetia

A homotetia é uma transformação geométrica poderosa que, apesar de parecer intuitiva, vai caminhar com você por quase todo problema de geometria a partir de agora.

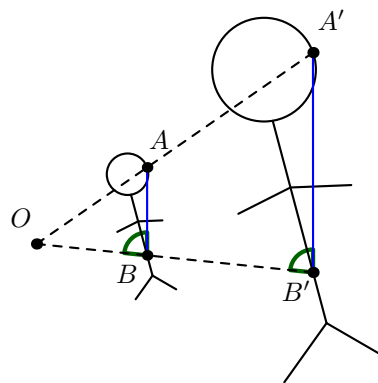
Homotetia é um caso especial de semelhança em que dilatamos uma figura por um ponto.



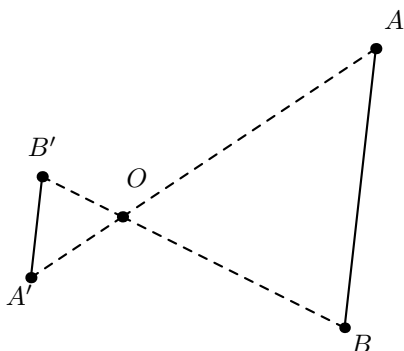
Denotamos por O o centro da nossa transformação e $k \in \mathbb{R}$ a razão. Para todo ponto A de uma figura, construímos A' como o ponto em OA com $OA' = k \cdot OA$. A' é chamado de imagem de A pela homotetia ou homotético de A . Da definição, vem um fato importante que segue do teorema de Tales:

Propriedade 1. Para dois pontos A e B com A' e B' sendo seus respectivos homotéticos, temos $AB \parallel A'B'$.

Prova: $\frac{OA'}{OA} = k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow AB \parallel A'B'$



Perceba também que k pode ser negativo. Dessa forma, adotamos distâncias orientadas (como na geometria vetorial), em que multiplicar por um negativo inverte o sentido.

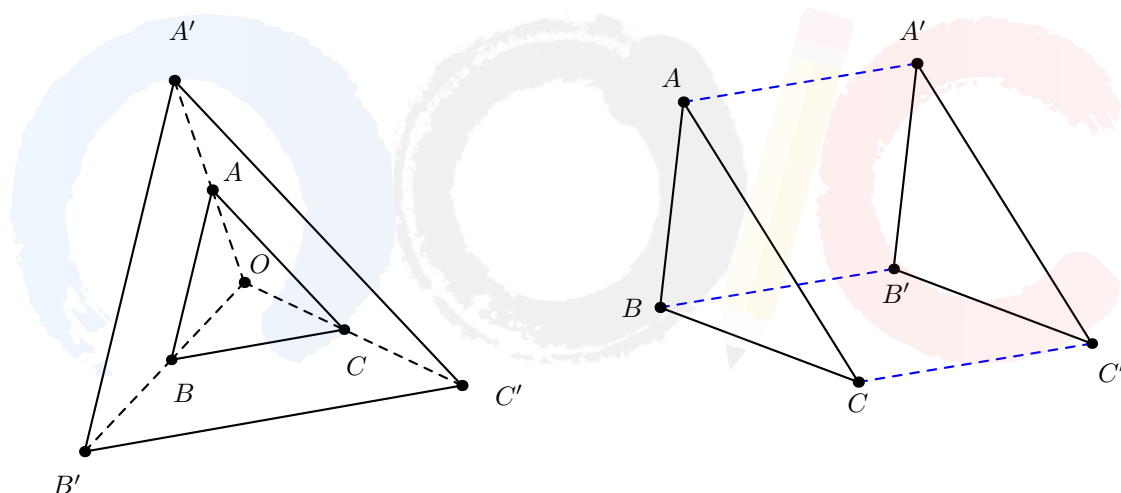


Propriedade 2. Temos $\frac{AB}{A'B'} = |k|$ (já que k pode ser negativo!).

Prova: Segue da semelhança já vista entre $\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$ com razão $|k|$.

Agora, vamos fazer o caminho inverso. Quando podemos dizer que dois triângulos são homotéticos, por exemplo? Sabemos que se fossem, todos os respectivos lados seriam paralelos. Partimos disso então!

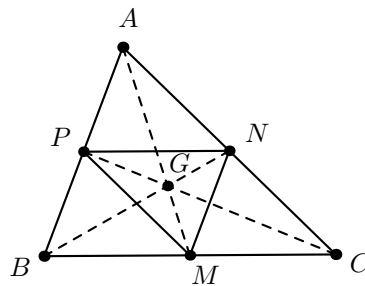
Propriedade 3. Dois triângulos com lados respectivos paralelos são homotéticos.



Prova: Como $AB \parallel A'B'$, existe uma homotetia λ com centro $O = AA' \cap BB'$ e razão k que leva AB em $A'B'$. Ainda não sabemos que λ leva C em C' . Chame a imagem de C por λ de C^* então. Sabemos que $BC \parallel B'C^*$ e que $AC \parallel A'C^*$. Como C' satisfaz a mesma coisa (está nessas duas retas paralelas), deve ocorrer $C' = C^*$. Portanto, λ leva C em C' . $\square$

Nota: um estudante atento pode perceber que a demonstração acima nem sempre está correta, já que pode ocorrer de $AA' \parallel BB'$ e então O não existe (ou estaria no infinito). Vamos estudar esse caso. Lembre que, como os lados respectivos são paralelos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (AA). Além disso, já que $AA' \parallel BB' \Rightarrow \#ABB'A'$ é um paralelogramo $\Rightarrow AB = A'B'$. Logo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Isso evidencia uma translação. Assim, podemos considerar o caso em que o centro de homotetia está no infinito como uma translação.

Exemplo: um triângulo é homotético ao seu triângulo medial.

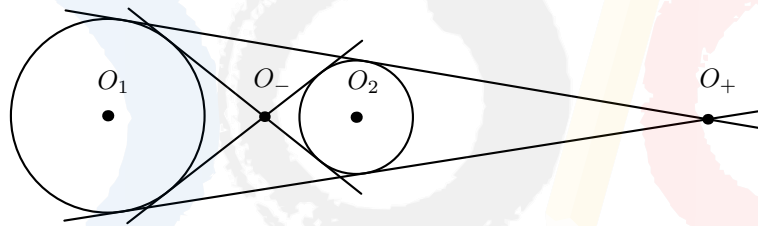


Segue do fato das bases médias serem paralelas aos lados respectivos. Note que $AM \parallel BN$, logo não caímos no caso esquisito da propriedade 3. Perceba que assim provamos que AM, BN, CP concorrem no centro da homotetia (razão $-\frac{1}{2}$). Essa é uma outra prova para a existência do baricentro.

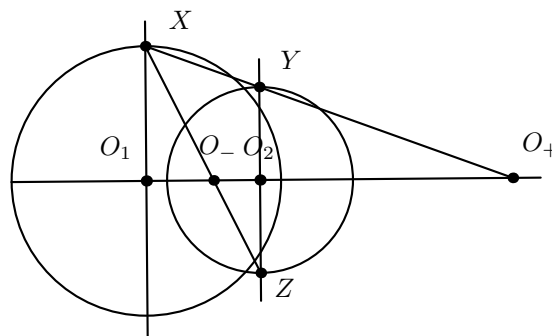
1.1 Circunferências

Um fato bastante simples sobre as circunferências é que todas são semelhantes. Dessa forma, podemos encontrar uma homotetia que leva uma em qualquer outra, ou seja, *dois círculos são sempre homotéticos*. Na maioria dos casos (quando não têm o mesmo raio ou mesmo centro), eles admitem duas homotetias, sendo uma direta (+) e uma inversa (-).

No caso em que são disjuntas, os centros de homotetia são fáceis de achar: são os encontros das tangentes comuns.

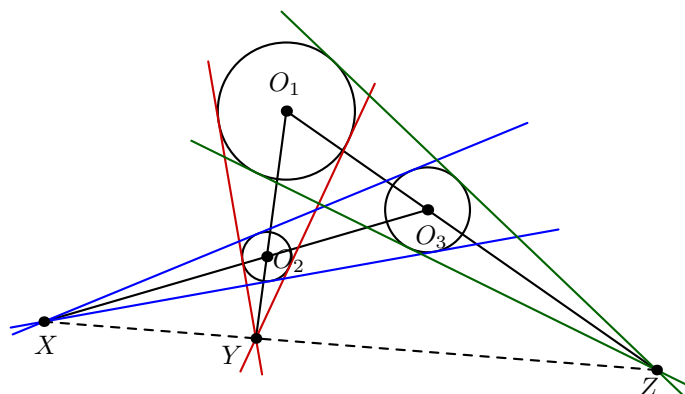


No caso geral, podemos achar os centros O_- e O_+ como na figura abaixo traçando diâmetros perpendiculares à O_1O_2 . Perceba que os centros de homotetia O^* devem estar em O_1O_2 e que $\frac{O^*O_1}{O^*O_2} = \frac{R_1}{R_2}$ seja a razão de semelhança (já que o k da nossa homotetia é a razão entre os raios). Através da construção, temos $\triangle O_+O_1X \sim \triangle O_+O_2Y$ e então vale a razão. De forma análoga, O_- satisfaz as condições. Portanto, achamos os dois centros.



Um fato notório é que O_+ e O_- dividem O_1O_2 na mesma razão: $\frac{O_1O_+}{O_2O_+} = \frac{O_1O_-}{O_-O_2}$. Quando isso ocorre, chamamos os pontos de quádrupla harmônica, mas esse assunto será mais aprofundado na parte de geometria projetiva!

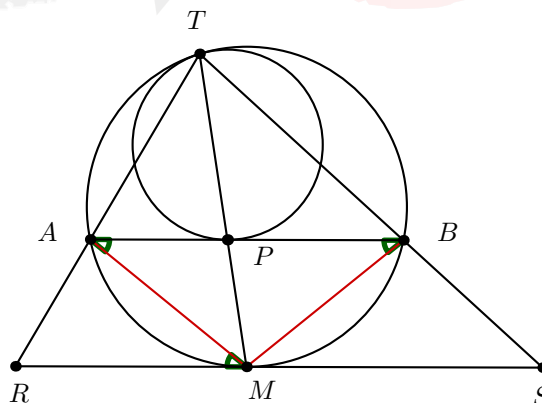
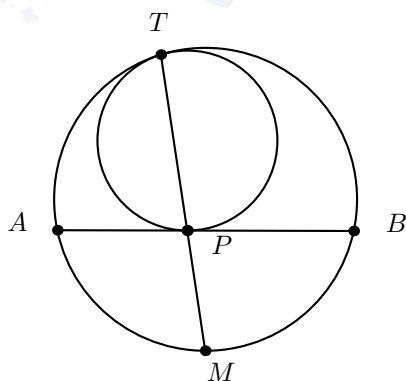
Teorema de Monge: Considere três círculos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ no plano sem duas congruentes. Para cada par de círculos, tome o encontro das tangentes externas comuns. Os três pontos encontrados são colineares.



Demonstração: Sabemos que X está em O_2O_3 , Y em O_1O_3 e Z em O_1O_2 . Como queremos provar uma colinearidade com pontos nos lados de um triângulo, menelaus será uma boa ideia! Perceba que $\frac{XO_2}{XO_3} = \frac{R_2}{R_3}$, $\frac{YO_3}{YO_1} = \frac{R_3}{R_1}$, $\frac{ZO_1}{ZO_2} = \frac{R_1}{R_2}$, sendo que o produto resulta em 1. $\square$

Nota: O teorema ainda é válido quando consideramos os centros de homotetia negativa. Mas atenção: nesse caso, devemos ter dois centros de homotetia negativa e um de homotetia positiva. Um bom jeito de lembrar é que o produto dos sinais deve ser positivo para o teorema valer!

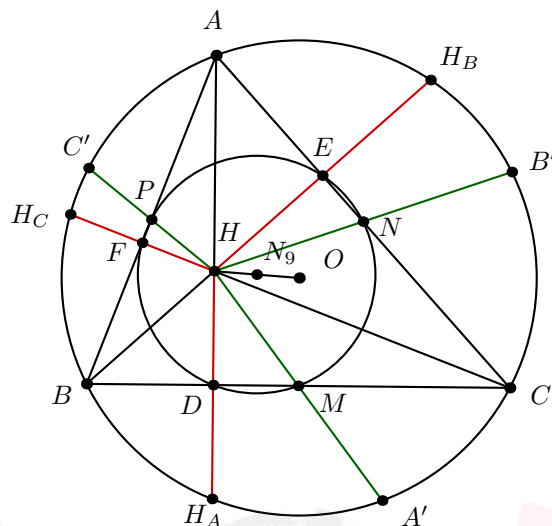
Teorema da Estrela da Morte: Sejam ω_1 e ω_2 dois círculos tangentes internamente em T com ω_2 dentro de ω_1 . Seja AB uma corda da circunferência externa tangente a ω_2 em P . Se $TP \cap \omega_1 = M$, então $MA = MB$.



Demonstração: Considere a homotetia positiva λ que leva $\omega_2 \rightarrow \omega_1$. Seu centro é T , pois está na reta que une os centros (já que ω_1 e ω_2 são tangentes) e divide o segmento na razão dos raios. Assim, o ponto P é mapeado para M . segmento AB vai para um segmento RS tangente

à ω_1 em M . Portanto, $\angle BAM = \angle AMR = \angle ABM \Rightarrow AM = BM$.

(Círculo dos Nove Pontos) Sejam H e O o ortocentro e circuncentro de um triângulo ABC . Os pés das alturas, os pontos médios dos lados, os pontos médios de AH , BH , CH são concíclicos. O centro desse círculo é o ponto médio de OH .

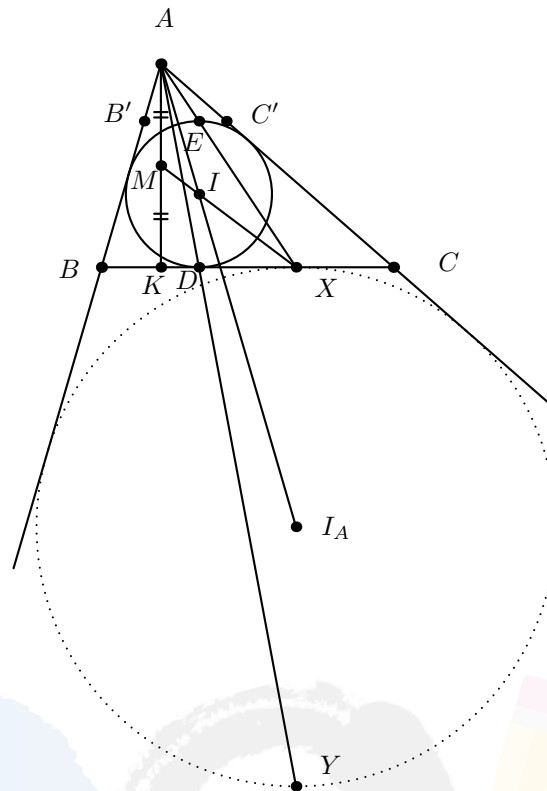


Demonstração: Temos muitas coisas relacionadas ao ortocentro e o circuncentro na figura. Relacionar O com os pés das alturas parece mais difícil do que H com os pontos médios do lado, já que lembramos da seção do Curso Noic de Pontos Notáveis. O reflexo de H por M está na circunferência do ABC (antípoda do A), além de que o reflexo de H por D também está. Logo, surge a ideia:

Tome uma homotetia com centro H e razão $\frac{1}{2}$. As antípodas de A, B, C vão aos pontos médios dos lados; os reflexos de H pelos lados vão aos pés das alturas; os vértices A, B, C vão aos pontos médios de AH, BH, CH . Assim, esses 9 pontos estão sobre a circunferência imagem de (ABC) na homotetia, sendo que o centro vai para o ponto médio de HO e o raio é $\frac{R}{2}$.

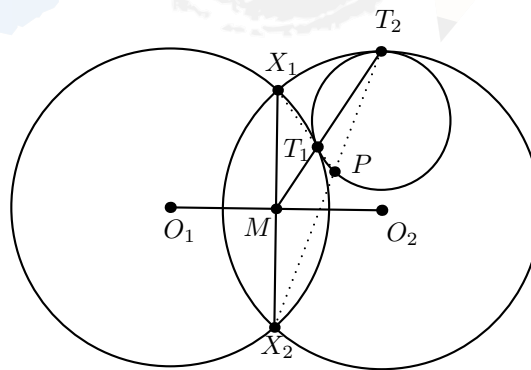
Homotetias com Incírculo-Exincírculo: (figura na próxima página) Seja ABC um triângulo com incentro I e A -exincentro I_A . Os contatos de BC com o incírculo e exincírculo são D e X . Sejam E a antípoda de D , Y a de X , K o pé da altura relativa a A e M o ponto médio de MK . Então:

- **A, E, X colineares:** a tangente ao incírculo por E intersecta AB e AC em B' e C' . Como DE é diâmetro, $B'C' \parallel BC$. Assim, há uma homotetia de centro A que leva $\triangle AB'C' \rightarrow \triangle ABC$. Como o incírculo do ABC é o exincírculo do $A'B'C'$, ele é mapeado ao exincírculo do ABC . Portanto, $E \rightarrow X \Rightarrow A, E, X$ são colineares.
- **X, I, M colineares:** I é o ponto médio de DE tanto quanto M é de AK . Como X, E, A e X, D, K são colineares, também são X, I, M pela homotetia entre os dois triângulos.
- **A, D, Y colineares:** prova análoga ao primeiro item considerando a tangente ao exincírculo por Y .
- **M, D, I_A colineares:** $XY \perp BC \perp AK \Rightarrow AK \parallel XY$; $AD \parallel DY$ (de fato, são colineares); $KD \parallel DX$ (de fato, são colineares). Logo, há uma homotetia entre $\triangle ADK \rightarrow YDX$ com centro D . Ela leva M em I_A (pontos médios) então M, D, I_A são colineares.



Nossa base já é forte para resolver problemas do assunto agora!

(EGMO 2016) Duas circunferências ω_1 e ω_2 , de raios iguais, se intersectam nos pontos X_1 e X_2 . Considere uma circunferência ω tangente externamente a ω_1 no ponto T_1 e tangente internamente a ω_2 no ponto T_2 . Prove que as retas X_1T_1 e X_2T_2 se intersectam em um ponto em ω .

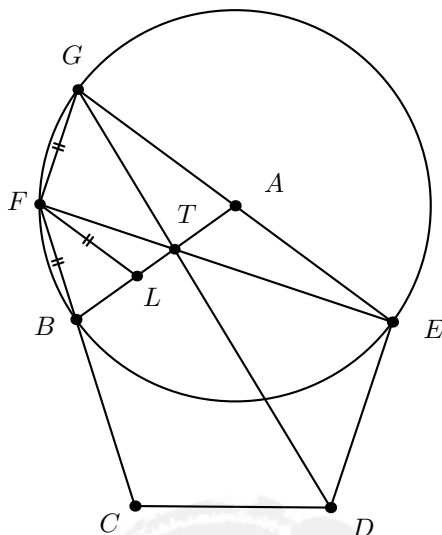


Solução. Note que T_1 é centro de homotetia negativa λ_1 de $\omega_1 \rightarrow \omega$ e T_2 da homotetia positiva λ_2 de $\omega \rightarrow \omega_2$. Portanto, o centro M de homotetia negativa λ de $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ está em T_1T_2 (Monge). Como ω_1 e ω_2 têm o mesmo raio, M é o ponto médio de O_1O_2 .

Note que $X_1 \rightarrow X_2$ por λ , então deve fazer o mesmo caminho na composição de λ_1 com λ_2 . Logo, se $X_1 \rightarrow P$ por λ_1 , então $P \rightarrow X_2$ por λ_2 . Portanto, T_2, P, X_2 são colineares tanto quanto T_1, P, X_1 . Assim as retas X_1T_1 e X_2T_2 concorrem em P que está em ω . $\square$

(TST Cone Sul 2022) Uma circunferência Γ de centro A passa pelos vértices B e E do pentágono regular $ABCDE$. A reta BC intersecta Γ novamente no ponto F . O ponto G é escolhido sobre a circunferência Γ de modo que $FB = FG$ e $B \neq G$. Prove que as retas AB , EF e DG são concorrentes.

Solução.



Com um bom desenho, parece que E, A, G são colineares. Lembrando que o ângulo de um pentágono regular vale 108° , isso é verdade já que $\angle BAG = 2\angle BAF = 2(180^\circ - 2\angle ABF) = 2(180^\circ - 2 \cdot 72^\circ) = 72^\circ$. Mas $\angle BAE = 108^\circ \Rightarrow \angle BAE + \angle GAB = 180^\circ \Rightarrow$ colineares.

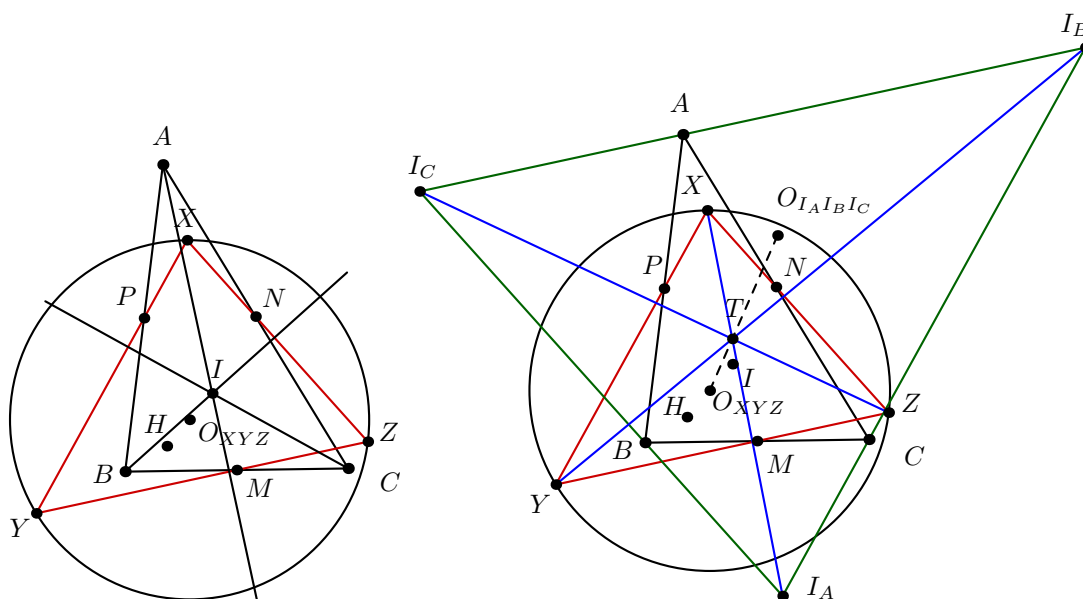
Além disso, parece que $ED \parallel FG$: $\angle GED = 108^\circ = 180^\circ - 72^\circ = 180^\circ - \angle ABF = 180^\circ - \angle AGF$.

Portanto, $GF \parallel ED$ e queremos provar uma concorrência de retas que envolve $GD \cap EF = T$. Uma homotetia parece bem oportuna aqui! Infelizmente, não parece que A e B são homotéticos para terminarmos a questão, mas podemos buscar um ponto em AB que satisfaça isso. Traçando L em AB com $AE \parallel FL$, basta $GL \parallel AD$ que então temos $\triangle GFL \rightarrow \triangle DEA$ por homotetia com centro T e então T estará em AB . Note que $\angle BFL = 72^\circ = \angle GAL = \angle FLB \Rightarrow FL = FB$. Ademais, $\angle LGA = \angle FGA - \angle FGL = \angle FBA - \angle FGL = \angle 72^\circ - (\frac{180^\circ - \angle LFG}{2}) \stackrel{FL \parallel AG}{=} \angle 72^\circ - (\frac{\angle FGA}{2}) = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ = \angle DAE$. Portanto, $GL \parallel AD$. $\square$

(OBM 2017) No triângulo ABC , seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna do $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC , respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI .

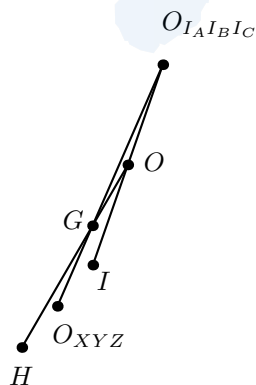
Solução. Um primeiro passo importante em qualquer área da matemática antes de querer aplicar uma técnica é entender o que está acontecendo. Deixemos o problema chamar por nossa homotetia quando fizer sentido.

O que uma reta perpendicular à bissetriz interna te lembra? Bissetriz externa! Vamos traçá-la na próxima página.



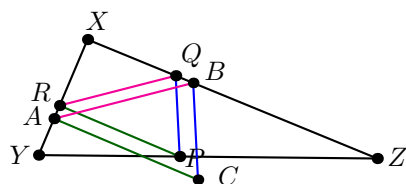
Como os lados do nosso triângulo XYZ são paralelos aos do $I_A I_B I_C$, há uma homotetia negativa λ de centro T entre esses triângulos. Ainda mais, $\triangle MPN$ e $\triangle ABC$ têm lados paralelos e têm seus pontos nos triângulos homotéticos por λ . Portanto, os próprios são homotéticos por λ ($\star$). Então sabemos quem é T : o baricentro! A razão da homotetia então é -2 .

Sabemos que λ leva $O_{XYZ} \rightarrow O_{I_A I_B I_C}$, então $O_{I_A I_B I_C}$, T , O_{XYZ} são colineares na razão $2 : 1$. Temos um ortocentro H perdido na figura e uma razão $2 : 1$ envolvendo o baricentro. A-ha! Lembrando da propriedade da reta de Euler, traçamos o circuncentro O do $\triangle ABC$. Como $\triangle ABC$ é o nove pontos do $I_A I_B I_C$, perceba que O é ponto médio do $H I_A I_B I_C = I$ e $O_{I_A I_B I_C}$. Temos tudo encaixado então para terminarmos o problema:



Queremos provar que O_{XYZ} é ponto médio de HI . Primeiramente, note que G é o baricentro do triângulo $HIO_{I_A I_B I_C}$, já que está na mediana HO e a divide na razão $2 : 1$. Como satisfaz a mesma razão na ceviana $O_{I_A I_B I_C} O_{XYZ}$, o ponto médio do lado HI deve ser O_{XYZ} . $\square$

★ Obs: Dado um $\triangle XYZ$ e pontos P, Q, R em seus lados, o $\triangle PQR$ é o único inscrito no $\triangle XYZ$ com lados das respectivas inclinações. Se existisse outro, seja $\triangle ABC$, então os dois seriam homotéticos com centro $X \Rightarrow C \notin YZ$.



Dessa forma, como $I_A I_B I_C \xrightarrow{T} XYZ$ e MPN tem lados paralelos à ABC , eles devem ser correspondentes.

1.2 Problemas

1. Duas circunferências ω_1 e ω_2 são tangentes externamente em A . Seja P o ponto de encontro de suas tangentes externas comuns. Uma reta r por P encontra ω_1 em B, C e ω_2 em D, E de modo que B, C, D, E estão nessa ordem em r . Prove que $AB \perp AD$.

2. **(Ponto de Nagel)** Sejam D, E, F os contatos de BC, CA, AB com os A -exincírculo, B -exincírculo e C -exincírculo, respectivamente. Então, temos que AD, BE, CF concorrem no ponto de nagel N do triângulo. Prove que I, G, N são colineares com razão $2 = \frac{GN}{IG}$ onde I e G são o incentro e baricentro do triângulo ABC .

3. **(Romênia TST 2013)** As circunferências Ω e ω são tangentes em um ponto P (com ω contida no interior de Ω). Uma corda AB de Ω é tangente a ω em C . A reta PC encontra novamente Ω no ponto Q . As cordas QR e QS de Ω são tangentes a ω . Sejam I, X e Y os incentros dos triângulos APB, ARB e ASB , respectivamente. Prove que $\angle PXI + \angle PYI = 90^\circ$.

4. **(OBM 2012)** Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C , e X, Y e Z os pontos médios de $I_B I_C, I_C I_A$ e $I_A I_B$, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F . Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO , sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC .

5. **(Ponto Mixtilinear)** Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC e seja ω_a a circunferência tangente aos segmentos CA e AB e à circunferência Ω . Defina ω_b e ω_c de maneira análoga. Sejam A', B' e C' os pontos de tangência de ω_a, ω_b e ω_c com Ω . Prove que as retas AA', BB' e CC' concorrem em um ponto sobre a reta OI .

6. **(OBM 2014)** Seja ABC um triângulo com incentro I e incírculo ω . A circunferência ω_A é tangente externamente a ω e tangente aos lados AB e AC em A_1 e A_2 , respectivamente. Seja r_A a reta $A_1 A_2$. Defina r_B e r_C de maneira análoga. As retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo XYZ . Prove que o incentro de XYZ , o circuncentro de XYZ e I são colineares.

7. **(USAMO 2015)** O quadrilátero $APBQ$ está inscrito em uma circunferência ω com $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ e $AP = AQ < BP$. Seja X um ponto variável no segmento PQ . A reta AX intersecta novamente ω no ponto S . O ponto T está no arco AQB da circunferência ω tal que XT é perpendicular a AX . Seja M o ponto médio da corda ST . À medida que X varia ao longo do segmento PQ , prove que M varia sobre uma circunferência.

8. **(2006 ISL G6)** As circunferências ω_1 e ω_2 , com centros O_1 e O_2 , são tangentes externamente no ponto D e são tangentes internamente a uma circunferência ω nos pontos E e F , respectivamente. A reta t é a tangente comum a ω_1 e ω_2 no ponto D . Seja AB o diâmetro de ω perpendicular a t , de modo que A, E e O_1 estejam do mesmo lado de t . Prove que as retas AO_1, BO_2, EF e t são concorrentes.

9. **(Sharygin 2025)** Seja I o incentro de um triângulo ABC . A' é o ortocentro do triângulo BIC . Defina B' e C' analogamente. Sejam M_A, M_B, M_C os pontos médios de BC, CA e AB . S_A é o ponto médio de AA' . Defina S_B e S_C analogamente. Prove que as retas $M_A S_A, M_B S_B$ e $M_C S_C$ são concorrentes.

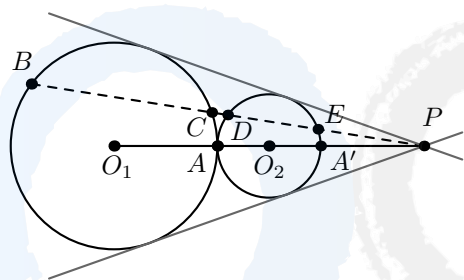
10. **(IMO 2011)** Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncírculo Γ . Seja ℓ uma reta tangente a Γ , e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas refletindo ℓ nas retas BC, CA e AB , respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente a Γ .

1.3 Dicas

1. Considere a homotetia por P que leva $\omega_1 \rightarrow \omega_2$. Para onde vai o A ?
2. Considere a homotetia por G de razão -2 .
3. Pelo lema da estrela da morte $QA = QB$. Lembre-se que isso também vale QX, QY, QI .
4. Os triângulos DEF e XYZ são homotéticos.
5. Aplique o Teorema de Monge.
6. XYZ é homotético ao triângulo de contato do incírculo. Também considere o triângulo formado pelas tangentes comuns entre ω, ω_a e as análogas.
7. Deixe a figura simétrica: considere $Y = AT \cap PQ$. Foque no triângulo AST .
8. Prove que E, B, D são colineares. Considere também o reflexo de T por AE .
9. Prove que S_B, M_A, S_C são colineares. Se lembre do Exemplo **OBM 2017**.
- 10.1 Seja XYZ o triângulo formado pelas retas. Descubra os ângulos desse triângulo. Prove que AX é bissetriz de $\angle YXZ$.
- 10.2 Suponha que o problema é verdade. Então as duas circunferências são homotéticas pelo ponto de tangência. Descubra algo sobre os pontos que estão no (ABC) e são homotéticos ao XYZ .

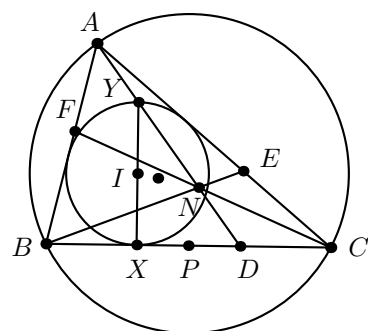
1.4 Soluções:

Problema 1.

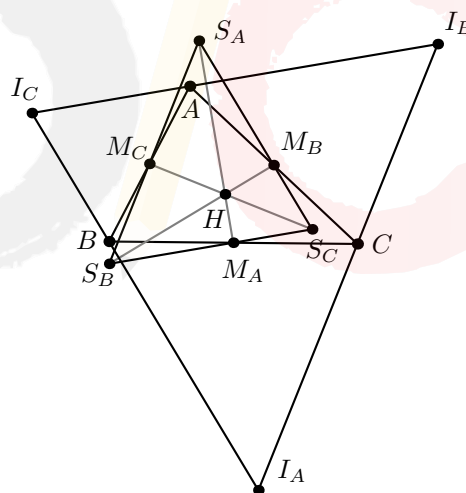


Note que P é o centro da homotetia positiva de $\omega_1 \rightarrow \omega_2$. Nessa transformação, sabemos que $B \rightarrow D$ e $A \rightarrow A'$. Como $AB \parallel A'B' = A'D$, basta provar que $AD \perp A'D$. Entretanto, isso é verdade já que AA' é diâmetro em $\omega_2 \Rightarrow \angle ADA' = 90^\circ$.

Problema 2.

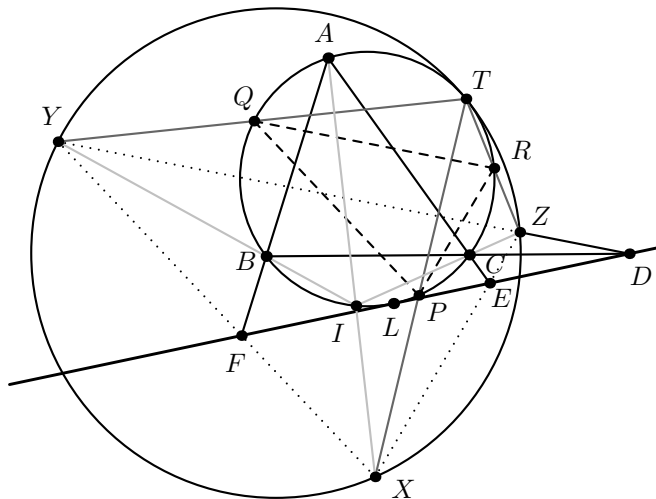


Provar que N existe não é nosso foco aqui (imediato por Ceva). Sendo X o contato do incírculo com BC e Y sua antípoda, sabemos que A, Y, D são colineares. Além disso, IP é base média do $\triangle XYD$. Logo $IP \parallel AN$. Agora considere uma homotetia por G com razão -2 . Sabemos que P vai para A e I para um N' e que $AN' \parallel IP$. Assim, AN' é a mesma reta que AN . Como vale o mesmo para as outras retas e elas concorrem em N , temos que $N = N'$. $\square$



Página 13

Problema 10.



Seja XYZ o triângulo formado. Primeiramente, lembre que ao refletir uma reta s por uma reta r , r será bissetriz de s e s' . Logo, vale a pena considerar a interseção de r com s .

É isso que faremos: sejam D, E, F as interseções de ℓ com BC, CA, AB . Dessa forma, perceba que AB é bissetriz de $\angle EFX$ e AC de $\angle FEZ$. Assim, A é exincentro do $\triangle XEF \Rightarrow AX$ é bissetriz de $\angle YXZ$. Analogamente, BY e CZ são bissetrizes no triângulo XYZ . Além disso, $\angle X = \angle FXE = \angle YFE + \angle ZEF - 180^\circ = 2\angle EFA + 2\angle AEF - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle FAE) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle A$. Ademais, o incentro I do $\triangle XYZ$ está em Γ já que $\angle BIC = \angle YIZ = 90^\circ + \frac{\angle X}{2} = 180^\circ - \angle A$.

Uma boa ideia sempre que queremos provar que dois círculos ω_1 e ω_2 são tangentes é achar dois triângulos, cada um inscrito em uma das circunferências, que são homotéticos por um ponto T . Se provarmos que T está em alguma circunferência dentre ω_1 e ω_2 , estará em ambas já que a homotetia leva $\omega_1 \rightarrow \omega_2$. Ademais, se duas circunferências se intersectam em um ponto T que é centro de homotetia entre ambas, então elas são tangentes e concluiríamos o problema.

Vamos achar um triângulo que está no $\Gamma = (ABC)$ e é homotético ao XYZ . Para isso, supomos que o problema já está resolvido e intersectamos TX, TY, TZ com Γ gerando P, Q, R . Vamos descobrir quem são esses pontos para fazermos o caminho inverso e resolvermos o problema.

Pela homotetia, $YZ \parallel QR \Rightarrow \angle(YZ, \ell) = \angle(QR, \ell)$. Sabemos que $\angle(YZ, \ell) = \angle YDL = 2\angle BDL = BL - LC$ e, similarmente, $\angle(QR, \ell) = \frac{QL - LR}{2} \Rightarrow BL - LC = \frac{QL - LR}{2}$. Entretanto, sabemos que

$$BL + LC = 2\angle A \Rightarrow BL - LC = 2\angle A - 2LC$$

$$QL + LR = 4\angle A \Rightarrow \frac{QL - LR}{2} = 2\angle A - LR$$

(onde a segunda é válida já que $\angle RPQ = \angle ZXY = 180^\circ - 2\angle A$). Logo, $\angle 2A - 2LC = \angle 2A - LR \Rightarrow LR = 2LC \Rightarrow LC = CR \Rightarrow CL = CR$. Analogamente, $AL = AP$ e $BL = BQ$. Então já sabemos quem são os pontos espertos e podemos escrever uma solução.

Solução. Considere os pontos P, Q, R na circunferência Γ de modo que $AP = AL, BQ = BL, CR = CL$. Perceba que $QR \parallel YZ$ já que $\angle(YZ, \ell) = BL - LC = \frac{2BL - 2LC}{2} = \frac{QL - LR}{2} = \angle(QR, \ell)$. Analogamente, os outros lados são paralelos e $\triangle PQR \rightarrow \triangle XYZ$ por homotetia através de um ponto T . Agora vamos provar que T está em Γ para concluir o problema. O reflexo de L' de L por BC' está em ℓ_a e portanto em YZ . Ademais, $\angle BCL' = \angle BCL = \angle BCQ \Rightarrow L' \in CQ$. Analogamente, $L' \in BR$. Pela volta do teorema de pascal, sabemos que $RTQCIB$ devem ser concíclicos já que $RT \cap CI = Z, TQ \cap IB = Y, QC \cap BR = L'$ são colineares. Portanto, $T \in \Gamma$ e então os círculos são tangentes em T . $\square$