

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF;
2. A lista é composta por 8 problemas, todas com o mesmo peso
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Calcule a excentricidade máxima que a órbita de um planeta pode ter para que ele fique na zona habitável de sua estrela (região no espaço onde pode haver água líquida na superfície de corpos negros perfeitos). Considere o planeta como um corpo negro ideal de rotação rápida e despreze quaisquer efeitos termodinâmicos de sua atmosfera.

Solução:

Considerando planetas de rotação rápida, temos, pela Lei de Stefan-Boltzmann, que a potência emitida por este, é dada por:

$$L_o = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Pois ele vai estar em equilíbrio térmico, emitindo por ambos hemisférios. Já para planetas de rotação lenta, o equilíbrio térmico não ocorre, ou seja, a radiação é emitida principalmente pelo hemisfério iluminado, assim a potência emitida por eles é dada por:

$$L_o = 2\pi R^2 \sigma T^4$$

De toda forma, temos que a potência emitida pela superfície de um planeta é proporcional a sua temperatura a quarta potência:

$$L_o \propto T^4$$

Além disso, a potência absorvida pelo planeta é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre este e a sua estrela:

$$L_i \propto \frac{1}{r^2}$$

Como essas potências são iguais, nós temos que:

$$r \propto \frac{1}{T^2}$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{k}{T_1^2}, \quad r_p = \frac{k}{T_2^2}$$

Onde $T_1 = 273 \text{ K}$ e $T_2 = 373 \text{ K}$.

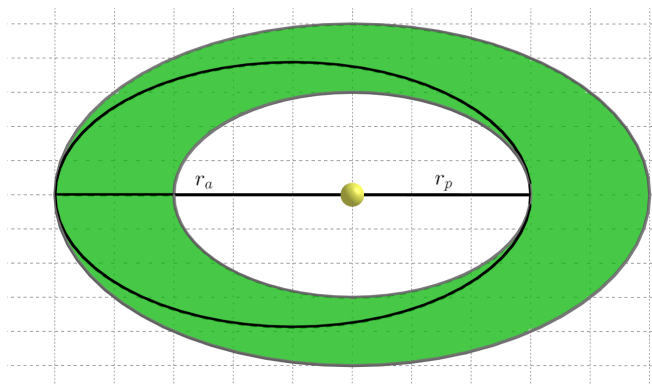


Figura 1: A área verde representa a zona habitável da estrela e a elipse representa a órbita mais excêntrica que pode estar nessa zona.

Portanto:

$$e_{max} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2} \Rightarrow \boxed{e_{max} \approx 0,302}$$

2. Certa noite, Juventino decidiu montar seu telescópio, cujo diâmetro é $D = 10 \text{ cm}$, para tentar observar um sistema triplo, cujas estrelas têm magnitudes aparentes de 12,5, 11,0 e 13,0.
- Calcule a magnitude aparente do sistema triplo.
 - Juventino conseguiria observar esse conjunto com seu telescópio?
 - A estrela GIU 20042, que é a estrela do sistema triplo cuja magnitude aparente é 12,5, tem magnitude absoluta $M = 2,5$. Qual a taxa de energia (em W) proveniente dessa estrela que atinge o espelho primário de telescópio de Juventino?

Solução:

- (a) Comparando os fluxos das 3 estrelas pela relação das magnitudes aparentes:

$$12,5 - 11,0 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 10^{0,6}$$

$$12,5 - 13,0 = -2,5 \log \frac{F_1}{F_3} \Rightarrow \frac{F_3}{F_1} = 10^{-0,2}$$

Com isso, conseguimos obter a magnitude aparente do conjunto m_{conj} comparando-a com a da estrela 1:

$$m_{conj} - 12,5 = -2,5 \log \frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_1}$$

$$m_{conj} = -2,5 \log \frac{F_1(1 + 10^{0,6} + 10^{-0,2})}{F_1} + 12,5$$

$$\boxed{m_{conj} \approx 10,6}$$

- (b) Vamos calcular a magnitude limite do telescópio. Sendo Δm a diferença entre a magnitude limite do telescópio e a do olho humano, temos:

$$\Delta m = 2,5 \log \left(\frac{A_{telesc}}{A_{pupila}} \right)$$

Onde A_{telesc} é a área coletora do telescópio (dada por $\pi(\frac{D}{2})^2$) e A_{pupila} é a área da pupila do olho humano (dada por $\pi(\frac{D_{pupila}}{2})^2$). Então:

$$\Delta m = 5,0 \log \left(\frac{D}{D_{pupila}} \right)$$

Com $D = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$ e $D_{pupila} = 6 \text{ mm}$, obtemos:

$$\Delta m \approx 6,1$$

Logo, a magnitude limite do telescópio $m_{lim,telesc}$ vale:

$$m_{lim,telesc} = 6,0 + 6,1 \Rightarrow m_{lim,telesc} = 12,1$$

Como $m_{conj} < m_{lim,telesc}$, Juventino conseguirá observar o conjunto.

(c) Primeiramente encontramos a distância d de GIU 20042 utilizando o módulo da distância:

$$m_{GIU} - M = 5 \log(d) - 5$$

$$12,5 - 2,5 = 5 \log(d) - 5$$

$$d = 1000 \text{ pc}$$

Comparando sua magnitude absoluta com a do Sol, conseguimos sua luminosidade:

$$M - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

$$2,5 - 4,8 = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

$$L \approx 8,3 L_{\odot}$$

Então, seu fluxo vale:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Assim, a taxa de energia recebida pelo espelho primário é dada por:

$$P = F A_{telesc} \Rightarrow P = \frac{8,3 L_{\odot}}{4\pi d^2} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2$$

$$P \approx 2,1 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

3. Um grupo de cientistas liderado por Banano está estudando as propriedades físicas e químicas de estrelas de nêutrons espalhados pelo Universo. Como bem sabemos, existe uma variedade de modelos teóricos que tentam prever como determinados parâmetros influenciam em outros. Nesse estudo, Banano tem interesse em analisar como o raio depende da massa da estrela; para isso, sua equipe utilizou quatro modelos diferentes, como mostra a figura abaixo.

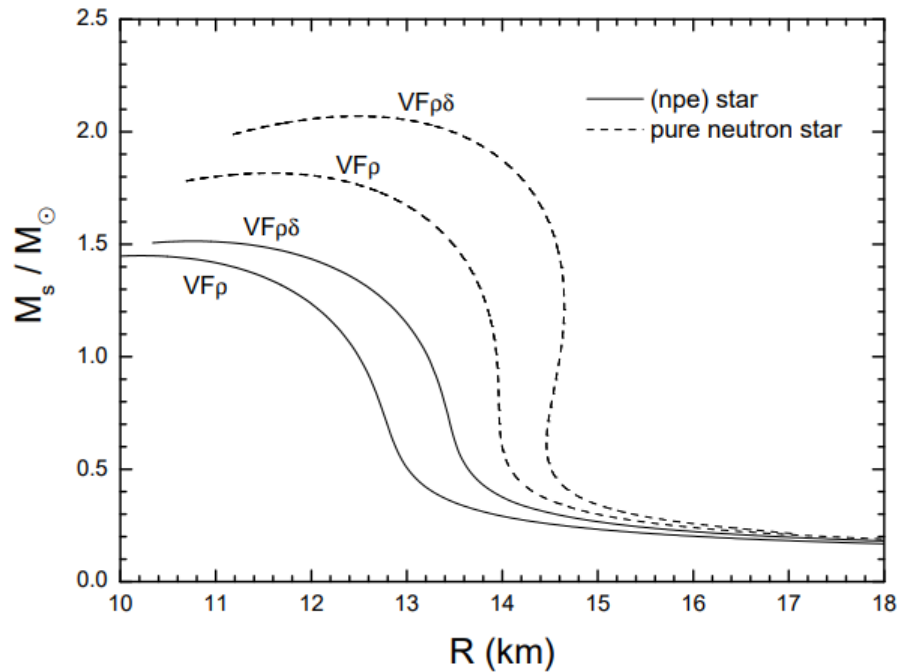


Figura 2: Gráfico de Massa de uma estrela de nêutrons em função de seu raio. Fonte: Guo, X. & Liu, Becka & Weng, M.. (2009). Vacuum fluctuation effects on asymmetric nuclear matter. Physical Review C. 79. 10.1103/PhysRevC.79.054316.

Nos seus estudos, foi determinado que a massa da estrela 05C4R é de $1,6M_{\odot}$ e que é formada somente por nêutrons. Após análise, Banano e sua equipe viram que o modelo $VF\rho$ seria o mais apropriado para ser utilizado.

Nessa questão, iremos analisar a taxa de variação da intensidade do campo gravitacional para pequenas variações de distância próximas a superfície do astro, $\Delta g/\Delta r$. Denote o subscrito "n" para propriedades de 05C4R e " $\oplus$ " para as da Terra.

Com essas informações em mente, determine a razão $\frac{(\Delta g/\Delta r)_n}{(\Delta g/\Delta r)_{\oplus}}$.

Dados: Massa da Terra: $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Raio da Terra: $R_{\oplus} = 6370 \text{ km}$. Massa do Sol: $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Dica: Caso necessário, use a aproximação: $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $x \ll 1$.

Solução:

Segundo a questão, a estrela 05C4R é puramente formada por nêutrons e possui massa de $1,6M_{\odot}$. Além disso, o modelo escolhido foi o $VF\rho$, então devemos utilizar a linha tracejada, que é relacionada a estrelas que, em sua composição, existem somente nêutrons. Para descobrir o raio de 05C4R, faremos o procedimento da figura abaixo.

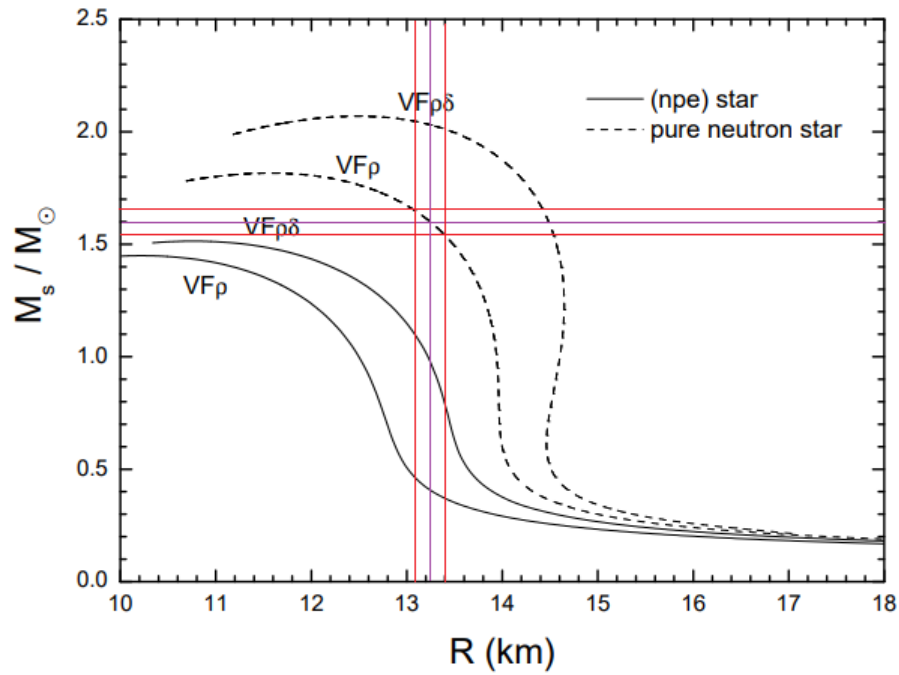


Figura 3: Delimitando a região que nos fornece corretamente o raio de 05C4R. Fonte: Guo, X. & Liu, Becka & Weng, M.. (2009). Vacuum fluctuation effects on asymmetric nuclear matter. Physical Review C. 79. 10.1103/PhysRevC.79.054316.

Devemos utilizar a linha roxa, que corretamente correlaciona massa e raio. Com isso, os valores aceitos para o raio de 05C4R são $r_n = (13,2 \pm 0,05)$ km. Aqui, iremos utilizar o valor 13,20 km, conforme indica o gráfico.

Agora iremos encontrar uma relação para a variação da intensidade do campo gravitacional pela distância. Para esse ponto, podemos proceder de duas formas:

Primeira forma, sem cálculo: Aqui, utilizaremos a dica fornecida pelo enunciado. Podemos calcular a variação da intensidade do campo para duas distâncias, r e $r + \Delta r$:

$$\Delta g = g_{r+\Delta r} - g_r = \frac{GM}{(r + \Delta r)^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2} - 1 \right] = \frac{GM}{r^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^{-2} - 1 \right]$$

Com a dica, vem:

$$\Delta g = -\frac{2GM\Delta r}{r^3} \Rightarrow \frac{\Delta g}{\Delta r} = -\frac{2GM}{r^3}$$

Segunda forma, com cálculo: Basta pegar a expressão da aceleração gravitacional e derivar em r , como vemos a seguir:

$$g = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2GM}{r^3}$$

Agora que temos uma expressão para $\Delta g/\Delta r$, podemos encontrar a razão pedida:

$$\frac{(\Delta g/\Delta r)_n}{(\Delta g/\Delta r)_\oplus} = \left(\frac{M_n}{M_\oplus}\right)\left(\frac{R_\oplus}{R_n}\right)^3 = \left(\frac{1.6 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{5,97 \cdot 10^{24}}\right)\left(\frac{6370}{13,20}\right)^3 = 5,9 \cdot 10^{13}$$

Conclusão: Para a variação de cada unidade de medida de distância, a variação da intensidade do campo gravitacional da estrela de nêutrons é $6,0 \cdot 10^{13}$ maior que da Terra. Respostas entre $(6,0 \pm 0,1) \times 10^{13}$ ganham a pontuação integral do problema.

4. Um foguete em uma órbita circular de raio $3 \cdot R_\oplus$ precisa colocar um satélite em uma órbita geoestacionária utilizando uma manobra de Hohmann. Considerando que a massa final (sem combustível), m_2 , do conjunto foguete-satélite é $8,20 \cdot 10^4 \text{ kg}$ e que o impulso específico, I_{sp} , dele é de $2,20 \cdot 10^2 \text{ s}$, qual deve ser a massa inicial de combustível para que esse trajeto seja concluído. Se necessário, utilize, a fórmula para o impulso específico e a equação de foguete de Tsiolkovski:

$$I_{sp} = \frac{v_e}{g_0}, \quad \Delta v = v_e \cdot \ln \frac{m_1}{m_2}$$

Onde v_e é a velocidade de ejeção dos gases, g_0 é a gravidade superficial da Terra ($9,81 \text{ m/s}^2$), Δv é a variação de velocidade necessária para fazer a manobra e m_1 é a massa inicial do conjunto.

Solução:

Inicialmente podemos fazer algumas alterações na equação do foguete para obter a massa do combustível, m_c :

$$\frac{m_2 + m_c}{m_2} = e^{\frac{\Delta v}{v_e}}$$

$$m_c = m_2 \cdot \left(e^{\frac{\Delta v}{I_{sp} \cdot g_0}} - 1 \right)$$

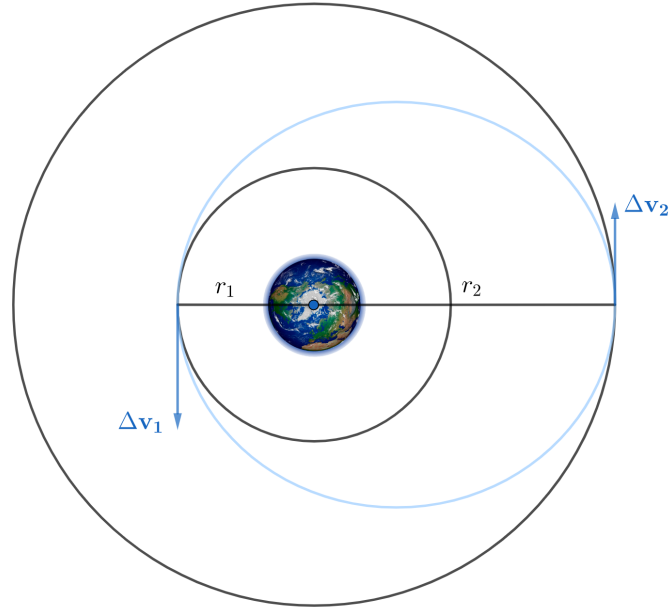
Para calcular raio da órbita geoestacionária, r_2 , utilizando a Terceira Lei de Kepler com $T = 23^h 56^m$:

$$\frac{T^2}{r_2^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_\oplus}$$

$$r_2 = \left(\frac{G \cdot M_\oplus \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\implies r_2 \approx 4,21 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Representação da manobra de Hohmann:



Onde o semi-eixo maior da órbita de transferência e as variações na velocidade podem ser calculados por:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot r_2}{(r_1 + r_2)}} - 1 \right)$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2 \cdot r_1}{(r_1 + r_2)}} \right)$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot r_2}{(r_1 + r_2)}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2 \cdot r_1}{(r_1 + r_2)}} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta v \approx 1436 \text{ m/s}$$

Substituindo esses valores na primeira fórmula encontrada:

$$\Rightarrow \boxed{m_c \approx 7,75 \cdot 10^4 \text{ kg}}$$

5. Numa bela noite Lais decide usar seu mais novo telescópio refrator para analisar 2 objetos: A e B, que se encontram na direção oposta ao Centro Galáctico. A é uma galáxia edge-on a $d_{gal} = 9,55 \cdot 10^6 \text{ pc}$ de distância da Terra, raio $R_{gal} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ pc}$ e de luminosidade $L_{gal} = 1,67 \cdot 10^{37} \text{ W}$, e B é um aglomerado globular que dista $d_{glo} = 84,2 \cdot 10^3 \text{ pc}$ da Terra e possui raio $R_{glo} = 79,7 \text{ pc}$ e luminosidade $L_{glo} = 1,92 \cdot 10^{34} \text{ W}$. O telescópio de Lais possui lentes com distâncias focais $f_{obj} = 650 \text{ mm}$ e $f_{ocu} = 20 \text{ mm}$, campo de visão $\text{FOV} = 50^\circ$, diâmetro $D = 274 \text{ mm}$ e um CCD quadrado de lado $2,08 \text{ mm}$ com pixels de lado $0,26 \text{ mm}$. Considere efeitos de absorção intragalácticos, com

coeficiente de absorção $a_V = 0,5 \text{ mag/Kpc}$.

- Qual a magnitude limite deste telescópio? Ela é alta o suficiente para que ambos os objetos possam ser enxergados?
- As imagens dos objetos cabem no CCD?
Após tirar as fotos que desejava, Lais retira seu CCD do telescópio e resolve acoplar uma lente Barlow 2X.
- Qual o novo campo de visão do telescópio?

Solução:

- Para descobrirmos a magnitude limite basta notarmos que a energia mínima captada pelo telescópio deve ser igual à captada pelo olho humano no caso de sua magnitude limite. Logo:

$$F_{tel} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = F_{olho} \pi \left(\frac{D_{olho}}{2} \right)^2$$

Podemos descobrir F_{olho} ao comparar tal fluxo com o fluxo do Sol:

$$6 - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F_{olho}}{F_{sol}} \right)$$

$$F_{olho} = 1,13 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

Disso:

$$F_{tel} = 5,42 \cdot 10^{-14} \text{ W/m}^2$$

Podemos comparar então este fluxo ao do Sol para descobrir a magnitude limite do telescópio:

$$m_{lim} - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{F_{tel}}{F_{\odot}} \right)$$

$$m_{lim} = 14,3$$

Agora calculemos as magnitudes dos 2 objetos, também comparando-os ao Sol. Lembre-se que a extinção é um efeito intragaláctico, assim ela só ocorre quando a luz da outra galáxia chega à Via Láctea.

$$m_{gal} - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{gal}}{d_{gal}^2} \frac{d_{\odot}^2}{L_{\odot}} \right) + a_v (R_{VL} - d_{\odot - Centro \text{ VL}})$$

$$m_{gal} = 12,0$$

$$m_{glo} - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{glo}}{d_{glo}^2} \frac{d_{\odot}^2}{L_{\odot}} \right) + a_v (R_{VL} - d_{\odot - Centro \text{ VL}})$$

$$m_{glo} = 9,10$$

Logo é possível ver os 2 objetos.

- (b) Primeiramente calculemos a escala de placa desse telescópio:

$$\theta = \frac{\text{lado pixel}}{f_{obj}}$$

$$\theta = 4,00 \cdot 10^{-4} \text{rad/pixel}$$

Como a galáxia é edge-on, podemos considerar sua imagem no CCD como unidimensional. Assim, o número n_{gal} de pixels ocupados por ela é:

$$\theta_{gal} = \frac{2 R_{gal}}{d_{gal}} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

$$n_{gal} = \frac{\theta_{gal}}{\theta} = 3,92 \rightarrow 4 \text{ pixels}$$

Para o aglomerado é necessário analisar a disposição da imagem nos pixels, já que esta é circular. Primeiramente, analisemos quantos pixels o diâmetro do aglomerado ocupa (n_D):

$$\theta_D = \frac{2 R_{glo}}{d_{glo}} = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

$$n_D = \frac{\theta_D}{\theta} = 4,73 \rightarrow 5 \text{ pixels}$$

Assim, como o CCD tem lado de 8 pixels, ambas as imagens são menores que ele.

- (c) Primeiramente devemos calcular o campo de visão do telescópio com a lente ocular (FOV_{ocu}):

$$\text{FOV}_{ocu} = \text{FOV} \frac{f_{ocu}}{f_{obj}} = 1,54^\circ$$

Como a lente Barlow gera uma ampliação de 2 vezes, o campo de visão deve cair pela metade, assim, seja FOV' tal campo, temos:

$$\text{FOV}' = \frac{\text{FOV}_{ocu}}{2}$$

$$\text{FOV}' = 0,77^\circ$$

6. No dia do solstício de verão no hemisfério Sul, Juvelino estava relaxando na Casa Silóé ($\phi = 23.01^\circ S$; $\lambda = 46.96^\circ O$) e decidiu que estava com vontade de ver o pôr do Sol. Contudo, o horário solar verdadeiro de Juvelino naquele instante era 3h00min da tarde, então ele precisaria esperar algumas horas para ver o pôr do Sol.

Contudo, Juvelino estava muito impaciente e decidiu que seria mais fácil se teleportar para um local em que o pôr do Sol estivesse ocorrendo exatamente naquele instante. Infelizmente, Juvelino ainda não havia dominado completamente a sua habilidade de teleporte. Portanto, ele só se teleportava ao longo de um arco de círculo máximo e seu destino final sempre deveria estar exatamente a Norte, Sul, Leste ou Oeste do ponto de partida.

- (a) Caso Juvelino decidisse ir para Leste para ver o pôr do Sol, qual seria o seu deslocamento angular?
- (b) Caso Juvelino decidisse ir para Norte para ver o pôr do Sol, qual seria o seu deslocamento angular?

- (c) Caso Juvelino pudesse se teleportar em qualquer direção, qual seria o menor deslocamento angular possível para que ele chegasse ao pôr do Sol?

Solução:

- (a) Primeiramente, é necessário calcular o horário do pôr do Sol para a latitude de Juvelino. Para isso, é importante determinar o ângulo horário do nascer e do pôr do Sol nessa latitude.

$$\cos(H) = \frac{\sin(a) - \sin(\delta) * \sin(\phi)}{\cos(\delta) * \cos(\phi)}$$

Como $a = 0$ no nascer e no pôr do Sol e $\delta = -23.44^\circ$ no solstício de verão:

$$\cos(H) = -\tan(\phi) * \tan(\delta)$$

$$\cos(H) = -\tan(-23.01^\circ) * \tan(-23.44^\circ)$$

$$H = \arccos(-0.1841)$$

$$\text{Nascer do Sol : } H = -100.61^\circ$$

$$\text{Pôr do Sol : } H = 100.61^\circ$$

Como $3h = 45^\circ$, a variação de latitude é a seguinte:

$$\Delta\lambda = 100.61^\circ - 45^\circ$$

$$\Delta\lambda = 55.61^\circ$$

Para calcular o deslocamento de Juvelino em um círculo máximo, é possível aplicar a lei dos cossenos em um triângulo composto pelo ponto inicial, o ponto final e o polo Norte. Vale lembrar que o ponto inicial e o final estão na mesma latitude:

$$\cos(\theta_1) = [\cos(90^\circ - \phi)]^2 + [\sin(90^\circ - \phi)]^2 * \cos(\Delta\lambda)$$

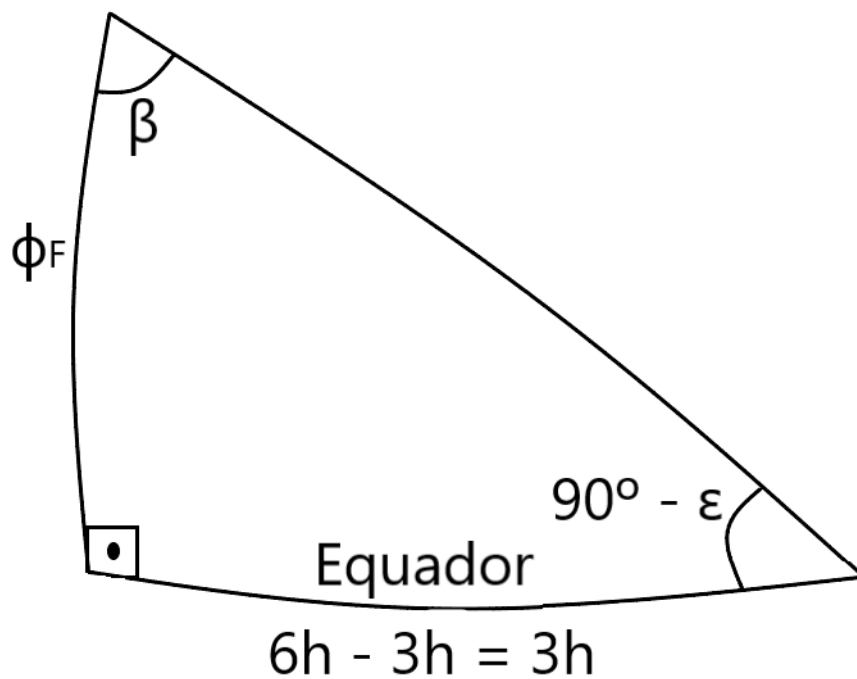
$$\cos(\theta) = [\sin(\phi)]^2 + [\cos(\phi)]^2 * \cos(\Delta\lambda)$$

$$\cos(\theta) = [\sin(-23.01^\circ)]^2 + [\cos(-23.01^\circ)]^2 * \cos(55.61^\circ)$$

$$\theta_1 = \arccos(0.6313)$$

$$\theta_1 = 50.85^\circ$$

- (b) No dia do solstício, o círculo máximo que separa a área iluminada da área escura da Terra forma um ângulo de $90^\circ - \varepsilon$, em que ε é a obliquidade da Eclíptica, com o Equador, é possível montar o seguinte triângulo esférico:



ϕ_F corresponde à latitude final de Juvelino.

É importante ressaltar que o horário solar verdadeiro do pôr do Sol no Equador é sempre 6h da tarde. Por isso $6h - 3h = 3h = 45^\circ$ corresponde a um dos lados do triângulo esférico.

Utilizando a fórmula das quatro partes:

$$\cos(45^\circ)\cos(90^\circ) = \sin(45^\circ) * \cot(\phi_F) - \sin(90^\circ) * \cot(90^\circ - \varepsilon)$$

$$\sin(45^\circ) * \cot(\phi_F) = \cot(90^\circ - \varepsilon)$$

$$\tan(\phi_F) = \frac{\sin(45^\circ)}{\tan(23.44^\circ)}$$

$$\phi_F = \arctan(1.631)$$

$$\phi_F = 58.49^\circ N$$

Como um arco de meridiano é um arco de círculo máximo, o deslocamento de Juvelino corresponde à diferença entre latitude final e a inicial;

$$\theta_2 = \phi_F - \phi_I$$

$$\theta_2 = 58.49^\circ - (-23.01^\circ)$$

$$\boxed{\theta_2 = 81.50^\circ}$$

- (c) Primeiramente, é possível calcular o último ângulo interno do triângulo da questão anterior com a fórmula das quatro partes:

$$\cos(\phi_F)\cos(90^\circ) = \sin(\phi_F)\cot(45^\circ) - \sin(90^\circ)\cot(\beta)$$

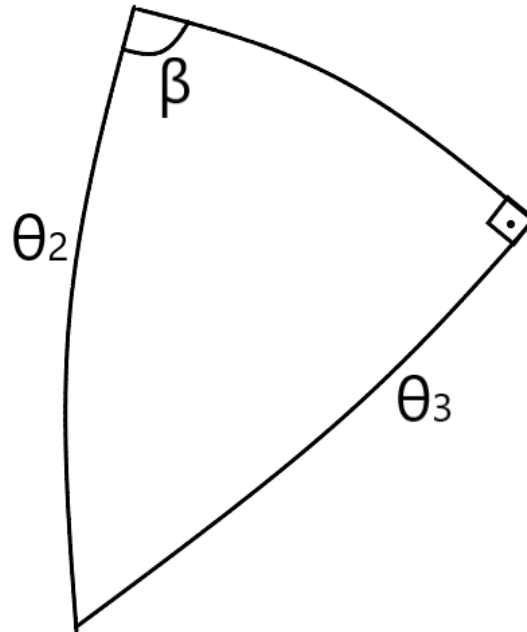
$$\cot(\beta) = \sin(\phi_F)$$

$$\tan(\beta) = \frac{1}{\sin(58.49^\circ)}$$

$$\beta = \arctan(1.173)$$

$$\beta = 49.55^\circ$$

Considerando que a menor separação angular corresponde ao ponto em que o arco entre Juvelino e o destino final forma um ângulo de 90° com a separação entre a luz e a sombra. Dessa forma, é possível aproveitar o ângulo β para montar o seguinte triângulo esférico:



Como o ângulo θ_3 deve ser, por definição, menor que θ_2 , é possível concluir que θ_3 está no primeiro quadrante e portanto a lei dos senos não gera nenhuma ambiguidade.

$$\frac{\sin(\theta_3)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(90^\circ)}$$

$$\sin(\theta_3) = \sin(49.55^\circ)\sin(81.50^\circ)$$

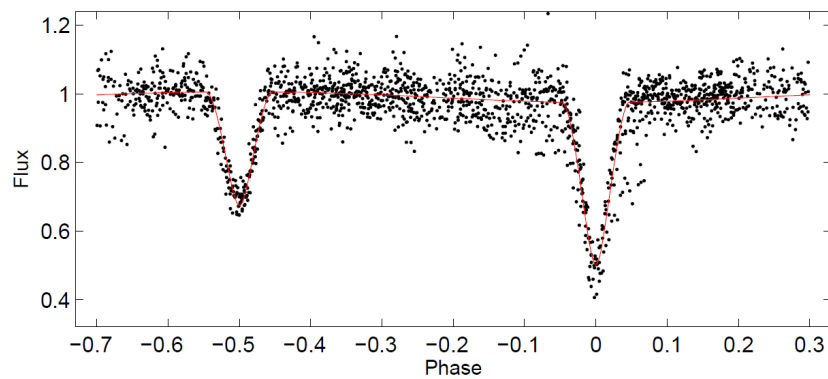
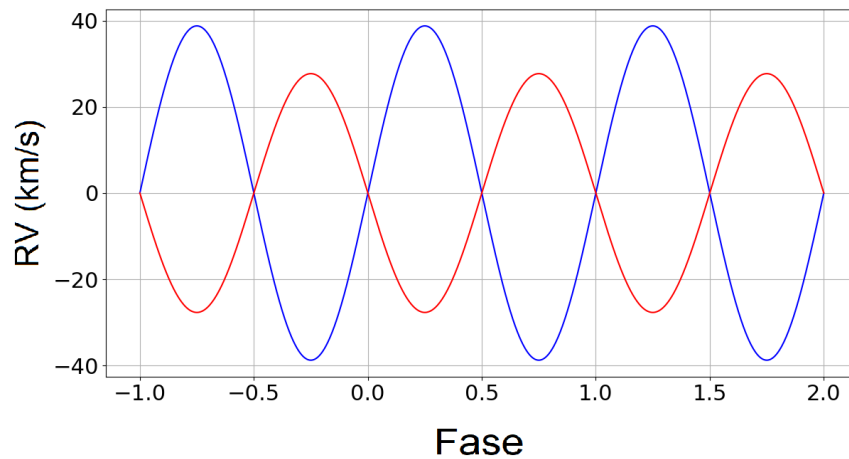
$$\theta_3 = \arcsin(0.7526)$$

$$\boxed{\theta_3 = 48.82^\circ}$$

7. O astrônomo Luiz está analisando as principais curvas de um sistema binário de estrelas cujo período é de 37,834 dias e fluxo total é $F_T = 1,09648 \cdot 10^{-12} F_\odot$. Vamos encontrar certos

parâmetros do sistema encontrados por Luiz.

Para os seguintes itens, não será necessário calcular o raio de cada estrela e considere que o plano orbital do binário possui inclinação $i = 90^\circ$ e as órbitas são circulares.



- Determine a massa de cada componente, em massas solares.
- A partir da curva de luz, o que se pode dizer sobre os raios das estrelas?
- Determine a magnitude aparente de cada estrela.
- Determine a razão entre as suas temperaturas.

Solução:

a)

Para encontrar as massas, usemos a terceira lei de Kepler e conhecimento de centro de massa.

Sabe-se da terceira lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{M_1 + M_2} a^3$$

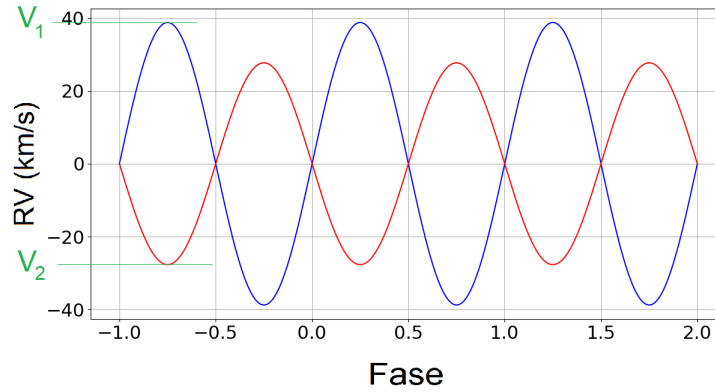
Em anos, UA e massas solares temos:

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

O semi-eixo maior a refere-se a órbita relativa das estrelas, isto é, com uma delas imóvel. Sabemos:

$$a = r_1 + r_2$$

Sendo r_1 e r_2 os semi-eixos maiores das órbitas individuais de cada estrela. Como tais trajetórias são circulares, podemos prosseguir como o adiante.



Do gráfico da curva de rotação, vemos que $v_1 \approx 38,7$ km/s e $v_2 \approx 27,8$ km/s.

Os semi-eixos maiores das órbitas individuais de cada estrela será, após devidas conversões de unidades:

$$r_1 = \frac{v_1 P}{2\pi} = 0,13458 \text{ UA} ; \quad r_2 = \frac{v_2 P}{2\pi} = 0,09668 \text{ UA}$$

Agora encontramos a soma das massas do sistema:

$$M_1 + M_2 = \frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} = \frac{(0,13458 + 0,09668)^3}{(37,834/365,2564)^2} = 1,1527 M_\odot$$

De centro de massa, equacionando a posição do centro de massa, temos:

$$0 = M_1 r_1 - M_2 r_2$$

Substituindo o resultado anterior:

$$M_1 + \frac{r_1}{r_2} M_1 = 1,1527 \Rightarrow M_1 = \frac{1,1527}{1 + r_1/r_2}$$

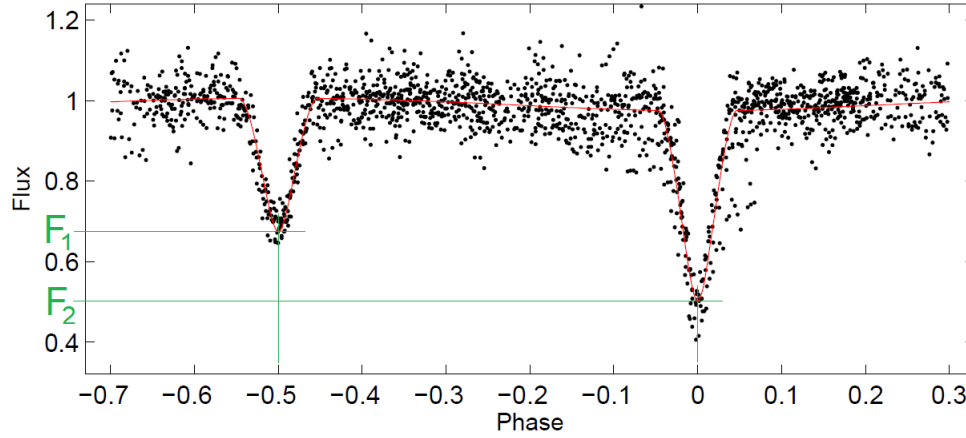
$$M_1 = 0,48 M_\odot$$

$$M_2 = 0,67 M_\odot$$

b)

Não há patamares (fluxos aproximadamente constantes) nos mínimos, portanto, cada estrela é eclipsada quase que completamente pela outra a cada vez. Isso só acontece se ambos os raios delas possuírem dimensões muito próximas, ou seja, $R_1 \approx R_2$.

c)



Seja 1 a estrela não eclipsada no primeiro mínimo e 2 a estrela não eclipsada no segundo mínimo.

Da curva de luz, obtemos $F'_1 = 0,6784 \Rightarrow F_1 = 0,6784 \cdot F_T$ e $F'_2 = 0,5098 \Rightarrow F_2 = 0,5098 \cdot F_T$.

Comparando com o sol:

$$m_1 = m_{\odot} + 2,5 \log \left(\frac{F_{\odot}}{F_1} \right)$$

$$m_1 = -26,7 + 2,5 \log \left(\frac{F_{\odot}}{0,6784 \cdot 1,09648 \cdot 10^{-12} F_{\odot}} \right)$$

$$\boxed{m_1 = 3,62}$$

$$m_2 = m_{\odot} + 2,5 \log \left(\frac{F_{\odot}}{F_2} \right)$$

$$m_2 = -26,7 + 2,5 \log \left(\frac{F_{\odot}}{0,5098 \cdot 1,09648 \cdot 10^{-12} F_{\odot}} \right)$$

$$\boxed{m_2 = 3,93}$$

d)

Primeiramente, para encontrar a razão entre as temperaturas, vamos relacionar os fluxos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_2} = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 = \frac{F_1 R_2^2}{F_2 R_1^2}$$

Pelo explicado no item b), podemos fazer:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{F_1}{F_2}} = \sqrt[4]{\frac{0,6784}{0,5098}}$$

$$\boxed{T_1/T_2 = 1,074}$$

$$\boxed{T_2/T_1 = 0,931}$$

8. Em 21 de junho de 2020, foi possível observar um eclipse solar parcial nas Filipinas. A imagem abaixo representa o início do fenômeno às 15h 01min do horário local.



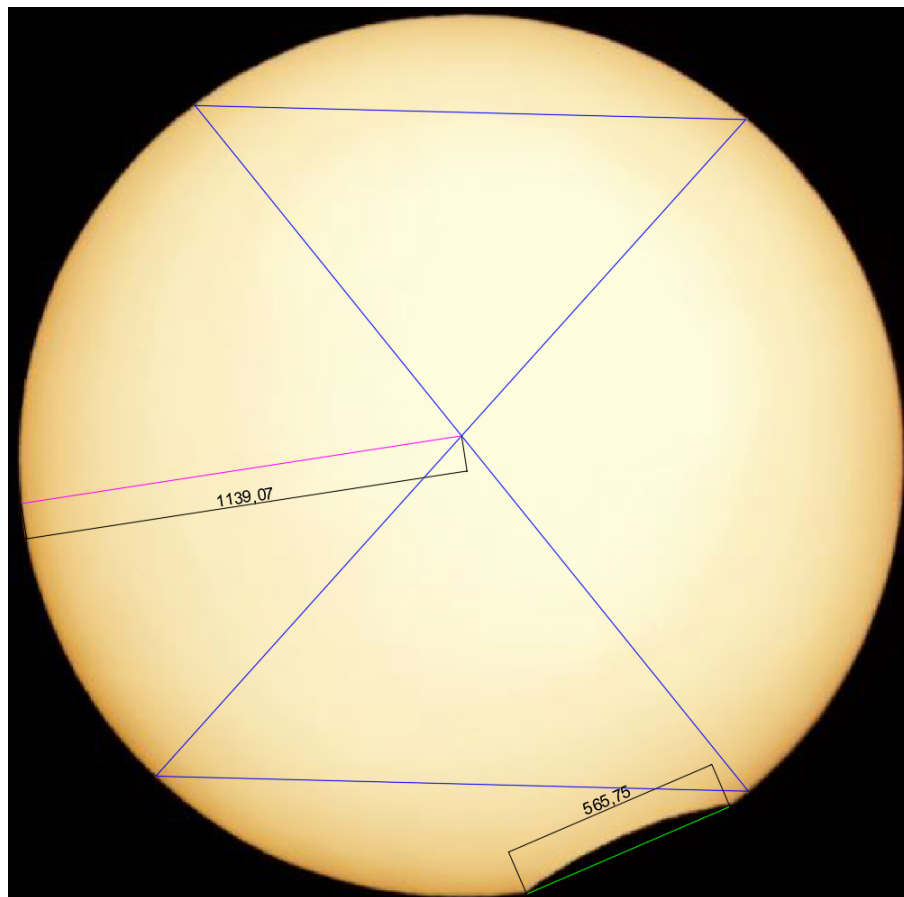
Considere, para os itens a seguir, que o diâmetro angular da Lua é igual ao do Sol no momento da imagem:

- Calcule a magnitude do eclipse no momento da captura da imagem. A magnitude do eclipse é definida como sendo a fração do diâmetro do Sol que está sendo eclipsado. Explique sucintamente todas as medidas e construções geométricas utilizadas.
- Estime a variação de magnitude aparente do Sol Δm causada pelo eclipse no momento da imagem. Desconsidere, para fins de aproximação, o efeito de escurecimento de borda do Sol (*limb darkening*).

Obs: Você poderá utilizar um software ou uma régua para fazer quaisquer medições necessárias na imagem.

Solução:

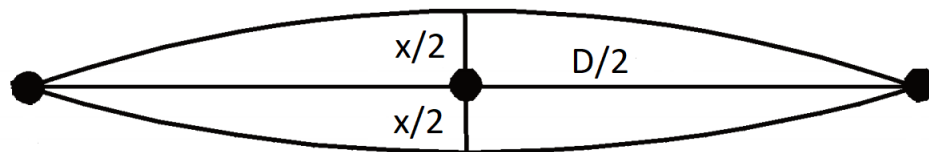
- Primeiramente, faremos a seguinte construção com a imagem dada:



A figura acima nos serviu para encontrarmos o centro do Sol. Para isso, foram construídas dois segmentos de retas paralelas no interior do disco solar. Após isso, as extremidades dos segmentos foram ligadas em X. A intersecção central encontrada será aproximadamente o centro da circunferência. Uma outra construção para a obtenção do centro aproximado pode ser feita de diversas outras formas. Desde que bem explicadas (e corretas), todas as ideias serão consideradas.

Após isso, partindo do centro encontrado, medimos o raio do disco $R = 1139,07$ e a distância entre as extremidades da pequena ocultação $D = 565,75$. (dimensões em uma escala arbitrária)

Precisamos encontrar o x da figura abaixo, de modo que a magnitude do eclipse no momento da imagem será dada por $F = \frac{x}{2R}$



Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$\left(R - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2$$

$$x = 2R - \sqrt{4R^2 - D^2}$$

Substituindo, encontramos $x \approx 71,37$ e, portanto:

$$F = \frac{x}{2R} = \frac{71,37}{2 \cdot 1139,07} \rightarrow \boxed{F = 0,031}$$

- (b) Podemos associar a magnitude aparente com a área visível do Sol. Desse modo, precisamos calcular a área A da figura acima. Equacionando:

$$\frac{A}{2} = A_{arco} - A_{triangulo} = R^2 \cdot \arcsin\left(\frac{D}{2R}\right) - \left(R - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{D}{2}$$

Portanto, teremos a seguinte expressão para a variação de magnitude:

$$\Delta m = -2,5 \cdot \log\left(\frac{A_{total} - A}{A_{total}}\right)$$

Sabendo que $A_{total} = \pi R^2$, encontramos o seguinte valor para a variação de magnitude:

$$\boxed{\Delta m = +7,2 \cdot 10^{-3}}$$