

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 6 problemas, todos com o mesmo peso
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 2". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 2".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 25/05/2021 - 23h 59min

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **Lua e Aldebaran** Em fevereiro de 2015, a Lua começou um ciclo de ocultações mensais de Aldebaran (α Tau). Ou seja, todo mês a Lua passava na frente de Aldebaran para um observador na Terra. Vale ressaltar que essas ocultações não ocorriam necessariamente para observadores na mesma posição todo mês. Calcule a data (mês e ano) do fim desse ciclo de ocultações mensais.

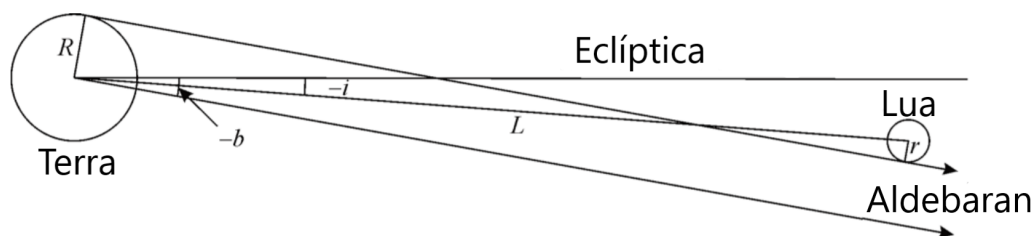
Considere que a órbita da Lua é circular

Dados:

- Latitude eclíptica de Aldebaran = $-5,47^\circ$
- Período de precessão nodal da Lua = 18,6 anos

Solução: A precessão nodal da Lua faz com que os nodos entre a órbita lunar e a Eclíptica rotacionem com um período de 18,6 anos. Dessa forma, a latitude eclíptica da Lua ao cruzar o meridiano de longitude eclíptica de Aldebaran varia de $-5,15^\circ$ a $5,15^\circ$ ao longo desse período.

O primeiro passo da resolução é determinar a longitude eclíptica máxima (ou mínima em módulo) para que a Lua oculte Aldebaran. Com base na seguinte figura:

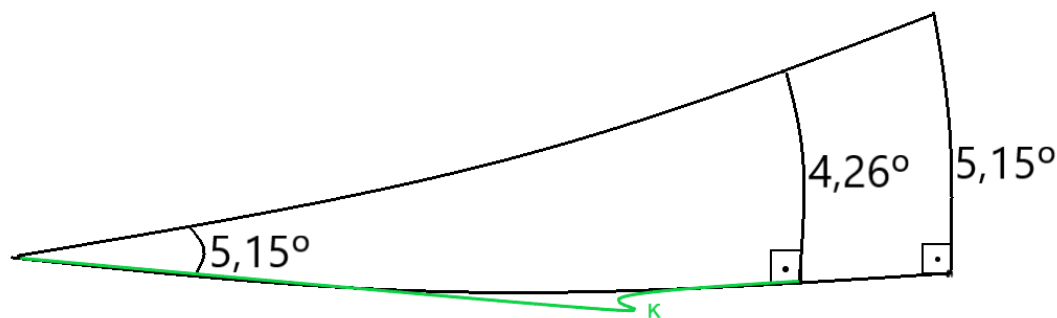


$$i = b + \arcsin\left(\frac{R + r}{L}\right)$$

$$i = -5,47^\circ + \arcsin\left(\frac{6,37 \cdot 10^6 + 1,74 \cdot 10^6}{3,84 \cdot 10^8}\right)$$

$$i = -4,26^\circ$$

Agora, é necessário determinar o ângulo que compreende todos os pontos em que a latitude eclíptica da Lua é superior a $4,26^\circ$. Para isso, é possível utilizar os seguintes triângulos esféricos:



Com base na fórmula das 4 partes, é possível determinar o valor de κ :

$$\cos(\kappa)\cos(90^\circ) = \sin(\kappa) * \cot(4,26^\circ) - \sin(90^\circ)\cot(5,15^\circ)$$

$$0 = \sin(\kappa) * \cot(4,26^\circ) - \cot(5,15^\circ)$$

$$\sin(\kappa) = \frac{\tan(4,26^\circ)}{\tan(5,15^\circ)}$$

$$\kappa = \arcsin(0,8265)$$

$$\kappa = 55,74^\circ$$

Agora, é possível calcular o intervalo de longitudes eclípticas em que a Lua pode ocultar Aldebaran:

$$\gamma = 2 * (90^\circ - \kappa)$$

$$\gamma = 2 * (90^\circ - 55,74^\circ)$$

$$\gamma = 68,52^\circ$$

O fator 2 é necessário pois após ir de $4,26^\circ$ para $5,15^\circ$, a latitude eclíptica volta de $5,15^\circ$ para $4,26^\circ$.

Agora, é possível calcular o intervalo de tempo que a Lua passa nessas latitudes ao cruzar o meridiano de Aldebaran:

$$\Delta t = T * \frac{\gamma}{360^\circ}$$

$$\Delta t = 18,6 * \frac{68,52^\circ}{360^\circ}$$

$$\Delta t = 3,54 \text{ anos}$$

Como as ocultações começaram em fevereiro de 2015:

$$\text{Fevereiro de 2015} + 3,53 \text{ anos} = \text{Agosto de 2018}$$

$\therefore$ O ciclo de ocultações acabou em agosto de 2018

2. **Distância angular** Calcule o ângulo $\angle 132$ do triangulo esférico formado pelas estrelas 1, 2 e 3.

Coordenadas		
1	2	3
Sistema eclíptico	Sistema equatorial	Sistema azimutal
$\ell = 92^\circ 15'$	$\alpha = 6^h 22^m$	$A = 152^\circ 48'$
$b = 50^\circ 00'$	$\delta = 47^\circ 32'$	$z = 17^\circ 52'$

A estrela 3 é vista de um local com latitude $\phi = 53^\circ 36'$ e tempo sideral $T = 5^h 00^m 0^s$. Considere que o azimuth cresce no sentido horário a partir do ponto cardinal Norte.

Legenda:

ℓ : longitude eclíptica

b : latitude eclíptica

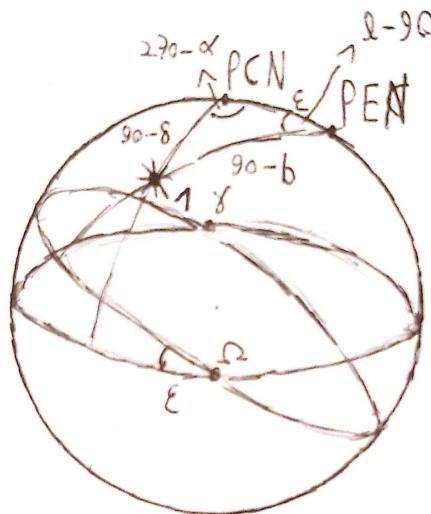
α : ascensão reta

δ : declinação

A : azimuth

z : distância zenital

Solução: Convertendo as coordenadas da estrela 1:



Scanned with CamScanner

Aplicando a lei do cosseno-cosseno:

$$\cos(\epsilon)\cos(\ell - 90) = \sin(\epsilon)\cotg(90 - b) - \sin(\ell - 90)\cotg(270 - \alpha)$$

$$\alpha = 270 - \tan^{-1} \left(\frac{-\sin(\ell - 90)}{\cos(\epsilon)\cos(\ell - 90) - \sin(\epsilon)\cotg(90 - b)} \right)$$

(importante notar que temos que usar o resultado de $\tan^{-1}$ no segundo quadrante)

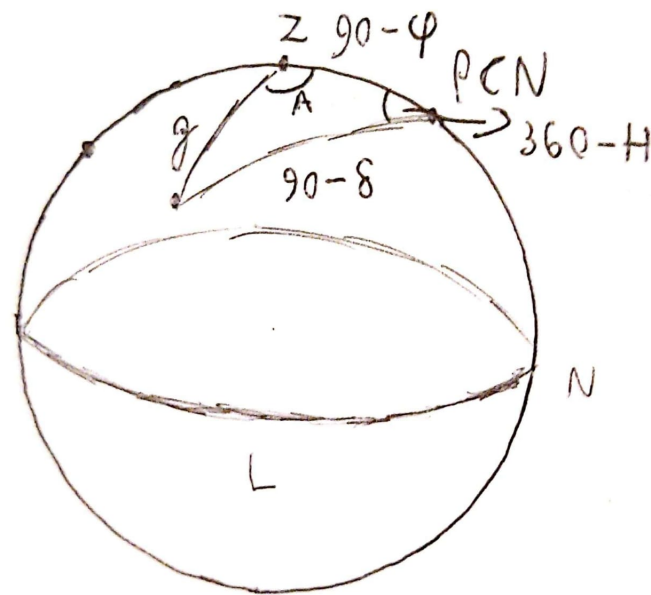
$$\alpha = 95^{\circ}5' = 6^h20^m$$

calculando o δ usando a lei dos senos:

$$\frac{\sin(90 - \delta)}{\sin(\ell - 90)} = \frac{\sin(90 - b)}{\sin(270 - \alpha)}$$

$$\delta = 73^{\circ}27'$$

convertendo as coordenadas da estrela 3:



CS Scanned with CamScanner

Aplicando a lei dos cossenos:

$$\cos(90 - \delta) = \cos(z)\cos(90 - \phi) + \sin(z)\sin(90 - \phi)\cos(A)$$

$$\delta = 37^{\circ}10'$$

aplicando a lei dos senos:

$$\frac{\sin(360 - H)}{\sin(z)} = \frac{\sin(A)}{\sin(90 - \delta)}$$

$$H = 349^{\circ}52^m = 23^h19^m$$

aplicando a fórmula do tempo sideral:

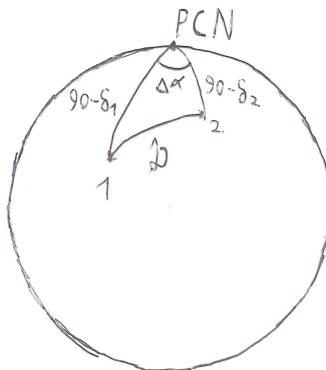
$$T = \alpha + H$$

$$5^h = \alpha + 23^h28^m$$

$$\alpha = 5^h41'$$

Agora, com esses valores em mãos podemos calcular o ângulo $\angle 132$.

MÉTODO 1

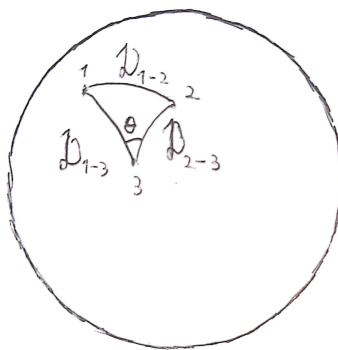


Scanned with CamScanner

Com triângulos esféricos similares a esse podemos calcular a distância entre as estrelas com a fórmula:

$$\cos D = \cos(90 - \delta_1)\cos(90 - \delta_2) + \sin(90 - \delta_1)\sin(90 - \delta_2)\cos(\Delta\alpha)$$

$$D_{1-3} = 36^\circ 36' \quad D_{1-2} = 25^\circ 55' \quad D_{2-3} = 12^\circ 49'$$



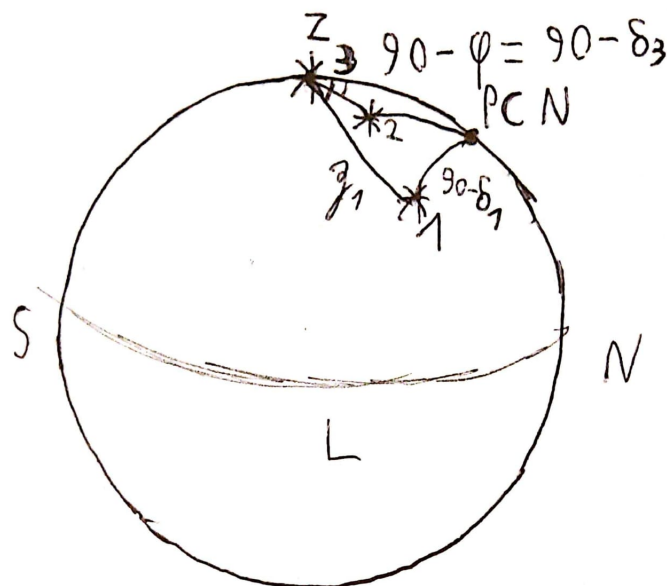
Scanned with CamScanner

$$\cos D_{1-2} = \cos D_{1-3} \cos D_{2-3} + \sin D_{1-3} \sin D_{2-3} \cos \angle 132$$

$$\angle 132 = 28^\circ 9'$$

MÉTODO 2

Outra forma de calcular esse ângulo é fazer a diferença dos azimutes das estrelas 1 e 2 vistas por um observador que vê a estrela 3 em seu zênite.



Scanned with CamScanner

Ou seja, $\delta_3 = \phi$ e $T = \alpha_3$ Para calcular os azimutes de cada estrela devemos seguir os seguintes passos:

$$T = \alpha_n + H_n$$

(resolver para H)

$$\cos(90 - \phi)\cos(360 - H_n) = \sin(90 - \phi)\cotg(90 - \delta_n) - \sin(360 - H_n)\cotg(A_n)$$

(resolver para A) Substituindo n por 1 por 2:

$$A_1 = 147^\circ 12'$$

e

$$A_2 = 175^\circ 22'$$

tirando a diferença:

$$\angle 132 = 28^\circ 10'$$

(devido a certas aproximações no meio das contas as respostas são um pouco diferentes)

3. **Grande Conjuncão** Num futuro distante, o Sistema Solar foi completamente transformado: as órbitas dos planetas possuem agora novas inclinações orbitais e a vida já é possível em alguns deles. Um dos fenômenos astronômicos mais importantes deste sistema é a Grande Conjuncão, conjuncão de Júpiter e Saturno observada a partir do Sol(ou seja, os 2 planetas possuem a mesma longitude eclíptica). O grandioso astrônomo Shoji observa uma destas conjunções e fica muito

empolgado, pois descobre que na próxima vez que esse fenômeno ocorrer o eixo de rotação de Saturno se encontrará coplanar ao eixo Norte-Sul do Sol, e será "verão" no hemisfério Sul do planeta. Assim, ele decide juntar o máximo de informações possíveis sobre tal evento, porém ele percebe que não terá tempo o suficiente de calcular tudo. Assim, ajude Shoji e descubra quais as declinações do Sol e de Júpiter para um observador em Saturno quando este evento ocorrer novamente, sabendo que a longitude eclíptica dos planetas na conjunção mais recente era de 19h.

Considere que o eixo de rotação de Saturno possui uma inclinação de $\epsilon = 27^\circ$ em relação a seu plano de translação, que as inclinações orbitais de Júpiter e Saturno são $i_J = 15,3^\circ$ e $i_S = 22,7^\circ$, os raios de suas órbitas $D_J = 5,2$ UA e $D_S = 9,6$ UA, e que as longitudes dos nodos ascendentes de ambos são $\Omega = 105^\circ$.

Considere todas as órbitas circulares.

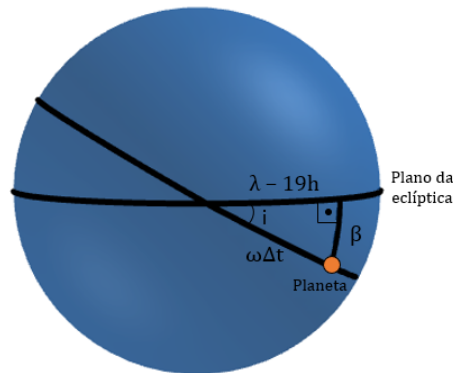
Solução:

Primeiramente calculamos os períodos dos 2 planetas a partir da Terceira Lei de Kepler:

$$T^2 = a^3$$

Obtendo $T_J = 11,9$ anos e $T_S = 29,7$ anos.

Agora precisamos descobrir quando ocorre o alinhamento. Como as órbitas possuem inclinação não nula, o método clássico não é mais válido. Precisamos então fazer uma análise mais intrincada por meio de trigonometria esférica:



Assim:

$$\cos i \cos \lambda = \sin \lambda \cot(\omega \Delta t) - \sin i \cot 90^\circ$$

O uso dessa equação para os 2 planetas gera um sistema com mais de uma solução, então devemos testá-las até achar a correta (lembre-se que queremos a menor possível). Disso, $\Delta t = 19,79$ anos.

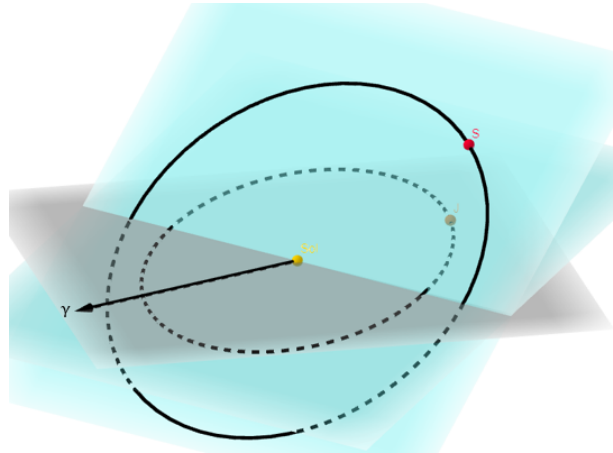
A partir disto, podemos encontrar a posição dos planetas em relação ao Sol na próxima conjunção a partir de seus deslocamentos (θ).

$$\theta = \omega \Delta t = 239,9^\circ$$

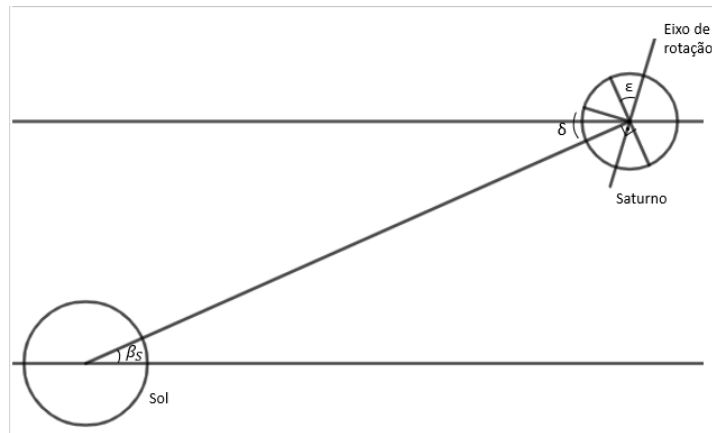
O que corresponde a elevações angulares(β) de:

$$\frac{\sin \beta}{\sin i} = \frac{\sin(\omega \Delta t - 180^\circ)}{\sin 90^\circ}$$

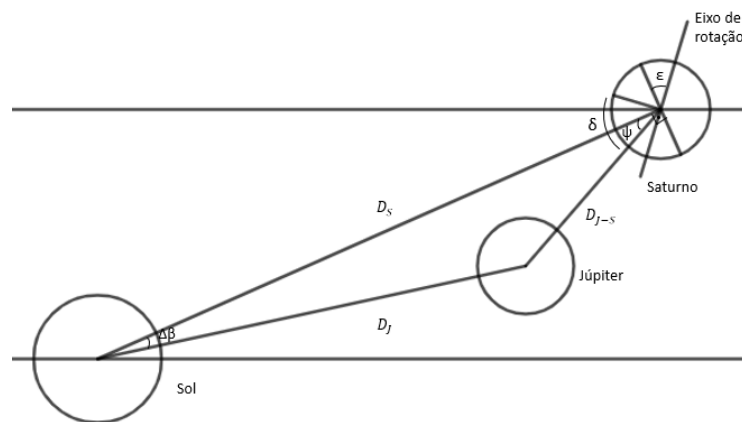
$$\beta_J = 13,2^\circ \text{ e } \beta_S = 19,5^\circ$$



Podemos agora partir para a pergunta da questão e calcular as declinações. O caso do Sol é mais direto e está ilustrado abaixo:



Assim, a partir da geometria da imagem, temos que $\delta_{\odot} = -\epsilon = -27^{\circ}$.
O caso de Júpiter tem uma geometria um pouco mais intrincada:



Disso tiramos:

$$D_{J-S}^2 = D_J^2 + D_S^2 - 2D_J D_S \cos \Delta\beta$$

$$\frac{D_{J-S}}{\sin \Delta\beta} = \frac{D_J}{\sin \psi}$$

Assim, obtemos finalmente que $\delta_S = \delta_{\odot} - \psi = -34,3^\circ$

4. **JuvSat** Após longos anos de trabalho, Juvelinho muda-se para Lagos ($\varphi = 6,52^\circ N$), na Nigéria, com o intuito de aproveitar sua aposentadoria. No entanto, não demora muito para que ele sinta falta de seus experimentos astronômicos e decide lançar um satélite, o JuvSat. O cientista opta por uma órbita circular de período T igual ao de rotação da Terra, com inclinação $\varepsilon = 30^\circ$ em relação ao Equador. O lançamento foi planejado de tal modo que o nodo ascendente da órbita se encontre na direção do ponto vernal. Além disso, no momento em que o satélite passa pelo nodo ascendente, encontra-se sobre o meridiano local de Juvelinho. Para os itens que seguem, deixe suas respostas em função das variáveis anteriormente apresentadas, isto é, apenas substitua o valor numérico quando explicitamente solicitado.

- (1 ponto)** Determine as coordenadas equatoriais geocêntricas (α_g, δ_g) do satélite em função do tempo. Considere $t = 0$ o instante de passagem pelo nodo ascendente.
- (3 pontos)** Com base na expressão anterior, indique quantas vezes o satélite passa sobre o meridiano local do observador ao percorrer a órbita completa.

Ainda entediado, Juvelinho resolve lançar seu segundo satélite, o JuvSat2, mantendo todas as condições da órbita do JuvSat, exceto pelo período, que passa a ser $T' = T/8$.

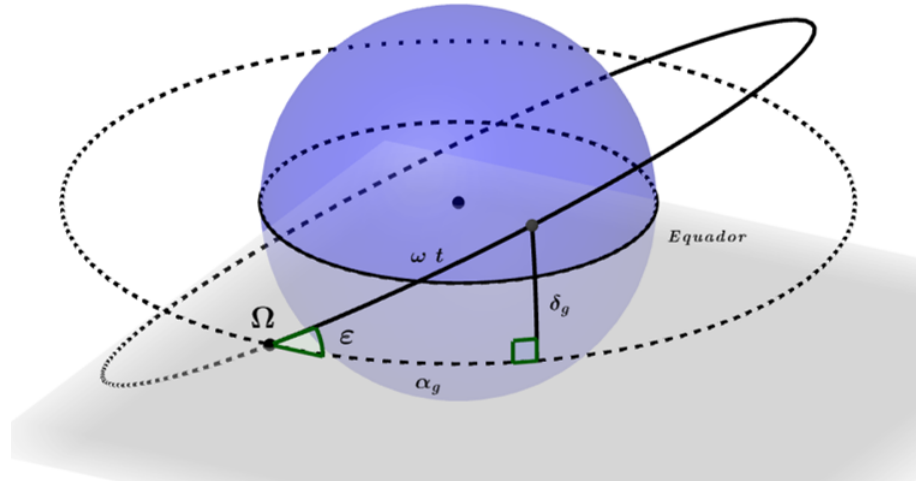
- (4 pontos)** Calcule as coordenadas de declinação e ascensão reta aparentes (α_a, δ_a) do JuvSat2, quando medidas por Juvelinho, ou seja, em seu referencial em Lagos, em função do tempo. Considere, novamente, $t = 0$ como o instante de passagem do satélite pelo nodo ascendente. Restrinja a análise ao domínio de tempo $[0, T'/4]$ (isto é, $[0, T/32]$).
- (2 pontos)** Usando as expressões do item anterior, obtenha os valores numéricos das coordenadas aparentes do JuvSat-2 para $t = T'/8$. Nesse instante de tempo, Juvelinho avista o satélite angularmente mais próximo de qual das estrelas da tabela abaixo?

Desconsidere os efeitos de altitude da cidade de Lagos.

Estrela	Ascensão Reta	Declinação
α And	00h09m31s	+29°12'37"
α Tau	4h37m10s	+16°33'07"
α Ari	2h08m24s	+23°33'54"
α Cet	03h03m25s	+4°10'27"
β Cet	00h44m41s	-17°52'3"

Solução:

a) Considerando o esquema abaixo, tem-se:



Primeiramente, da Lei dos Quatro Elementos, calcula-se α_g :

$$\cos \alpha_g \cos \varepsilon = \cot \omega t \sin \alpha_g - \cot 90^\circ \sin \varepsilon \iff$$

$$\boxed{\alpha_g = \arctan [\cos \varepsilon \tan \omega t]}$$

Devido ao domínio da função arctan, a expressão deve ser dividida:

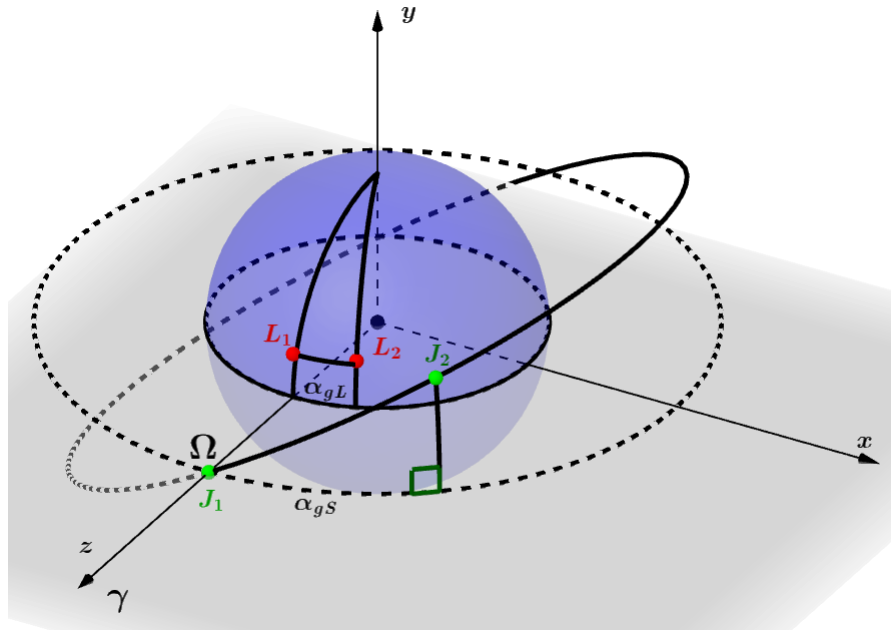
$$\begin{cases} \alpha_g = \arctan [\cos \varepsilon \tan \omega t], & 0 \leq t < T/4 \\ \alpha_g = \arctan [\cos \varepsilon \tan \omega t] + 180^\circ, & T/4 < t < 3T/4 \\ \alpha_g = \arctan [\cos \varepsilon \tan \omega t] + 360^\circ, & 3T/4 < t \leq T \end{cases}$$

Já δ_g pode ser obtido da Lei dos Senos para triângulos esféricos:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta_g} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \omega t} \iff$$

$$\boxed{\delta_g = \arcsin [\sin \varepsilon \sin \omega t]}$$

b) Considerando o sistema de coordenadas O_{xyz} , sendo $O \equiv$ *centro da Terra* e o eixo z apontando sempre para o Ponto Vernal, tem-se



Para que o satélite esteja sobre o Meridiano Local de Juvelhinho, as coordenadas geocêntricas α_g do JuvSat e de Lagos devem ser iguais, sendo descritas pelas expressões;

$$\begin{cases} \tan \alpha_{gS} = \cos \varepsilon \tan \omega t \\ \alpha_{gL} = \omega_{\oplus} t \end{cases}$$

Do enunciado, $\omega_{\oplus} = \omega = \frac{2\pi}{T}$. Assim, para haver passagem sobre o Meridiano Local:

$$\tan \omega_{\oplus} t = \tan \omega t = \cos \varepsilon \tan \omega t$$

Como $\cos \varepsilon \neq 1$

$$\tan \omega t \iff \omega t = 0 \text{ ou } \pi \iff \begin{cases} t = 0 \text{ ou} \\ t = T/2 \end{cases}$$

Há ainda um outro par de soluções não tão triviais. São os casos em que $\omega t = \pi/2$ ou $3\pi/2$, que ocorrem em $T/4$ e $3T/4$, respectivamente. Nessa situação,

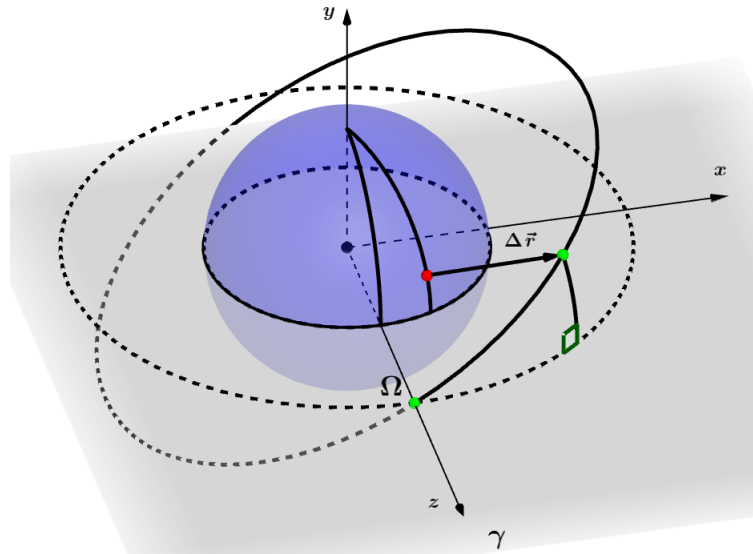
$$\begin{cases} t = T/4 \implies \tan \omega t \longrightarrow \infty \implies \alpha_{gS} = \pi/2 = \alpha_{gL} \\ t = 3T/4 \implies \tan \omega t \longrightarrow \infty \implies \alpha_{gS} = 3\pi/2 = \alpha_{gL} \end{cases}$$

Logo, a passagem meridiano ocorre **4 vezes** ao longo de uma órbita.

- c) Do referencial do item anterior, calculam-se as coordenadas de Juvelhinho e do JuvSat em relação ao Centro da Terra:

$$\begin{cases} L = (R_{\oplus} \cos \varphi \sin \omega_{\oplus} t, R_{\oplus} \sin \varphi, R_{\oplus} \cos \varphi \cos \omega_{\oplus} t) \\ S = (r \cos \delta_g \sin \alpha_g, r \sin \delta_g, r \cos \delta_g \cos \alpha_g) \end{cases}$$

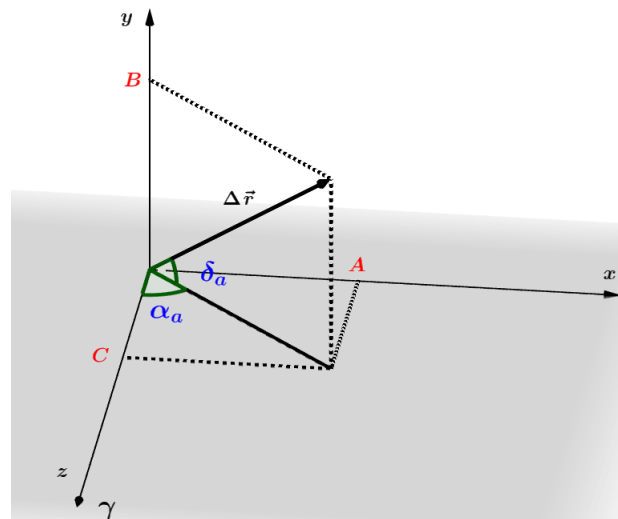
em que $r \equiv$ raio da órbita de JuvSat2. Da figura abaixo,



seja $\Delta\vec{r}$ o vetor que indica a posição de S (satélite) em relação a L (Lagos/Juvelinho). Então,

$$\Delta\vec{r} = S - L = (r \cos \delta_g \sin \alpha_g - R_{\oplus} \cos \varphi \sin \omega_{\oplus} t, \\ r \sin \delta_g - R_{\oplus} \sin \varphi, \\ r \cos \delta_g \cos \alpha_g - R_{\oplus} \cos \varphi \cos \omega_{\oplus} t)$$

Por simplicidade, seja $\Delta\vec{r} = (A, B, C)$. A direção desse vetor permite inferir as coordenadas equatoriais aparentes do satélite, quando vistas de Lagos. Esquematicamente:



$$\begin{cases} \tan \alpha_a = \frac{A}{C} \iff \alpha_a = \arctan\left(\frac{A}{C}\right) \\ \tan \delta_a = \frac{B}{\sqrt{A^2 + C^2}} \iff \delta_a = \arctan\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + C^2}}\right) \end{cases}$$

Sendo as variáveis auxiliares definidas

$$\begin{cases} A = r \cos \delta_g \sin \alpha_g - R_{\oplus} \cos \varphi \sin \omega_{\oplus} t \\ B = r \sin \delta_g - R_{\oplus} \sin \varphi \\ C = r \cos \delta_g \cos \alpha_g - R_{\oplus} \cos \varphi \cos \omega_{\oplus} t \end{cases}$$

que dependem das coordenadas encontradas no item (a) e da velocidade angular:

$$\begin{cases} \alpha_g = \arctan [\cos \varepsilon \tan \omega t] \\ \delta_g = \arcsin [\sin \varepsilon \sin \omega t] \\ \omega = \frac{2\pi}{T/8} = \frac{16\pi}{T} \\ \omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

d) Agora, basta substituir os valores do enunciado e realizar os cálculos.

- $\omega = \frac{2\pi}{10770,5} = 5,0833 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$
- $R_{\oplus} = 6,370 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $t = T/64 = 1346,3125 \text{ s}$
- $r = \sqrt{\frac{T^2 G M_{\oplus}}{256\pi^2}} = 1,0543 \cdot 10^7 \text{ m}$
- $\varepsilon = 30^\circ$
- $\omega_{\oplus} t = 5,625^\circ$
- $\varphi = +6,52^\circ$

Desse modo, obtém-se $(\alpha_g, \delta_g) = (40,8934^\circ, 20,7048^\circ)$ e, portanto,

$$\begin{cases} \alpha_a = 78,787^\circ = 5h15min \\ \delta_a = +26,79^\circ \end{cases}$$

A separação angular θ entre o satélite e uma estrela é calculada pela expressão:

$$\cos \theta = \sin \delta_a \sin \delta_* + \cos \delta_a \cos \delta_* \cos (\alpha_a - \alpha_*)$$

Calcula-se:

$$\begin{cases} \alpha_{And} : 66,23^\circ \\ \alpha_{Tau} : 13,51^\circ \\ \alpha_{Ari} : 42,14^\circ \\ \alpha_{Cet} : 38,74^\circ \\ \beta_{Cet} : 79,33^\circ \end{cases}$$

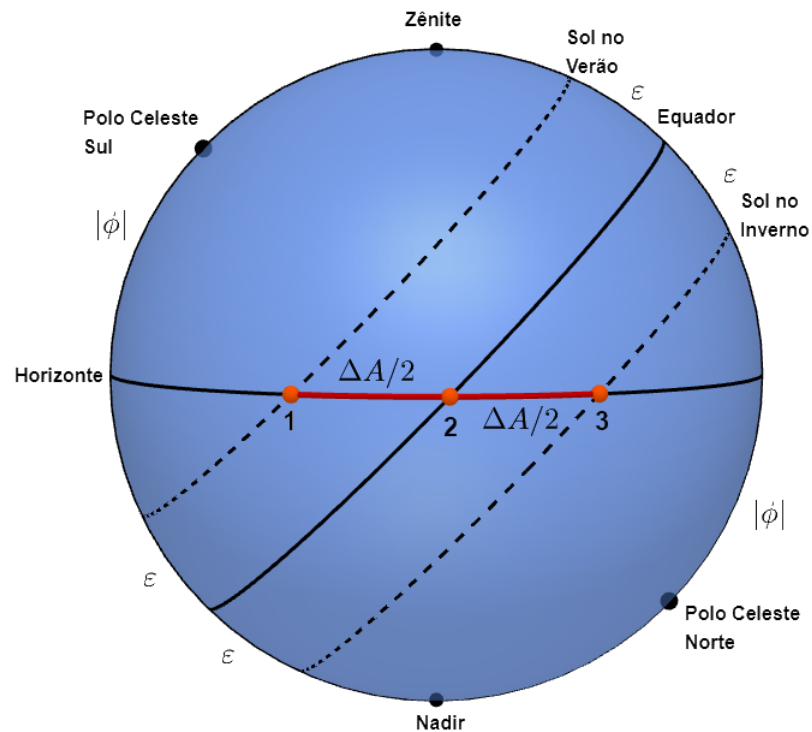
Portanto, JuvSat encontra-se mais próximo a $\boxed{\alpha_{Tau}}$.

5. **Nascer do Sol** Miguel vive em uma ilha isolada no oceano pacífico sul, em uma longitude $\lambda = 176^\circ 09' 37,7'' W$. Ao longo do ano, o local onde o Sol nasce visto por Miguel varia $\Delta A = 67^\circ 38'$ no horizonte. Para os dois primeiros itens, desconsidere a refração atmosférica. Com essas informações, descubra:

- a) A latitude ϕ e o nome da ilha. (Consulte o Google Earth ou software similar)
- b) O intervalo de horários em que o Sol nasce na ilha, dado o fuso horário peculiar $UT + 12^3/4$.
- c) Considerando a refração atmosférica, o tamanho do intervalo do item anterior iria diminuir, aumentar ou se manter constante?

Solução:

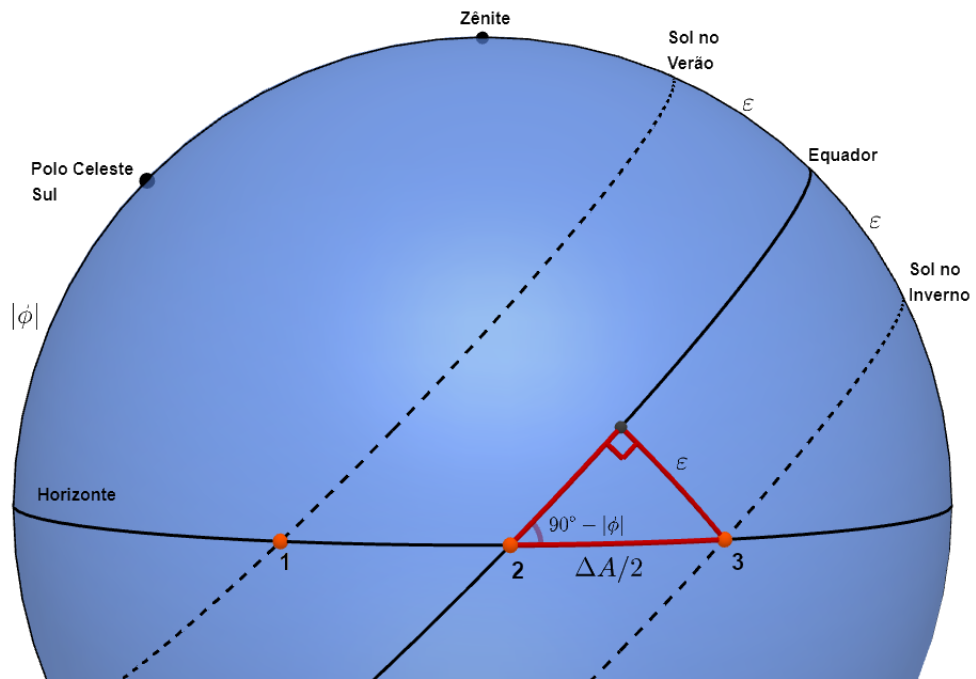
a) Primeiro, faremos um diagrama do problema:



Os pontos 1, 2 e 3 representam os pontos de nascer do Sol no solstício de verão, equinócios e solstício de inverno respectivamente. Dois círculos menores pontilhados foram desenhados para representar o caminho do Sol nos dois solstícios.

Chamamos a diferença de azimute ao longo do ano dada no enunciado de ΔA . Isso corresponde ao arco entre 1 e 3. Pela simetria do problema, o arco entre 1 e 2 tem medida igual ao entre 2 e 3, $\Delta A/2$.

Com essa informação, podemos encontrar o triângulo esférico para encontrar a latitude, em vermelho:



Usando a lei dos senos:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin (90^{\circ}-|\phi|)}=\frac{\sin \Delta A / 2}{\sin 90^{\circ}}$$

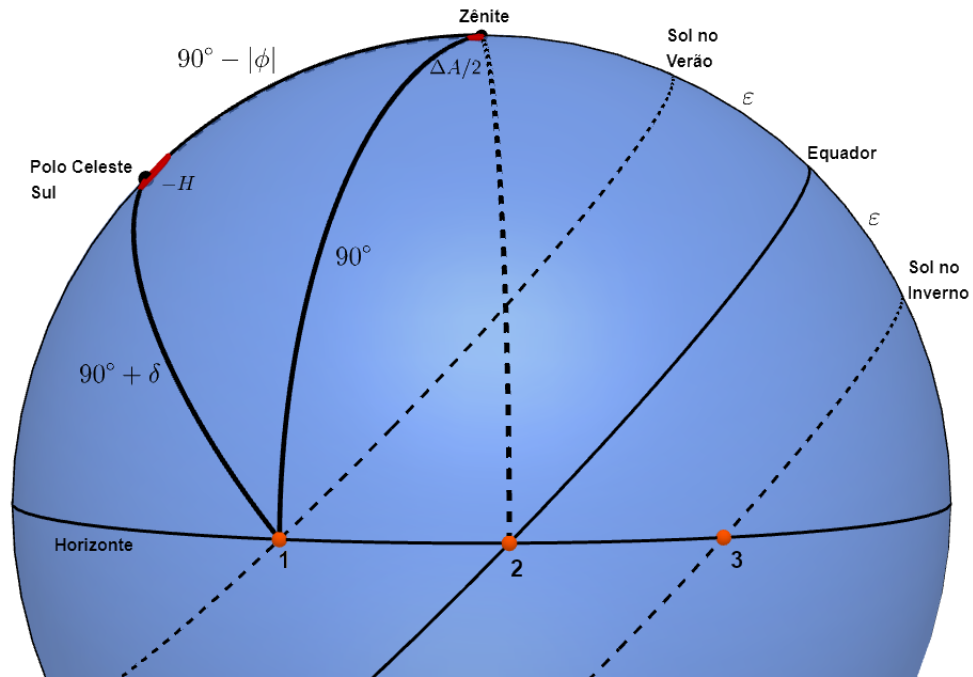
$$|\phi| = \cos^{-1} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sin \Delta A/2} \right)$$

Como Miguel está no hemisfério Sul, a latitude é negativa. Substituindo e resolvendo, obtemos:

$$\phi = -44^{\circ}21'$$

Procurando com a latitude e a longitude, encontramos a ilha de *Rangatira* ou South East Island, ou ainda a ilha logo ao sudeste dessa.

b) Novamente, fazendo um diagrama:



Usando a lei dos senos:

$$\frac{\sin(-H)}{\sin(90^\circ)} = \frac{\sin(90^\circ - \Delta A/2)}{\sin(90^\circ + \delta)}$$

Resolvendo para H :

$$H = -\sin^{-1} \left(\frac{\cos(\Delta A/2)}{\cos \delta} \right)$$

Substituindo $\delta = \pm \varepsilon$, obtemos $H = -4\text{h } 19\text{min } 38\text{s}$ para o solstício de inverno e $H = -7\text{h } 40\text{min } 22\text{s}$ para o solstício de verão.

O fuso horário $\text{UT}+12\frac{3}{4}$ é equivalente a $\text{UT}-11\frac{1}{4}$. Esse fuso ficaria na longitude $\lambda_0 = -180^\circ + \frac{3}{4} \cdot 15^\circ = -168^\circ 45'$.

A diferença entre λ_0 e a longitude da ilha é $\Delta\lambda = 7^\circ 24' 38''$. Logo, a hora civil está $7^\circ 24' 38'' = 29\text{min } 38\text{s}$ atrasada em relação à hora solar mais 12h.

Assim, o tempo civil é $TC = 12\text{h} + H + \Delta\lambda$ sendo H o ângulo horário do Sol, obtemos $TC = 8\text{h } 10\text{min}$ e $4\text{h } 49\text{min}$ para os dois solstícios.

Portanto, o intervalo de horários em que o Sol pode nascer é de 4h 49 min a 8 h 10 min.

- c) Nos dois solstícios, o Sol estaria a um ângulo r abaixo do horizonte ao nascer. Com essa refração o horário do nascer do Sol é adiantado em t .

A velocidade angular do Sol nos dois casos é $\omega \cos \varepsilon$, onde ω é a velocidade do movimento diurno no equador celeste.

Como os ângulos envolvidos são muito pequenos, podemos usar uma aproximação plana. Com isso, a componente vertical do movimento do Sol no tempo t é aproximadamente $r = \omega \cos \varepsilon t \times \cos |\phi|$.

Como r é constante, t é constante. Logo, os tempos do nascer do Sol variam pela mesma magnitude para os dois solstícios, não mudando o tamanho do intervalo.

Podemos confirmar esse resultado mais rigorosamente usando geometria analítica, fazendo a intersecção dos círculos menores envolvidos.

6. Carta Celeste

Parte A Traçando o Analema

Shelldon, grande astrônomo e engenheiro contemporâneo, estava fazendo uma avaliação de sistemas ópticos. Subitamente, durante a checagem de qualidade dos equipamentos, um espelho primário de 8,2 m de diâmetro caiu em sua cabeça, fazendo com que ele perdesse a memória. Agora, o pesquisador não sabia sua localização, época do ano e sobrenome – em mãos, ele possuía apenas um astrolábio e uma carta celeste do local, que projetava um momento de hora solar média $H_{\odot \text{médio}}$.

No verso de sua carta celeste, havia uma tabela com as coordenadas horizontais do Sol para cada mês do ano, visto por um observador naquela mesma localização. A única informação que Shelldon sabe é que ele está observando o céu de algum desses meses.

Data	Azimute	Altura
21 de Janeiro	+82°52'04"	+72°35'13"
21 de Fevereiro	+58°10'41"	+67°56'28"
21 de Março	+38°01'51"	+61°07'48"
21 de Abril	+0°20'04"	+54°56'43"
21 de Maio	+359°35'05"	+46°42'53"
21 de Junho	+1°16'53"	+43°35'34"
21 de Julho	+2°56'25"	+46°39'27"
21 de Agosto	+2°13'19"	+55°08'15"
21 de Setembro	+31°39'10"	+63°01'34"
21 de Outubro	+44°43'57"	+73°35'54"
21 de Novembro	+77°41'06"	+78°26'49"
21 de Dezembro	+76°07'24"	+76°07'24"

Utilizando a tabela e a carta celeste da página seguinte, resolva os itens a seguir

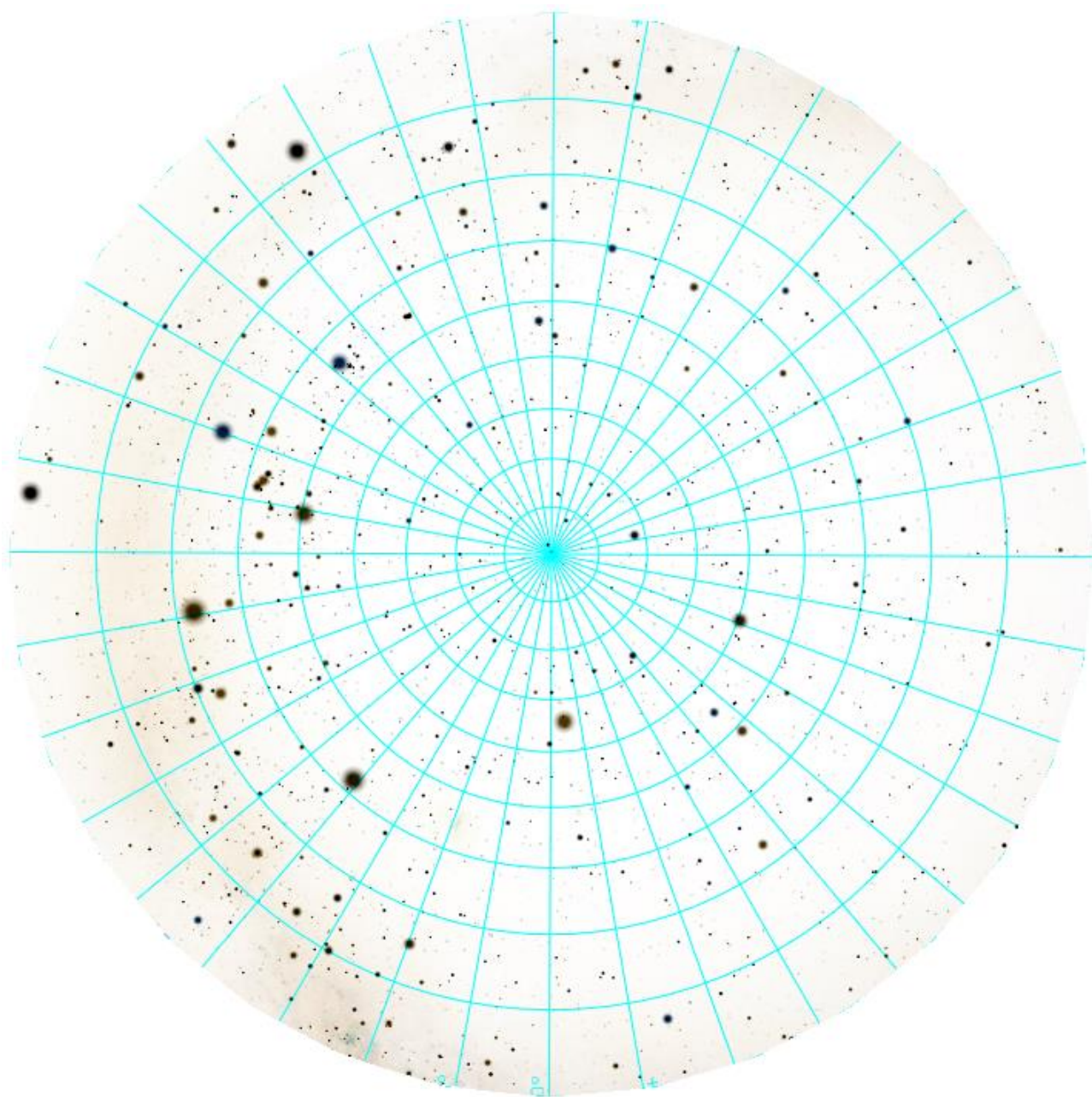
- (A.1) Marque as posições do Sol na carta e trace a caminho que ele percorre durante o ano. A figura formada é conhecida como “analema”.
- (A.2) Marque as posições do analema que indicam solstícios e equinócios. Em sua marcação, deixe claro qual o solstício (verão/inverno) e qual o equinócio (outono/primavera).
- (A.3) Estime a latitude do local de observação.

Parte B Que dia é hoje?

- (B.1) Na carta abaixo, trace a linha do equador (Eq) e a linha da eclíptica (EC).
- (B.2) Das informações no texto de apoio e da carta celeste, estime o mês de observação do céu acima.

Ao conferir em seu astrolábio, Shelldon chegou à conclusão que essa carta mostrava o céu do dia que ele estava observando.

- (B.3) Nesse caso, estime a declinação do Sol para essa data.



Solução:

Solução no arquivo .DOCX também postado