



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental

1ª Fase - 20 e 21 de setembro de 2025

Nome: _____

Série: _____

Jayme Tiomno
Nível Aberto
Português

Instruções de Prova

- I. Esta prova contém **20** questões.
- II. Cada questão tem 5 alternativas de resposta e apenas uma delas é correta.
- III. A duração máxima desta prova é de **quatro horas**. Além do tempo de prova, serão concedidos **5 minutos** correspondentes ao preenchimento online do gabarito.
- IV. É permitido o uso de calculadoras.
- V. A prova deve ser feita individualmente e não é permitido falar sobre a solução das questões durante o período de aplicação da prova **dias 20 e 21 de setembro de 2025**.
- VI. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10 \text{ m/s}^2$; calor específico da água líquida $c_a = 1 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$; calor latente de fusão do gelo $L = 80 \text{ cal/g}$; $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ J}$; densidade da água líquida $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$.

Apoio:



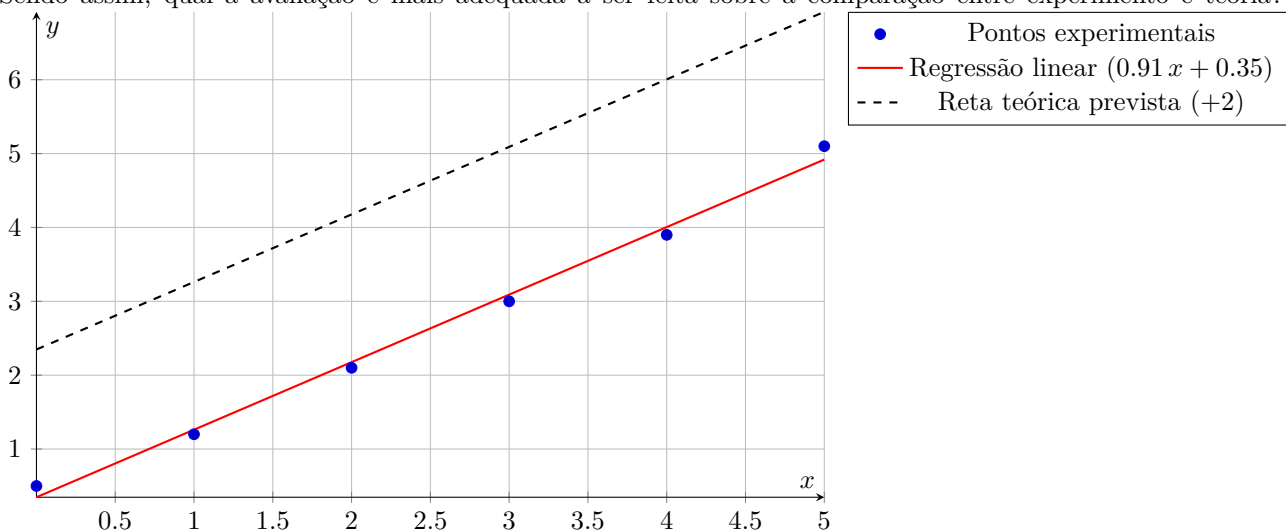


Curiosidades:

Jayme Tiomno (Rio de Janeiro, 16 de abril de 1920 – Rio de Janeiro, 12 de janeiro de 2011) foi um proeminente físico teórico brasileiro, reconhecido internacionalmente por suas contribuições à física de partículas. Foi um dos fundadores do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e membro da Academia Brasileira de Ciências. Seus trabalhos sobre interações fracas, realizados em colaboração com gigantes como John Wheeler, foram pioneiros e levaram à proposição da universalidade da interação fraca, um conceito fundamental para o Modelo Padrão. Recebeu a Grã-Cruz da Ordem Nacional do Mérito Científico e é lembrado por sua atuação decisiva na formação de novas gerações de físicos e na consolidação da física teórica no Brasil.



Questão 1. Ao realizar um experimento, Mary decidiu registrar seus dados em um gráfico e comparar seus dados com a reta prevista teoricamente. Aqui está uma foto do gráfico de Mary junto com a reta teórica: Sendo assim, qual a avaliação é mais adequada a ser feita sobre a comparação entre experimento e teoria?



- a) Parece que o experimento sofre principalmente de erro aleatório, já que a reta de regressão está bem distante da reta teórica, apesar da distribuição dos pontos estar bem consistente (gerando um desvio padrão baixo).
- b) Parece que o experimento sofre principalmente de erro sistemático, já que a reta de regressão está bem distante da reta teórica, apesar da distribuição dos pontos estar bem consistente (gerando um desvio padrão baixo).
- c) Parece que o experimento sofre principalmente de erro aleatório, já que a distribuição de dos dados está bem inconsistente (gerando um desvio padrão elevado).
- d) Parece que o experimento sofre principalmente de erro sistemático, já que a distribuição de dos dados está bem inconsistente (gerando um desvio padrão elevado).
- e) A comparação entre teoria e experimento mostra que ambos concordam perfeitamente, não havendo nenhuma forma de erro relevante.

Solução: Vamos analisar as características do gráfico:

- **Distribuição dos pontos:** Os pontos experimentais (azuis) estão muito próximos da sua própria reta de regressão (vermelha). Isso indica que as medidas foram consistentes entre si, com pouca dispersão. Portanto, o **erro aleatório é baixo**.
- **Comparação com a teoria:** A reta de regressão (vermelha) está sistematicamente deslocada em



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental



relação à reta teórica (preta tracejada). Elas têm inclinações semelhantes, mas a reta experimental está consistentemente abaixo da teórica. Este tipo de desvio constante é a definição de um **erro sistemático**.

A alternativa (b) descreve perfeitamente essa situação: um erro sistemático (que afasta a reta experimental da teórica) e uma distribuição consistente (baixo erro aleatório). **Item B**

Texto para as questões 2 e 3: Jabriel Gemétrio fez um experimento de um circuito RC e registrou seus dados em uma tabela. Infelizmente, Jabriel é muito desastrado e acaba derrubando sua tinta preta de polvo que guardava em casa em alguns dados na tabela. Por questão de facilidade, a tais dados apagados foram chamados de letras e estão na tabela a seguir:

Dica: Sabe-se que, em um circuito RC: $V = V_0 e^{-t/\tau}$, onde $\tau = RC$.

Tabela 1: Medições de voltagem $V(t)$ ao longo do tempo com incertezas.

Medida	Tempo $t \pm \Delta t$ (s)	Voltagem $V \pm \Delta V$ (V)
1	0.00 ± 0.05	5.00 ± 0.05
2	0.50 ± 0.05	3.80 ± 0.05
3	1.00 ± 0.05	$A \pm 0.05$
4	1.50 ± 0.05	2.20 ± 0.05
5	2.00 ± 0.05	1.65 ± 0.05
6	2.50 ± 0.05	1.25 ± 0.05
7	3.00 ± 0.05	0.95 ± 0.05
8	3.5 ± 0.05	0.72 ± 0.05
9	4.00 ± 0.05	$B \pm 0.05$
10	4.50 ± 0.05	0.42 ± 0.05

Questão 2. Por meio de uma regressão com os dados plotados, determine os valores aproximados de τ e V_0 .

- a) $\tau = 1,21$ s e $V_0 = 4,99$ V
- b) $\tau = 1,41$ s e $V_0 = 4,9$ V
- c) $\tau = 1,00$ s e $V_0 = 4,99$ V
- d) $\tau = 1,21$ s e $V_0 = 4,9$ V
- e) $\tau = 1,81$ s e $V_0 = 4,99$ V

Solução: Podemos linearizar a função por meio de logaritmos:

$$\ln(V) = \ln(V_0) - \frac{t}{\tau}$$

Reorganizando para a forma $y = a + bx$, temos $\ln(V)$ como y e t como x . O coeficiente angular será $b = -1/\tau$ e o linear será $a = \ln(V_0)$. Realizando uma regressão linear com os pontos $(t, \ln(V))$ disponíveis, encontramos os coeficientes da reta. A partir deles:

$$\tau = -1/b \approx 1,81 \text{ s}$$

$$V_0 = e^a \approx 4,99 \text{ V}$$

Item E



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental



Questão 3. Descubra os valores esperados dos dados A e B, utilizando a sua resposta do item anterior.

- a) $A \approx 2,18 \text{ V}$ e $B \approx 0,18 \text{ V}$
- b) $A \approx 2,41 \text{ V}$ e $B \approx 0,29 \text{ V}$
- c) $A \approx 1,84 \text{ V}$ e $B \approx 0,09 \text{ V}$
- d) $A \approx 2,14 \text{ V}$ e $B \approx 0,18 \text{ V}$
- e) $A \approx 2,88 \text{ V}$ e $B \approx 0,55 \text{ V}$

Solução: Agora que temos os valores de τ e V_0 , podemos usar a equação do circuito RC:

$$V(t) \approx 4,99 \cdot e^{-t/1,81} \text{ V}$$

Para o dado A, $t = 1,00 \text{ s}$:

$$A = V(1,00) \approx 4,99 \cdot e^{-1,00/1,81} \approx 2,88 \text{ V}$$

Para o dado B, $t = 4,00 \text{ s}$:

$$B = V(4,00) \approx 4,99 \cdot e^{-4,00/1,81} \approx 0,55 \text{ V}$$

Item E

Questão 4. Esmeralda está jogando um jogo eletrônico sobre capturar monstros. Um dia, ela captura um Bulcaroma pela primeira vez, que tinha uma altura de $h_0 = 2,33 \text{ m}$. Ela acredita ser raro por ter uma altura maior que o normal daquela espécie. Então, para verificar se a mesma está certa, ela decide capturar vários outros monstros da mesma espécie e registrar suas alturas na tabela:

Tabela: Alturas registradas por Esmeralda

h(m)
2,33
1,98
1,95
1,90
2,20
2,15
2,50
2,24
2,30
2,32
2,21

Esmeralda considera seu Bulcaroma original raro se sua altura for $h_0 > h_{\text{medio}} + \sigma_h$, onde h_{medio} é a média das alturas de todos os monstros capturados daquela espécie por ela e σ_h o desvio padrão amostral considerando todas as alturas. Sendo assim, selecione a alternativa correta.

- a) O Bulcaroma original é raro, já que $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h + 0,04$.
- b) O Bulcaroma original é raro, já que $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h + 0,08$.
- c) O Bulcaroma original não é raro, já que $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h - 0,04$.
- d) O Bulcaroma original não é raro, já que $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h - 0,08$.
- e) O Bulcaroma original não é raro, já que $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h$.



Solução: Primeiro, calculamos a média (h_{medio}) de todas as 11 alturas:

$$h_{\text{medio}} = \frac{2,33 + 1,98 + 1,95 + 1,90 + 2,20 + 2,15 + 2,50 + 2,24 + 2,30 + 2,32 + 2,21}{11} \approx 2,19 \text{ m}$$

Em seguida, o desvio padrão amostral (σ_h):

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{\sum (h_i - h_{\text{medio}})^2}{n - 1}} \approx 0,18 \text{ m}$$

Agora, verificamos a condição de raridade: $h_0 > h_{\text{medio}} + \sigma_h$.

$$h_{\text{medio}} + \sigma_h \approx 2,19 + 0,18 = 2,37 \text{ m}$$

Como $h_0 = 2,33 \text{ m}$, a condição $2,33 > 2,37$ é falsa. O Bulcaroma não é raro. A diferença é:

$$h_0 - (h_{\text{medio}} + \sigma_h) \approx 2,33 - 2,37 = -0,04 \text{ m}$$

Portanto, $h_0 \approx h_{\text{medio}} + \sigma_h - 0,04$.

Item C

Leia o texto a seguir para as próximas duas questões: É bem comum que, em jogos eletrônicos, um certo personagem precise de uma certa quantidade de "experiência" (cujo valor vamos chamar de E) para subir um "nível" (que vamos chamar de N). Porém, é também comum que a quantidade de experiência necessária para subir um nível cresça com o passar dos níveis. Suponha um jogo cujo E depende de N, aproximadamente, na forma $E = A2^{BN}$ (onde E é a experiência necessária para chegar no nível $N + 1$). Nele, um jovem registra os seguintes dados:

Tabela: Valores de E para cada N

N	E
1	2
2	5
3	9
4	18
5	37
6	74
7	150
8	290
9	590
10	1170

Questão 5. Determine o valor aproximado dos coeficientes A e B:

- a) $A = 1,11$ e $B = 1,01$
- b) $A \approx 0,159$ e $B = 1,01$
- c) $A = 1,50$ e $B = 1,50$
- d) $A = 0,30$ e $B = 1,01$
- e) $A = 1,23$ e $B = 1,01$



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental



Solução: Podemos linearizar a função aplicando $\log_2$ em ambos os lados:

$$\log_2(E) = \log_2(A \cdot 2^{BN}) = \log_2(A) + BN$$

Esta é uma equação da reta $y = a + bx$, onde $y = \log_2(E)$, $x = N$, $a = \log_2(A)$ (coeficiente linear) e $b = B$ (coeficiente angular). Fazendo uma regressão linear com os pontos $(N, \log_2(E))$, obtemos $a \approx 0,149$ e $b \approx 1,01$. Assim:

$$B = b \approx 1,01$$

$$\log_2(A) = a \implies A = 2^a \approx 2^{0,149} \approx 1,11$$

Item A

Questão 6. Escolha a opção que mais se aproxima da quantidade de experiência necessária para que o personagem suba do nível 11 até o nível 15. Use os valores da sua resposta do item anterior.

- a) 17400.
- b) 27400.
- c) 37400.
- d) 47400.
- e) 57400.

Solução: A experiência necessária para ir do nível 11 ao 15 é a soma da experiência para atingir os níveis 12, 13, 14 e 15. A experiência para atingir o nível $N + 1$ é dada por $E(N) = A \cdot 2^{BN}$. Usando $A = 1,11$ e $B = 1,01$:

$$E_{\text{total}} = E(11) + E(12) + E(13) + E(14)$$

$$E_{\text{total}} = 1,11 \cdot (2^{1,01 \cdot 11} + 2^{1,01 \cdot 12} + 2^{1,01 \cdot 13} + 2^{1,01 \cdot 14}) = 37380 \approx 37400$$

Item C

Questão 7. George decide tirar medições de uma quantidade que segue a função $y = A^{Bx}$. Porém, na hora de fazer um gráfico sobre suas medidas, o mesmo ficou em dúvida sobre o que ele deveria fazer para criar um gráfico linear. Sendo assim, selecione a alternativa correta.

- a) George pode simplesmente colocar pontos (x, y) em um gráfico comum para obter um gráfico linear.
- b) George pode colocar pontos $(\log(x), \log(y))$ em um gráfico comum ou usar registrar os pontos (x, y) em um gráfico dilog.
- c) George pode colocar pontos $(\log(x), \log(y))$ em um gráfico comum ou usar registrar os pontos (x, y) em um gráfico monolog.
- d) George pode colocar pontos $(x, \log(y))$ em um gráfico comum ou usar registrar os pontos (x, y) em um gráfico dilog.
- e) George pode colocar pontos $(x, \log(y))$ em um gráfico comum ou usar registrar os pontos (x, y) em um gráfico monolog.



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental



Solução: Para linearizar a função $y = A^{Bx}$, podemos aplicar o logaritmo em qualquer base. Usando a base 10:

$$\log(y) = \log(A^{Bx}) = Bx \cdot \log(A)$$

Reagrupando os termos:

$$\log(y) = (B \cdot \log(A)) \cdot x$$

Esta é uma equação da forma $Y = mX$, onde $Y = \log(y)$ e $X = x$. A relação é linear entre $\log(y)$ e x . Portanto, George deve plotar pontos $(x, \log(y))$ em um gráfico comum. Um gráfico que usa uma escala logarítmica para um eixo (o eixo y, neste caso) e uma escala linear para o outro (eixo x) é chamado de gráfico monolog (ou semi-log).

Item E

Leia o texto a seguir para as próximas 3 questões: Em um movimento de queda livre com resistência do ar, a aceleração de um objeto pode ser aproximada como: $a = Ae^{-Bt}$. Curioso, um jovem registra medições sobre este movimento em uma tabela:

Tabela: Dados do movimento de queda

t s	a m/s ²
0,00	9,80
0,500	3,70
1,00	1,40
1,50	0,500
2,00	0,200
2,50	0,0700
3,00	0,0300

Questão 8. Selecione a alternativa com os valores aproximados de A e B.

- a) $A = 8,68$ e $B = 0,95$
- b) $A = 9,68$ e $B = 1,95$
- c) $A = 10,7$ e $B = 2,95$
- d) $A = 11,7$ e $B = 3,95$
- e) $A = 12,7$ e $B = 4,95$

Solução: Linearizando a equação $a = Ae^{-Bt}$, aplicamos o logaritmo natural:

$$\ln(a) = \ln(A) - Bt$$

Esta é uma equação da reta $y = c - Bx$, onde $y = \ln(a)$, $x = t$, e $c = \ln(A)$ é o coeficiente linear. Fazendo a regressão linear dos dados $(t, \ln(a))$, obtemos um coeficiente linear $c \approx 2,27$ e um coeficiente angular de aproximadamente $-1,95$. Portanto:

$$B \approx -(-1,95) = 1,95 \text{ s}^{-1}$$

$$\ln(A) = c \approx 2,27 \implies A = e^{2,27} \approx 9,68 \text{ m/s}^2$$



Olimpíada Brasileira Online de Física Experimental



Item B

Questão 9. Registre o valor aproximado da incerteza de B.

- a) $\sigma_B = 0,5$
- b) $\sigma_B = 0,2$
- c) $\sigma_B = 0,02$
- d) $\sigma_B = 0,09$
- e) $\sigma_B = 0,9$

Solução: A incerteza do coeficiente angular (b) de uma regressão linear pode ser estimada pela fórmula:

$$\sigma_b = |b| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N - 2}}$$

Onde b é o coeficiente angular, r é o coeficiente de correlação e N é o número de pontos. Ao realizar a regressão linear com os dados, encontramos $b \approx -1,95$, $N = 7$ e um coeficiente de correlação r muito próximo de -1 (por exemplo, $r^2 \approx 0,999$).

Substituindo os valores, encontramos $\sigma_b \approx 0,02$. Como $B = -b$, a incerteza é a mesma: $\sigma_B = \sigma_b \approx 0,02$.

Item C

Questão 10. De acordo com o valor do coeficiente de correlação dos dados, o jovem avalia a precisão do modelo da seguinte forma: Impreciso: $r^2 \leq 0,97$

Pouco preciso: $0,97 < r^2 \leq 0,98$

Preciso: $0,98 < r^2 \leq 0,99$

Muito preciso: $r^2 > 0,99$

Sendo assim, como o modelo é classificado de acordo com o modelo do jovem? Lembre-se de usar algarismos significativos corretamente.

- a) Impreciso.
- b) Pouco preciso.
- c) Preciso.
- d) Muito preciso.
- e) É impossível saber.

Solução: Realizando a regressão linear nos dados linearizados ($t, \ln(a)$), o coeficiente de determinação (r^2) é calculado. O valor obtido é aproximadamente $r^2 \approx 0,999$. De acordo com a classificação fornecida, como $0,999 > 0,99$, o modelo é classificado como "Muito preciso".

Item D

Leia o texto a seguir para as próximas três questões: Totomelli registra os seguintes dados sobre algumas quantidades: $A = 0,40$; $B = 0,11$; $C = 0,234$; $D = 0,0532$. Porém, o mesmo quer calcular as quantidades: $E = A + B - C + D$; $F = \frac{B+D}{A+C}$.

Questão 11. Com quantos algarismos significativos ficarão E e F? Neste item, considere que todas as quantidades possuem incertezas desprezíveis.



- a) E: 2. F: 2.
- b) E: 4. F: 4.
- c) E: 1. F: 2.
- d) E: 2. F: 4.
- e) E: 1. F: 1.

Solução: Para determinar o número de algarismos significativos, aplicamos as regras de operações, considerando a premissa de que $A = 0,40$.

- **Para a variável E ($A + B - C + D$):** A regra para adição/subtração determina que o resultado deve ter o mesmo número de casas decimais que o termo menos preciso.
 - $A = 0,40$ (2 casas decimais)
 - $B = 0,11$ (2 casas decimais)
 - $C = 0,234$ (3 casas decimais)
 - $D = 0,0532$ (4 casas decimais)

Os termos menos precisos são agora A e B , ambos com duas casas decimais (centésimos). Portanto, o resultado final de E deve ser arredondado para a casa dos centésimos, resultando em um número com **2 algarismos significativos** (na forma $0,xx$).

- **Para a variável F ($\frac{B+D}{A+C}$):** A regra para divisão afirma que o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos do termo com a menor quantidade. Primeiro, determinamos os algarismos dos termos intermediários.
 - **Numerador ($B + D$):** Na soma $0,11 + 0,0532$, o resultado deve ser arredondado para 2 casas decimais (segundo $B = 0,11$). Um número como $0,xx$ possui **2 algarismos significativos**.
 - **Denominador ($A + C$):** Na soma $0,40 + 0,234$, o resultado deve ser arredondado para 2 casas decimais (segundo $A = 0,40$). Um número como $0,xx$ possui **2 algarismos significativos**.

Na divisão final, como ambos os termos (numerador e denominador) possuem 2 algarismos significativos, o resultado também deve ter **2 algarismos significativos**.

Portanto, tanto E quanto F devem ser expressos com 2 algarismos significativos.

Item A

Questão 12. Somente neste item, sabe-se que as incertezas $\sigma_A = 0,04$, $\sigma_B = 0,01$, $\sigma_C = 0,02$ e $\sigma_D = 0,005$, que são, respectivamente, as incertezas de A, B, C e D. Calcule o valor de E junto com sua incerteza.

- a) $0,3292 \pm 0,065$
- b) $0,329 \pm 0,046$
- c) $0,33 \pm 0,05$
- d) $0,33 \pm 0,1$
- e) $0,33 \pm 0,07$

Solução: Primeiro, calculamos o valor de E:

$$E = A + B - C + D = 0,4 + 0,11 - 0,234 + 0,0532 = 0,3292$$



Para a incerteza em somas e subtrações, propagamos os erros em quadratura:

$$\sigma_E = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2} = \sqrt{(0,04)^2 + (0,01)^2 + (0,02)^2 + (0,005)^2}$$

$$\sigma_E = \sqrt{0,0016 + 0,0001 + 0,0004 + 0,000025} = \sqrt{0,002125} \approx 0,04609$$

A incerteza deve ser arredondada para um ou dois algarismos significativos. Arredondando para um, $\sigma_E \approx 0,05$. O valor de E deve ser arredondado para a mesma casa decimal da incerteza (centésimos).

$$E \approx 0,33$$

O resultado final é $E = 0,33 \pm 0,05$.

Item C

Questão 13. Apenas neste item, sabe-se que a incerteza de F é $\sigma_F = 0,03$. Sendo assim, calcule o valor de F junto com a sua incerteza.

- a) $0,2667 \pm 0,03$
- b) $0,2574 \pm 0,03$
- c) $0,27 \pm 0,03$
- d) $0,26 \pm 0,03$
- e) $0,30 \pm 0,03$

Solução: Primeiro, calculamos o valor de F:

$$F = \frac{B + D}{A + C} = \frac{0,11 + 0,0532}{0,4 + 0,234} = \frac{0,1632}{0,634} \approx 0,257413...$$

A incerteza é dada como $\sigma_F = 0,03$. Como a incerteza está na casa dos centésimos, devemos arredondar o valor de F para a mesma casa decimal.

$$F \approx 0,26$$

O resultado final é $F = 0,26 \pm 0,03$.

Item D

Questão 14. Uma função depende de outras variáveis na forma: $y = a^1 b^2 c^3$ Sendo assim, determine a incerteza σ_y de y em função das variáveis a, b e c e de suas incertezas (σ_a, σ_b e σ_c).

- a) $\sigma_y = ab^2 c^3 \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$
- b) $\sigma_y = 2ab^2 c^3 \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$
- c) $\sigma_y = 3ab^2 c^3 \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$
- d) $\sigma_y = ab^2 c^3 \sqrt{3 \frac{\sigma_a^2}{a^2} + 2 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$
- e) $\sigma_y = ab^2 c^3 \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + 4 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + 9 \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$



Solução: Pelas regras de propagação de erro para produtos e potências, a incerteza relativa ao quadrado é a soma dos quadrados das incertezas relativas de cada variável, multiplicadas pelo seu expoente ao quadrado.

$$\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{\sigma_c}{c}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + 4 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + 9 \frac{\sigma_c^2}{c^2}$$

$$\sigma_y = y \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + 4 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + 9 \frac{\sigma_c^2}{c^2}}$$

Item E

Questão 15. Doriton está cansado de estudar em seu quarto cheio de barulho e, por isso, decidiu provar que o barulho estava muito alto analisando o nível de intensidade sonora no local. O nível de intensidade é dado por: $N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ onde $r = I/I_0$ é a razão entre intensidades sonoras, comparando com um valor de referência. Após medições, Doriton percebe que o valor médio de r é igual 50,00, com uma incerteza de $\sigma_r = 2,000$. Sendo assim, determine o nível de intensidade sonora referente ao r médio, junto com sua incerteza.

- a) $17,00 \pm 0,13$
- b) $17,00 \pm 0,17$
- c) $17,00 \pm 0,13$
- d) $15,00 \pm 0,13$
- e) $15,00 \pm 0,15$

Solução: Primeiro, calculamos o nível de intensidade sonora N para $r = 50$:

$$N = 10 \log_{10}(50) \approx 10 \cdot 1,69897 \approx 16,99 \text{ dB} \approx 17,00 \text{ dB}$$

A incerteza é calculada pela propagação de erro: $\sigma_N = \left|\frac{dN}{dr}\right| \sigma_r$.

$$\frac{dN}{dr} = \frac{d}{dr}(10 \log_{10}(r)) = 10 \frac{1}{r \ln(10)}$$

$$\sigma_N = \left|\frac{10}{50 \ln(10)}\right| \cdot 2,000 = \frac{20}{50 \ln(10)} \approx \frac{0,4}{2,3026} \approx 0,17 \text{ dB}$$

Item B

Questão 16. Em um experimento, pediu-se que você erga uma rampa de $l = 15,0$ cm (com incerteza desprezível) a um ângulo de $\theta = 30^\circ$ com respeito a horizontal, apoiando-se em uma parede. Para isso, você deve medir apenas o cateto referente à horizontal com sua régua, que possui uma incerteza de $\sigma_x = 0,5$ mm. Assim, determine a incerteza do ângulo, aproximadamente.

- a) $5 \cdot 10^{-3}^\circ$
- b) $3 \cdot 10^{-1}^\circ$
- c) $2 \cdot 10^{-3}^\circ$
- d) $1 \cdot 10^{-1}^\circ$



e) $4 \cdot 10^{-3^\circ}$

Solução: A relação entre o cateto horizontal x , a hipotenusa l e o ângulo θ é $x = l \cos(\theta)$. Podemos encontrar a relação entre as incertezas diferenciando a expressão: $\cos(\theta) = x/l$.

$$-\sin(\theta)d\theta = \frac{dx}{l}$$

Para incertezas, usamos os módulos:

$$\sigma_\theta \approx \left| \frac{1}{l \sin(\theta)} \right| \sigma_x$$

Convertendo as unidades para cm: $l = 15,0$ cm, $\sigma_x = 0,05$ cm, $\theta = 30^\circ$.

$$\sigma_\theta \approx \frac{0,05}{15,0 \cdot \sin(30^\circ)} = \frac{0,05}{15,0 \cdot 0,5} = \frac{0,05}{7,5} \approx 0,00667 \text{ rad}$$

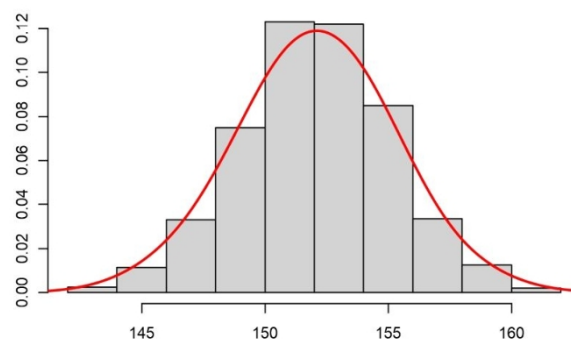
Convertendo radianos para graus:

$$\sigma_\theta(\text{graus}) = 0,00667 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 0,38^\circ$$

O valor mais próximo é $0,3^\circ$, que é $3 \cdot 10^{-1^\circ}$.

Item B

Leia o Texto para as próximas questões: Em um certo dia, Jabriel Mentos decidiu fazer um experimento curioso, após ver que tinha dois dados não viciados em sua casa. Ele joga os dados várias vezes e anota a soma dos números de cada dado. Ao fazer um histograma dos resultados, ele percebeu que o resultado se assemelha muito ao de uma curva gaussiana:



Curioso, Jabriel pesquisa mais sobre tal curva e descobre que a mesma possui muita importância no estudo estatístico de certos sistemas. O pico da curva significa o evento de maior probabilidade; nesse caso, o evento da soma dos dados ser 7. Porém, a curva gaussiana é muito interessante por mostrar como a probabilidade dos eventos se comporta ao se afastar do pico. Em um regime dominado pela curva gaussiana, temos a seguinte fórmula para o cálculo da probabilidade: $P(x) = Ce^{-x^2/2a^2}$. Vamos estudar a curva gaussiana nos próximos itens. Talvez seja útil utilizar a integral: $I(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$.

Questão 17. Sabendo que a soma das probabilidades é 1, calcule o valor do coeficiente C.

a) $C = \frac{1}{\sqrt{a^2 \pi}}$



- b) $C = \frac{1}{\sqrt{2a^2\pi}}$
c) $C = \frac{2}{\sqrt{2a^2\pi}}$
d) $C = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}}$
e) $C = \frac{2}{\sqrt{a^2\pi}}$

Solução: A soma de todas as probabilidades deve ser 1. Isso significa que a integral da função de probabilidade $P(x)$ de $-\infty$ a $+\infty$ deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-x^2/2a^2} dx = 1$$

Podemos tirar a constante C da integral:

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2a^2} dx = 1$$

A integral tem a forma $I(b)$ com $b = 1/(2a^2)$. Usando a fórmula fornecida:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2a^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{1/(2a^2)}} = \sqrt{2a^2\pi}$$

Substituindo de volta:

$$C\sqrt{2a^2\pi} = 1 \implies C = \frac{1}{\sqrt{2a^2\pi}}$$

Item B

Questão 18. Calcule o valor médio de x .

- a) a
b) $2a$
c) πa
d) $2\pi a$
e) 0

Solução: O valor médio de x , denotado por $\langle x \rangle$, é calculado por:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xCe^{-x^2/2a^2} dx$$

O integrando, $f(x) = xe^{-x^2/2a^2}$, é uma função ímpar, pois $f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2/2a^2} = -xe^{-x^2/2a^2} = -f(x)$. A integral de uma função ímpar sobre um intervalo simétrico (de $-\infty$ a $+\infty$) é sempre zero. Portanto, o valor médio de x é 0.

Item E

Questão 19. Calcule o valor quadrático médio de x . Isso é algo muito importante para analisar a variância do sistema(e assim, também o desvio padrão). Dica: derive com relação a b a integral dada.

- a) $a^2/\sqrt{2}$



- b) $a^2/2$
c) a^2
d) $\sqrt{2}a^2$
e) $2a^2$

Solução: O valor quadrático médio, $\langle x^2 \rangle$, é:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} dx$$

Seguindo a dica, derivamos $I(b) = \sqrt{\pi/b}$ em relação a b :

$$\frac{dI}{db} = \frac{d}{db} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} -x^2 e^{-bx^2} dx$$

Também, $\frac{d}{db}(\sqrt{\pi}b^{-1/2}) = \sqrt{\pi}(-\frac{1}{2}b^{-3/2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}$. Igualando as duas expressões, temos $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}$. Para nossa integral, $b = 1/(2a^2)$ e $C = 1/\sqrt{2a^2\pi}$.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2a^2\pi}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{(1/2a^2)^3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2a^2\pi}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{8a^6\pi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2a^2\pi}} \left(\frac{2a^3\sqrt{2\pi}}{2} \right) = a^2$$

Item C

Questão 20. Luís estava realizando seu experimento normalmente quando percebeu que teria que calcular a incerteza de uma estranha função. Em seu experimento, a função que relaciona os dados é da forma: $y = \frac{(\ln(x))^3}{x}$. Sendo assim, selecione a alternativa que corretamente relaciona a incerteza de $y(\sigma_y)$ com a incerteza de $x(\sigma_x)$.

- a) $\sigma_y = \frac{3 \ln(x)\sigma_x}{x^2}$
b) $\sigma_y = \frac{3 \ln(x)^2\sigma_x}{x^2}$
c) $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{x^2}((\ln x)^3 + (\ln x)^2)$
d) $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{x^2}(3(\ln x)^2 - (\ln x)^3)$
e) $\sigma_y = \frac{\ln(x)^3\sigma_x}{x^2}$

Solução: Para encontrar a incerteza σ_y , usamos a propagação de erro por derivadas, onde $\sigma_y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \sigma_x$. Primeiro, precisamos calcular a derivada da função $y = \frac{(\ln(x))^3}{x}$ usando a regra do quociente $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Definimos $u = (\ln x)^3$ e $v = x$.

- A derivada de u é $u' = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$ (pela regra da cadeia).
- A derivada de v é $v' = 1$.

Substituindo na regra do quociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}) \cdot x - ((\ln x)^3 \cdot 1)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\ln x)^2 - (\ln x)^3}{x^2}$$



Portanto, a incerteza é:

$$\sigma_y = \left| \frac{3(\ln x)^2 - (\ln x)^3}{x^2} \right| \sigma_x = \frac{\sigma_x}{x^2} |3(\ln x)^2 - (\ln x)^3|$$

Item D