

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 6 problemas, todos com o mesmo peso
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 3". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 3".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.

Prazo: 01/06/2021 - 23h 59min

OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE
ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. Após um semestre cansativo e estressante, Bruno decidiu passar suas férias em um planeta desprovido de água e com apenas uma lua em uma estrela na galáxia de Andrômeda. A órbita da lua era elíptica e inclinada em relação ao Equador do planeta. Bruno, sempre curioso, decidiu determinar os instantes em que a lua cruza o Equador Celeste.

Considere que no instante $t = 0$ a lua está em sua máxima declinação ao norte e no periastro.

A massa da lua é irrelevante comparada à massa do planeta.

Essa questão deve ser resolvida algebricamente em função de constantes físicas e dos seguintes parâmetros:

- Massa do planeta (M_P)
- Semieixo maior da órbita da lua (a)
- Excentricidade da órbita da lua (e)

Solução:

Primeiramente, é importante determinar uma expressão para o semieixo menor em função do semieixo maior e da excentricidade utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = a^2 - (ae)^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

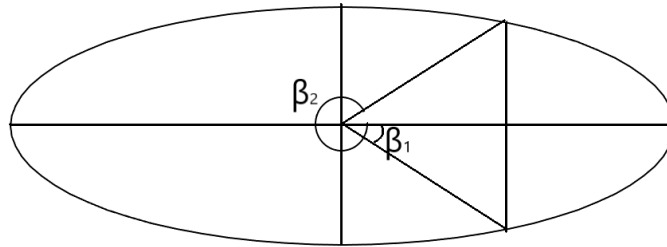
Além disso, é importante determinar o período orbital em função dos parâmetros fornecidos utilizando a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 * a^3}{GM_P}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_P}}$$

Como o planeta está em um dos focos da elipse, as intersecções da lua com o seu Equador celeste ocorrem sempre no *latus rectum* que contém o planeta. Dessa forma, com base na figura a seguir, é possível determinar os ângulos em que isso ocorre e a área compreendida entre a lua nesses ângulos e a posição inicial da lua:



É possível determinar o valor do ângulo β_1 :

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{l}{2c}\right)$$

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{b^2}{ac}\right)$$

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{1-e^2}{e}\right)$$

Agora, é possível calcular a área compreendida entre a posição inicial da lua (em que $\theta = 0$) e a lua em β_1 :

$$A'_1 = \frac{1}{2}ab \left[\arctan\left(\frac{a}{b} * \tan(\beta_1)\right) - \arctan\left(\frac{a}{b} * \tan(0)\right) \right]$$

$$A'_1 = \frac{1}{2}ab * \arctan\left(\frac{a}{b} * \tan(\beta_1)\right)$$

$$A'_1 = \frac{1}{2}ab * \arctan\left(\frac{a}{b} * \tan\left(\arctan\left(\frac{1-e^2}{e}\right)\right)\right)$$

$$A'_1 = \frac{1}{2}ab * \arctan\left(\frac{a}{b} * \frac{1-e^2}{e}\right)$$

$$A'_1 = \frac{1}{2}ab * \arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right)$$

Antes de utilizar a Segunda Lei de Kepler, é importante subtrair a área do triângulo da seção elíptica:

$$A_1 = A'_1 - A_t$$

$$A_1 = A'_1 - \frac{b^2c}{2a}$$

$$A_1 = A'_1 - \frac{a^2e(1-e^2)}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}ab * \arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - \frac{a^2e(1-e^2)}{2}$$

O próximo passo é dividir essa área pela área total da elipse:

$$r_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$r_1 = \frac{ab}{2\pi * ab} * \arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - \frac{a^2e(1-e^2)}{2\pi ab}$$

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} * \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - e\sqrt{1-e^2} \right]$$

Pela Segunda Lei de Kepler, o intervalo de tempo entre o periastro e a primeira intersecção é o produto entre a razão r_1 e o período. Como o periastro ocorre em $t = 0$, é possível determinar o instante da primeira intersecção:

$$t_1 = \frac{1}{2\pi} * \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - e\sqrt{1-e^2} \right] * 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_P}}$$

$$t_1 = \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\right) - e\sqrt{1-e^2} \right] \sqrt{\frac{a^3}{GM_P}}$$

Agora, é necessário calcular o instante da segunda intersecção, que corresponde basicamente ao intervalo t_1 subtraído do período orbital. Portanto, o instante t_2 seria o seguinte:

$$t_2 = T - \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right) - e\sqrt{1-e^2} \right] \sqrt{\frac{a^3}{GM_P}}$$

$$t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_P}} - \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right) - e\sqrt{1-e^2} \right] \sqrt{\frac{a^3}{GM_P}}$$

Dessa forma, a lua intersecta o Equador nos seguintes instantes:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM_P}} \left[k * 2\pi \pm \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right) - e\sqrt{1-e^2} \right] \right]$$

Vale lembrar que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \arctan \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \right) \leq \frac{\pi}{2}$$

2. Após passar pelo seu periélio ($r_p = 0,500 \text{ U.A.}$), um objeto misterioso colide com a Terra e ambos seguem juntos no espaço.

- (a) **(5 pontos)** Considerando a órbita do objeto parabólica, calcule a excentricidade e o período orbital do conjunto após a colisão.
- (b) **(5 pontos)** Considerando a órbita do objeto hiperbólica, calcule qual deve ser o valor mínimo de sua excentricidade orbital para que o conjunto, após a colisão, escape do campo gravitacional do Sol.

Dados: Considere a órbita da Terra circular, que esse objeto tem $2/5$ da massa do planeta e que translação dele é no mesmo sentido e plano que a da Terra. Além disso, ignore a atração gravitacional da Terra sobre o objeto.

Solução:

- (a) Inicialmente podemos calcular a velocidade do objeto no periélio, v_p , e quando estiver prestes a colidir com a Terra, v_a ($r_{\oplus} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$):

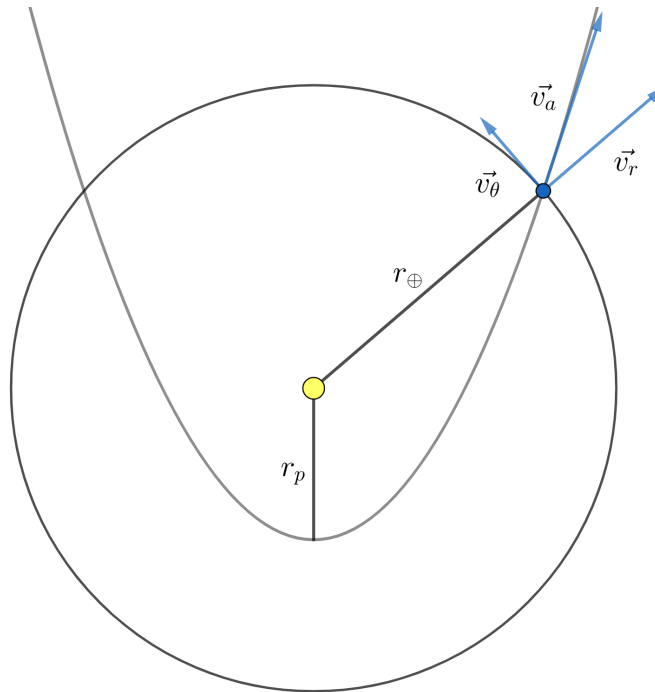
$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{\odot}}{r_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{r_p}}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{r_{\oplus}}}$$

Utilizando a conservação do momento angular do objeto, podemos decompor v_a em duas componentes: uma tangencial, v_{θ} , e uma radial, v_r :

$$v_p \cdot r_p = v_{\theta} \cdot r_{\oplus} \implies v_{\theta} = \frac{\sqrt{2 \cdot \mu \cdot r_p}}{r_{\oplus}}$$

$$v_r = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu}{r_{\oplus}} - \frac{2 \cdot \mu \cdot r_p}{r_{\oplus}^2}}$$



Conservando o momento linear na colisão inelástica (m é a massa do objeto e M é a massa da Terra):

$$m \cdot v_{\theta} + M \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_{\oplus}}} = (M + m) \cdot v'_{\theta}$$

$$m \cdot v_r = (M + m) \cdot v'_r$$

Onde v'_{θ} e v'_r são, respectivamente, a velocidade tangencial e a radial do conjunto.

Como a energia orbital do objeto é nula e a da Terra é negativa, a energia orbital do conjunto após a colisão também vai ser negativa (a órbita final será elíptica). Portanto, podemos calcular a velocidade total e, consequentemente, determinar o semi-eixo maior por:

$$v' = \sqrt{v_{\theta}^2 + v_r^2} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$v'^2 = \frac{1}{(M+m)^2} \cdot \left[\left(m \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \mu \cdot r_p}}{r_{\oplus}} + M \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_{\oplus}}} \right)^2 + \frac{2 \cdot \mu \cdot m^2}{r_{\oplus}} \cdot \left(1 - \frac{r_p}{r_{\oplus}} \right) \right]$$

$$v'^2 = \frac{1}{(M+m)^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot \mu \cdot m^2 \cdot r_p}{r_{\oplus}^2} + 2 \cdot M \cdot m \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r_p}{r_{\oplus}^3}} + \frac{\mu \cdot M^2}{r_{\oplus}} + \frac{2 \cdot \mu \cdot m^2}{r_{\oplus}} \cdot \left(1 - \frac{r_p}{r_{\oplus}} \right) \right]$$

$$\frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{1}{a} = \frac{1}{(M+m)^2} \cdot \left[2 \cdot M \cdot m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r_p}{r_{\oplus}^3}} + \frac{M^2}{r_{\oplus}} + \frac{2 \cdot m^2}{r_{\oplus}} \right]$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_{\oplus}} \cdot \left[2 - \frac{1}{(M+m)^2} \cdot \left(2 \cdot M \cdot m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot r_p}{r_{\oplus}^3}} + M^2 + 2 \cdot m^2 \right) \right]$$

$$\implies a \approx 1,089 \text{ U.A.}$$

Utilizando a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \implies T \approx 1,136 \text{ anos} \implies \boxed{T \approx 415 \text{ dias}}$$

Conservando o momento angular do conjunto no momento da colisão com o do periélio:

$$r_{\oplus} \cdot v'_{\theta} = a \cdot (1 - e) \cdot \sqrt{\mu \left(\frac{2}{a \cdot (1 - e)} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$\frac{r_{\oplus}}{M+m} \cdot \left(m \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \mu \cdot r_p}}{r_{\oplus}} + M \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_{\oplus}}} \right) = \sqrt{\mu \cdot a \cdot (1 - e^2)}$$

$$\frac{m \cdot \sqrt{2 \cdot r_p} + M \cdot \sqrt{r_{\oplus}}}{M+m} = \sqrt{a \cdot (1 - e^2)}$$

$$\implies e = \sqrt{1 - \frac{1}{a} \left[\frac{m \cdot \sqrt{2 \cdot r_p} + M \cdot \sqrt{r_{\oplus}}}{M+m} \right]^2}$$

$$\implies \boxed{e \approx 0,286}$$

(b) Realizando os mesmos passos do item anterior e utilizando que $r_p = a \cdot (e - 1)$, obtemos:

$$v_p = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_p} + \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu \cdot (e + 1)}{r_p}}$$

$$v_a = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_{\oplus}} + \frac{e - 1}{r_p} \right)}$$

$$v_{\theta} = \frac{\sqrt{\mu \cdot r_p \cdot (e + 1)}}{r_{\oplus}}$$

$$v_r = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r_{\oplus}} + \frac{e-1}{r_p} \right) - \frac{\mu \cdot r_p \cdot (e+1)}{r_{\oplus}^2}}$$

Pela conservação de momento linear:

$$v'^2 = \left[\frac{1}{M+m} \cdot \left(m \cdot v_{\theta} + M \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_{\oplus}}} \right) \right]^2 + \left[\frac{m \cdot v_r}{M+m} \right]^2$$

Para que o sistema escape do campo gravitacional do Sol:

$$v'^2 = \frac{2 \cdot \mu}{r_{\oplus}}$$

Portanto:

$$\frac{r_p \cdot (e+1)}{r_{\oplus}} + \frac{2 \cdot M}{m} \cdot \sqrt{\frac{r_p \cdot (e+1)}{r_{\oplus}}} + \frac{M^2}{m^2} + 2 + (e-1) \cdot \frac{r_{\oplus}}{r_p} - \frac{r_p \cdot (e+1)}{r_{\oplus}} = \frac{2 \cdot (M+m)^2}{m^2}$$

Pelos dados do enunciado, temos $\frac{M}{m} = \frac{5}{2}$, $\frac{r_p}{r_{\oplus}} = \frac{1}{2}$ e utilizando $x = \sqrt{e+1}$:

$$5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot x + \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 2 + 2 \cdot x^2 - 4 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$x^2 + \frac{5}{\sqrt{8}} \cdot x - \frac{81}{8} = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$x \approx 2,4186$$

E, conseqüentemente, podemos obter o valor da excentricidade mínima da órbita do objeto misterioso:

$$\Rightarrow \boxed{e \approx 4,85}$$

3. Após uma guerra nuclear e um experimento fracassado de geoengenharia no final do século XXII, o planeta Terra tornou-se um lugar inabitável. Uma nave inicialmente em órbita geoestacionária tem esperanças de escapar para Titã, uma próspera colônia humana.

Para economizar combustível, os tripulantes da nave pretendem usar uma órbita de transferência Hohmann até Júpiter e depois um estilingue gravitacional no planeta, antes de prosseguirem para o satélite de Saturno.

- (3 pontos)** Obtenha uma expressão para a variação no módulo da velocidade Δv causada por um estilingue gravitacional em uma nave com velocidade inicial v_0 que faz um ângulo θ com a velocidade orbital de Júpiter, v_J .
- (0,5 ponto)** Para a missão ter sucesso, o impulso inicial deve ser dado no mesmo sentido da translação da Terra ou no sentido oposto? Explique o seu raciocínio.
- (3 pontos)** A nave tem combustível suficiente para um impulso de até 8×10^4 m/s na velocidade dela. A tripulação conseguirá escapar seguindo essa trajetória até os arredores de Titã? Justifique.

- (d) **(0,5 ponto)** Essa trajetória seria realmente o método mais econômico de ir a Titã? Explique brevemente.
- (e) **(3 pontos)** Suponha que o feito seja possível. Adotando um referencial heliocêntrico anti-horário com $\theta = 0$ para a Terra logo antes da nave iniciar a viagem, calcule a posição angular de Saturno θ_S quando a nave se aproxima de Saturno.

Dados:

- Semieixo maior de Júpiter, $a_J = 5,204$ UA
- Semieixo maior de Saturno, $a_S = 9,582$ UA
- Considere que todas as órbitas são coplanares com as dos planetas circulares, e que a nave precisa só chegar aos arredores de Saturno para ser resgatada.

Solução:

- (a) Fazendo diagramas da situação no referencial do planeta e no referencial do Sol:

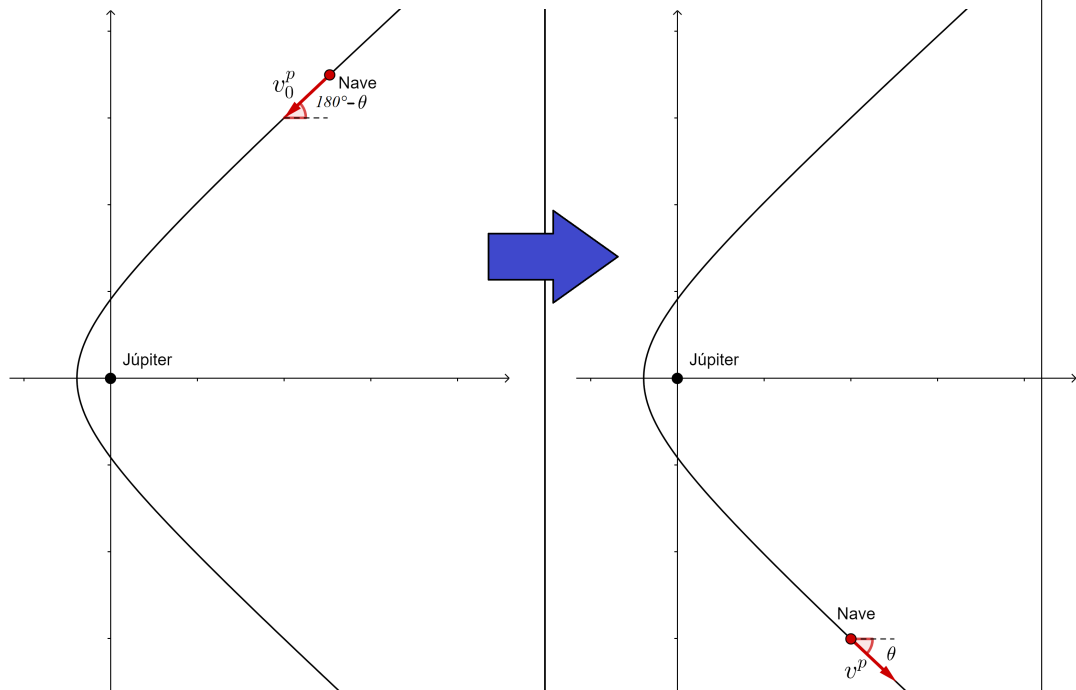


Figura 1: Referencial de Júpiter

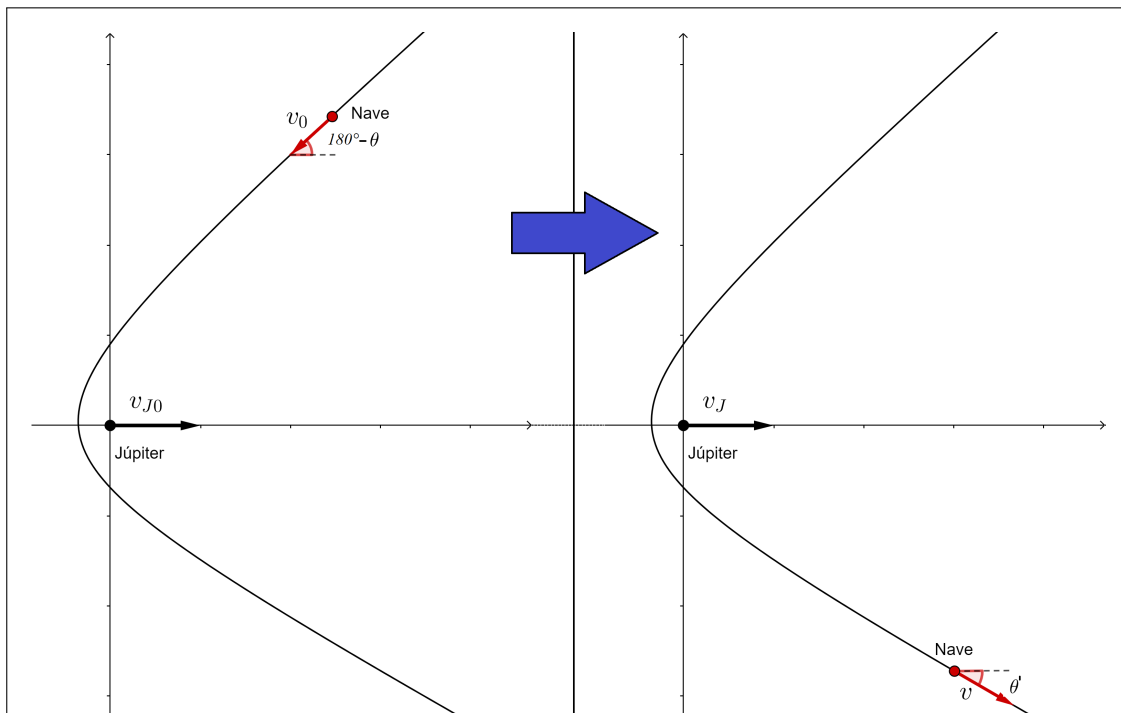


Figura 2: Referencial do Sol

No referencial de Júpiter, a nave faz uma órbita hiperbólica simétrica no eixo x da figura. Assim, $v_0^p = v^p$. Para o referencial do Sol, Júpiter tem uma velocidade v_J , e a órbita fica distorcida.

Definimos as direções $\hat{x}$ como a horizontal e $\hat{y}$ como a vertical. Pela simetria do problema, $v_{0y} = v_y$ no referencial do Sol.

Para a direção $\hat{x}$, usaremos a conservação da energia e do momento linear:

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m_J v_{J0}^2}{2} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{m_J v_J^2}{2} \\ -mv_{x0} + m_J v_{J0} &= mv_x + m_J v_J \end{aligned}$$

onde usamos m e m_J como as massas da nave e de Júpiter, respectivamente.

Substituindo $v_0^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2$ e $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ na equação da energia:

$$\begin{aligned} \frac{m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)}{2} + \frac{m_J v_{J0}^2}{2} &= \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{m_J v_J^2}{2} \\ -mv_{x0} + m_J v_{J0} &= mv_x + m_J v_J \end{aligned}$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} m(v_{x0}^2 - v_x^2) &= m_J(v_J^2 - v_{J0}^2) \\ -m(v_{x0} + v_x) &= m_J(v_J - v_{J0}) \end{aligned}$$

Usando a propriedade $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ e dividindo uma equação pela outra:

$$v_x = v_J + v_{J0} - v_0 \cos(\theta)$$

onde substituímos $v_{x0} = -v_0 \cos(\theta)$.

Como a massa de Júpiter é muito maior que a da nave, $v_J \approx v_{J0}$. Assim:

$$v_x = -v_0 \cos(\theta) + 2v_J$$

Calculando Δv :

$$\begin{aligned} \Delta v &= v - v_0 \\ &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - v_0 \\ &= \sqrt{(2v_J - v_0 \cos(\theta))^2 + v_0^2 \sin^2(\theta)} - v_0 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\Delta v = \sqrt{v_0^2 + 4v_J^2 - 4v_0 v_J \cos(\theta)} - v_0$$

Note que esse valor é máximo quando $\theta = 180^\circ$.

(b) Fazendo novamente um diagrama da situação:

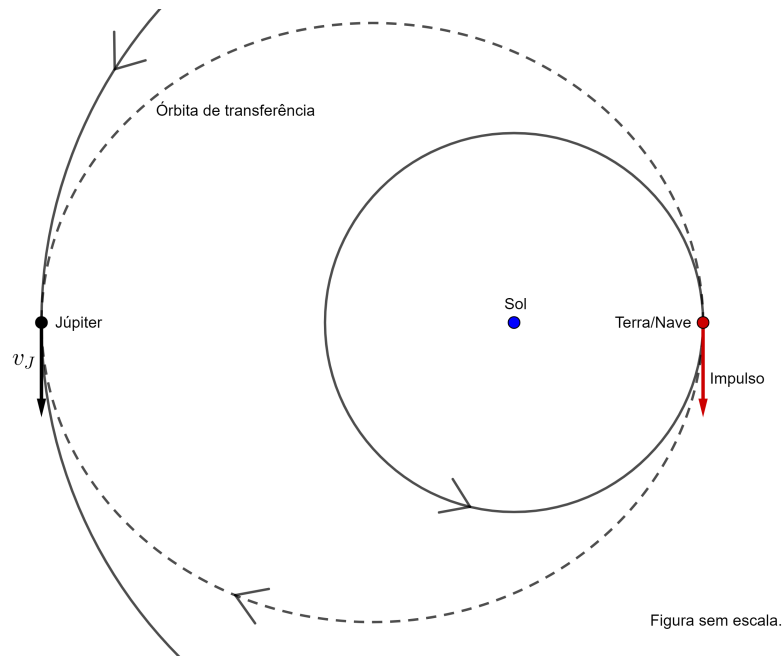


Figura 3: Diagrama da transferência

O efeito estilingue na nave tem de aumentar a velocidade da nave para alcançar Titã e Saturno. Assim, a velocidade da nave tem de estar oposta à velocidade de Júpiter na hora da manobra.

Portanto, como no diagrama, a órbita de transferência será no sentido horário. Como a velocidade de translação da Terra é maior que a da órbita geoestacionária, o impulso

inicial tem de compensar e inverter essa velocidade, ou seja, no sentido oposto ao da translação da Terra.

Nota: O autor da questão não percebeu que é possível uma órbita hiperbólica (que atinge Saturno) depois da órbita de Hohmann com impulso no mesmo sentido que a velocidade orbital terrestre. Assim, respostas usando essa alternativa foram consideradas a partir desse item, dado que o aluno calculou que a órbita se torna de fato hiperbólica.

- (c) A pergunta do item tem duas partes. Primeiro, precisamos verificar se esse impulso é suficiente para a transferência até Júpiter. Segundo, se o estilingue gravitacional em Júpiter possibilitará de fato a ida a Titã e Saturno.

Para minimizar o impulso, usaremos o momento em que a velocidade da órbita geoestacionária está exatamente oposta à velocidade de translação terrestre. Além disso, o semieixo maior da órbita de transferência é $a = (a_{\oplus} + a_J)/2 = 3,102 \text{ UA}$.

Pela terceira lei de Kepler, a órbita inicial geoestacionária tem semieixo maior:

$$a_0 = \sqrt[3]{P^2 \frac{GM_{\oplus}}{4\pi^2}} = 4,22 \times 10^7 \text{ m}$$

A velocidade dessa órbita é:

$$u_0 = \frac{2\pi a_0}{P} = 3,07 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Após escapar da esfera de influência da Terra, a nave deve atingir velocidade u' , dada pela equação vis-viva:

$$u' = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{1}{a} \right)} = 3,86 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Podemos conservar a energia do sistema nave-Terra entre logo depois do impulso e quando a nave escapa a Terra, onde a energia potencial gravitacional é zero:

$$\frac{m(u' + v_{\oplus})^2}{2} = \frac{mu^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{a_0}$$

onde representamos $v_{\oplus} = \sqrt{GM_{\odot}/a_{\oplus}} = 2,98 \times 10^4 \text{ m/s}$ como a velocidade orbital da Terra e u como a velocidade logo após o impulso.

Substituindo valores, obtemos $u = 6,85 \times 10^4 \text{ m/s}$. A variação da velocidade é $\Delta u = u - u_0 = 6,54 \times 10^4 \text{ m/s} < 8 \times 10^4 \text{ m/s}$. Assim, é possível entrar na transferência para Júpiter.

Agora, vamos verificar a segunda parte. Na equação do item a, nessa situação, $\theta = 180^\circ$ e $v = v_0 + 2v_J$. Podemos calcular v_0 pela equação vis-viva:

$$v_0 = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a} \right)} = 7,41 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Também, $v_J = \sqrt{GM_{\odot}/a_J} = 1,31 \times 10^4 \text{ m/s}$. Logo, $v = 3,35 \times 10^4 \text{ m/s}$.

Verificando o sinal da energia relacionada a uma órbita com essa velocidade:

$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{a_J} > 0$$

Podemos então concluir que a órbita é hiperbólica, e portanto que passará pela órbita de Saturno. Assim, é possível escapar até Titã com essa trajetória.

- (d) Precisamos fazer uma variação de velocidade contrária à velocidade orbital da Terra, como calculado no item anterior. Desperdiçamos uma parte considerável do impulso compensando a velocidade terrestre, e seria mais econômico aproveitar essa velocidade inicial para fazer uma transferência de Hohmann direto para Saturno. Logo, a trajetória não é a mais eficiente.
- (e) Após o estilingue gravitacional, a nave seguirá em órbita hiperbólica até encontrar Saturno. Encontrando a' por energia:

$$E = \frac{GM_{\odot}m}{2a'} = \frac{mv^2}{2} - \frac{2M_{\odot}m}{a_J}$$

Assim, $a' = 1,69 \times 10^{11}$ m. Chamaremos de v_{∞} a velocidade da órbita num ponto arbitrariamente longe do Sol. Podemos escrever as equações de conservação de momento angular e energia:

$$b'v_{\infty} = a_Jv$$

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{a_J}$$

com $b' = a'\sqrt{(e'^2 - 1)}$ onde e' é a excentricidade. Resolvendo o sistema, encontramos $e' = 5,61$.

A nave atingirá Saturno quando a distância dela até o Sol $r = a_S$. Assim, usando a equação polar da hipérbole:

$$r = \frac{a'(e'^2 - 1)}{1 + e' \cos \theta'}$$

encontramos $\theta' = 62,5^\circ$. Descartamos $\theta' = 360^\circ - 62,5^\circ$, pois esse ponto é anterior à passagem por Júpiter. O ângulo pedido é $\theta_S = 180^\circ + \theta'$. Portanto, $\theta_S = 243^\circ$.

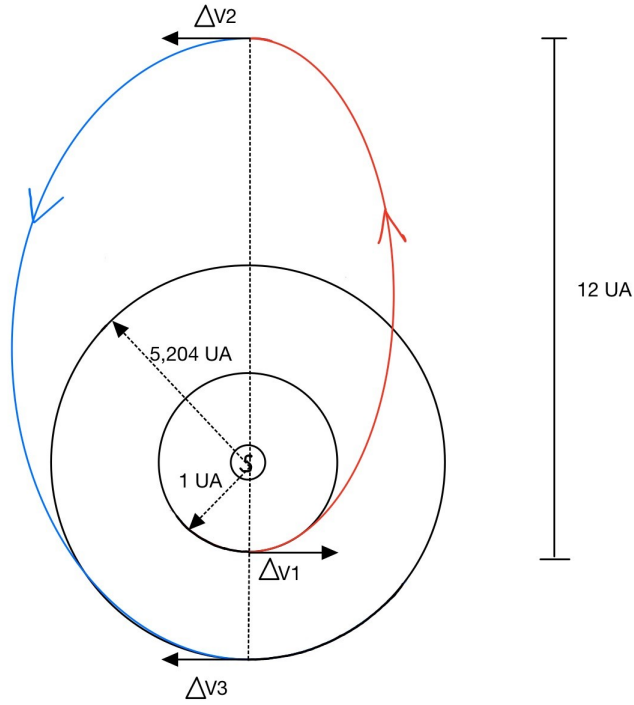
4. Cientistas do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) pretendem enviar um satélite, inicialmente na Terra, para realizar uma órbita ao redor de Júpiter. Para isso, eles vão utilizar uma transferência bi-elíptica, necessitando, portanto, que a aeronave receba 3 impulsos. Sabendo que o eixo maior da primeira órbita elíptica de transferência é de 12 U.A., responda:
- (a) **(5 pontos)** Esquematize esta manobra e calcule os 3 impulsos necessários ($\Delta V_1, \Delta V_2$ e ΔV_3), incluindo no desenho os pontos onde eles são realizados e seus sentidos.
- (b) **(3 pontos)** Calcule quanto tempo demoraria esse trajeto.
- (c) **(2 pontos)** Desenhe qual deve ser a configuração da Terra, Sol e Júpiter no início da manobra, deixando claro qual o ângulo entre a linha Sol-Terra e a Sol-Júpiter.

Dados:

- Raio da órbita de Júpiter, $r_J = 5,204$ UA
- Massa de Júpiter, $M_J = 1,898 \times 10^{27}$ kg
- Massa da Terra, $M_T = 5,9736 \times 10^{24}$ kg
- Considere que as órbitas dos planetas são coplanares e circulares

- Desconsidere a atração gravitacional entre o satélite e os planetas

Solução:



(a) Para Δv_1 temos:

$$v_{0,1} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_T}}$$

$$v_1 = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_T} - \frac{1}{a_1} \right)}$$

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{0,1} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_T}} \left(\sqrt{2 - \frac{r_T}{a_1}} - 1 \right)$$

$\Delta v_1 \approx 10571 \text{ m/s}$

Para Δv_2 temos:

$$v_{0,2} = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{2a_1 - r_T} - \frac{1}{a_1} \right)}$$

$$v_2 = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{2a_1 - r_T} - \frac{1}{a_2} \right)}$$

onde $a_2 = \frac{2a_1 + r_J - r_T}{2} = a_1 + \frac{r_J - r_T}{2}$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{0,2} \approx 3540 \text{ m/s}$$

Para Δv_3 temos:

$$v_{0,3} = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a_2} \right)}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_J}}$$

$$\Delta v_3 = v_3 - v_{0,3}$$

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_J}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_J}{a_2}} \right)$$

$$\Delta v_3 \approx -2162 \text{ m/s}$$

(b) O tempo total do trajeto é dado por:

$$\Delta t = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2}$$

Onde T_1 é o período da primeira órbita elíptica de transferência e T_2 , o da segunda. Podemos obter esses períodos pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = 1 \Rightarrow T_1 \approx 14,7 \text{ anos}$$

$$\frac{T_2^2}{a_2^3} = 1 \Rightarrow T_2 \approx 23,1 \text{ anos}$$

Com isso, calculamos Δt :

$$\Delta t \approx 18,9 \text{ anos}$$

(c) Vamos calcular o período de Júpiter:

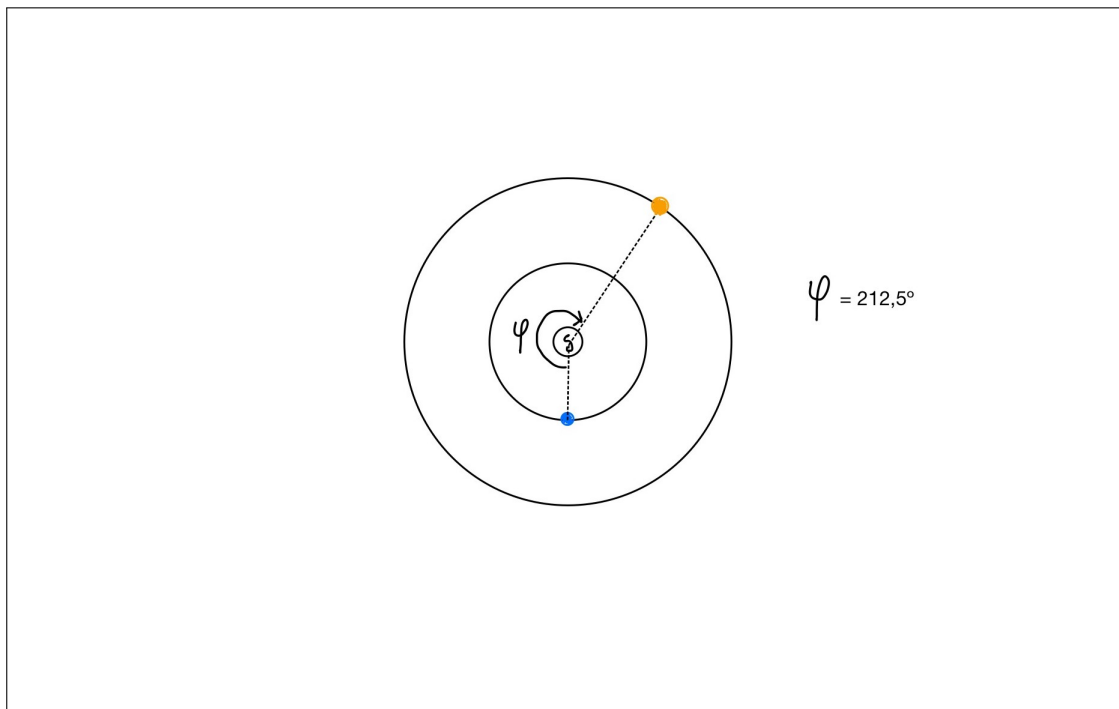
$$T_J = \sqrt{a_J^3}$$

Com isso, podemos achar o ângulo percorrido pela linha Sol-Júpiter durante o Δt :

$$\theta = \frac{\Delta t}{T_J} \cdot 360$$

$$\theta \approx 572,5^\circ$$

Logo, o ângulo entre a linha Sol-Terra e a Sol-Júpiter no início do trajeto vale $212,5^\circ$. Então a configuração inicial fica:



5. O cometa Hale-Bopp foi um dos maiores observados no século XX e um dos mais brilhantes das últimas décadas. Um fato curioso sobre ele é que o plano de sua órbita faz aproximadamente 90° com a eclíptica. É conhecido também que o ângulo entre o vetor-posição - em relação ao Sol - do cometa em seu ponto de periélio e o plano da eclíptica é de cerca de 50° . Sabendo que sua excentricidade é de cerca de 0,995 e seu semi-eixo maior é de aproximadamente 186 UA , responda os seguintes itens:

- Mostre que, nas proximidades do periélio, a órbita pode ser aproximada para uma parábola.
- Por quanto tempo (em anos) o cometa terá latitude eclíptica positiva em uma de suas revoluções orbitais? Use a simplificação demonstrada no item anterior e dê sua resposta com a precisão de dois algarismos significativos.
- No momento de sua passagem pelo periélio em meados de 4530, algo muito inesperado aconteceu: o cometa explodiu, de modo a se desintegrar em um número muito grande de partículas. Considere que, após a explosão, cada um dos fragmentos passou a se mover com uma velocidade totalmente radial de $v = 20,0 \text{ km/s}$ em relação ao centro de massa do objeto. Considerando que o cometa é esférico e possui densidade uniforme, calcule a porcentagem de partículas que não escaparão do campo gravitacional solar após a explosão. Desconsidere quaisquer interações entre as partículas.

Obs: esse problema é uma continuação do problema 9 da prova teórica da seletiva.

Solução:

- Primeiramente, vamos analisar a equação de uma elipse com semi-eixo maior a , excentricidade e e com um dos focos na origem $(0,0)$ e ou outro em $(0,2ae)$, :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y - ae)^2}{a^2} = 1$$

Como $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$:

$$\frac{x^2}{a^2(1-e^2)} + \frac{(y-2ae)^2}{a^2} = 1$$

Escrevendo a equação acima em função da distância do vértice inferior ao foco $f = a(1-e)$, podemos chegar à seguinte expressão:

$$\frac{x^2}{f(1+e)} + \frac{y^2 - 2aey}{a} = f(1+e)$$

Agora, vamos analisar a expressão da energia do sistema cometa-Sol:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{r} = -\frac{GM_{\odot}}{2a}$$

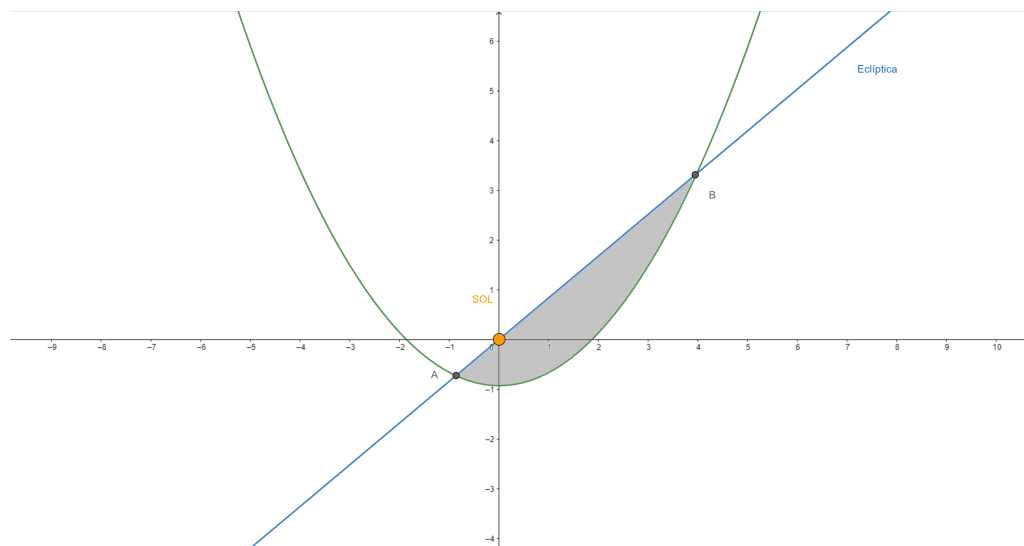
Perceba que se $r \ll a$, podemos simplificar a expressão levando-se em consideração que o módulo da energia total se tornará desprezível se comparado com o módulo da energia potencial do sistema:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{r} \approx 0$$

Portanto, nas proximidades do periélio, a equação da energia do corpo será aproximadamente a equação de energia de uma órbita parabólica. Assim, nosso objetivo será encontrar uma parábola que se aproxime da órbita elíptica nas proximidades do periélio. Para isso, vamos fixar o valor da distância vértice-foco f e vamos fazer $a \rightarrow \infty$ (e, portanto, $e = 1 - \frac{f}{a} \rightarrow 1$). Essa aproximação é válida já que a excentricidade do sistema é próxima de 1 e o valor do semi-eixo é grande o suficiente para pontos na proximidade do Sol. Assim, podemos chegar à seguinte equação que nos dá a parábola aproximada:

$$y = \frac{x^2}{4f} - f$$

- (b) A eclíptica pode ser representada pela reta $y = \tan(40) \cdot x$, pois passa pela origem e faz um ângulo de 50° com o eixo y . Portanto, teremos a seguinte representação:



Precisamos encontrar a área A hachurada da figura acima, que é área varrida pelo vetor-posição do cometa enquanto sua latitude eclíptica é maior que zero. Para isso, precisamos, primeiro, dos valores de x_A e x_B . Para tal, basta fazer:

$$\frac{x^2}{4f} - f = \tan(40) \cdot x \rightarrow \begin{cases} x_A = -0,867 \\ x_B = +3,989 \end{cases}$$

Agora, basta resolvermos a seguinte integral:

$$A \approx \int_{x_A}^{x_B} \tan(40) \cdot x \, dx - \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{x^2}{4f} - f \right) dx$$

$$A \approx \int_{x_A}^{x_B} \left(\tan(40) \cdot x - \frac{x^2}{4f} + f \right) dx$$

$$A \approx \left(f \cdot x + \tan(40) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12f} \right)_{x_A}^{x_B}$$

$$A \approx 5,13$$

Pela Terceira Lei de Kepler, podemos encontrar o período orbital do cometa:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \rightarrow T \approx 2537 \text{ anos}$$

Por fim, utilizando a lei das Áreas:

$$\frac{A}{A_{\text{ellipse}}} = \frac{A}{\pi ab} = \frac{t}{T}$$

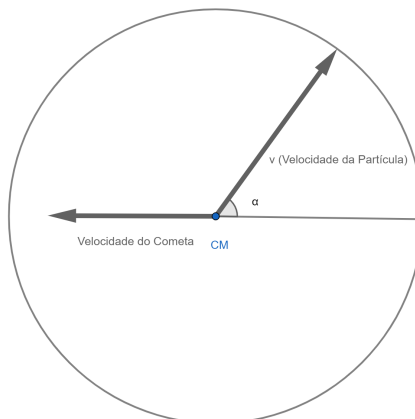
Resolvendo a equação acima, encontramos:

$$t \approx 1,2 \text{ anos}$$

- (c) Para que escape do Sistema Solar, a partícula deve ter ao menos uma órbita parabólica. Portanto, a velocidade em relação ao sol para que a partícula não escape será:

$$v_{\text{total}} < \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{f}} = v_{\text{lim}} \approx 43,7 \text{ km/s}$$

A velocidade de uma partícula em relação ao Sol é dada pela soma vetorial da velocidade v em relação ao cometa e a velocidade orbital do cometa v_c em relação ao Sol.



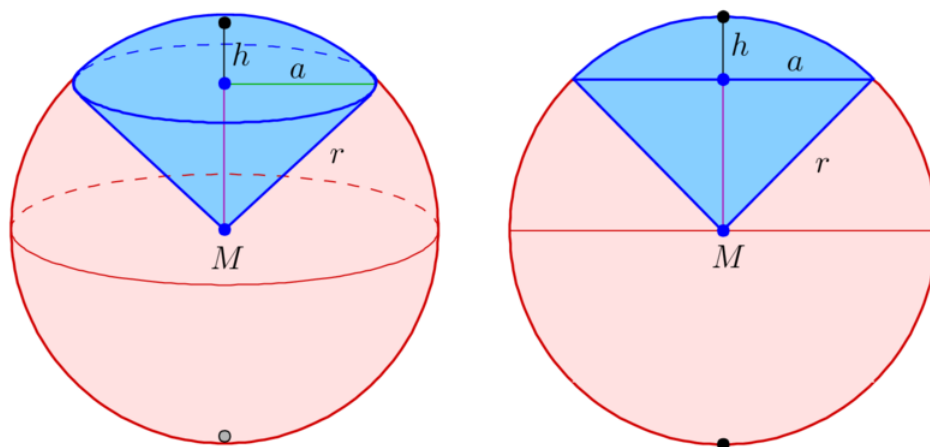
Precisamos, então, satisfazer a seguinte equação para que a partícula não escape do Sistema Solar:

$$(v_c - v \cdot \cos\alpha)^2 + (v \cdot \sin\alpha)^2 < v_{lim}^2$$

Como o cometa está em seu periélio e sua órbita é aproximadamente parabólica, teremos que $v_c \approx v_{lim}$. Assim:

$$\begin{aligned} v - 2 \cdot v_{lim} \cdot \cos\alpha &< 0 \\ \cos\alpha &> \frac{v}{2 \cdot v_{lim}} \\ 0^\circ \leq \alpha &< 76,7^\circ \end{aligned}$$

Como temos uma simetria no sistema podemos criar um sólido de revolução a partir da figura acima, de modo que o volume das partículas que não escaparão possa ser representado por um setor esférico:



O volume do setor acima é dado por:

$$V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

como o ângulo de abertura é 2α , podemos escrever h em função de α e r :

$$h = r - r \cdot \cos\alpha = r(1 - \cos\alpha)$$

Assim, como o cometa possui densidade constante, a porcentagem de partículas que não escaparão do Sistema Solar será dada por:

$$\eta = \frac{V}{V_{esfera}} \cdot 100 = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \cdot 100$$

$$\eta = 38,5\%$$

6. Um satélite em uma órbita próxima à superfície do Sol coletou vários dados do cometa C/2019 Q4 quando este estava próximo de seu periélio. A primeira medição foi feita no dia 30 de novembro de 2019 e, em cada uma delas, o satélite calculou a longitude, l , e a latitude eclíptica, b , do corpo celeste e determinou também as variações nessas coordenadas durante um período de 16 horas (as coordenadas foram calculadas para o sistema heliocêntrico).

Medição	l	b	Δl	Δb
1	49°57'16"	22°34'51"	17'0.10"	11'25.77"
2	74°59'10"	35°25'33"	43'43.40"	15'30.48"
3	144°28'14"	37°4'9"	58'57.91"	-18'12.92"
4	165°58'36"	27°50'10"	36'53.57"	-20'56.16"
5	199°18'1"	2°35'50"	6'54.68"	-6'9.26"
6	211°14'9"	-7°56'38"	1'48.30"	-1'33.70"

A partir desses dados, responda os itens abaixo:

- (4 pontos) Calcule a inclinação da órbita do cometa em relação à eclíptica e a longitude do nodo ascendente.
- (8 pontos) Encontre excentricidade, o semieixo maior e o argumento do periélio da órbita.
- (3 pontos) Faça um gráfico polar das posições do cometa considerando o Sol como o centro do plano cartesiano e o periélio localizado na região negativa das abscissas. Além disso, trace a curva que melhor representa a órbita do objeto.
- (5 pontos) Estime em que mês, aproximadamente, o cometa não será mais visível pelo satélite.

Dados: o satélite realizou as medidas utilizando um telescópio de abertura $D = 6 \text{ m}$ e considere o cometa como uma esfera de raio $R = 13,5 \text{ km}$ e albedo geométrico $p = 0.1$. Além disso, ignore quaisquer efeitos físicos não comentados no enunciado.

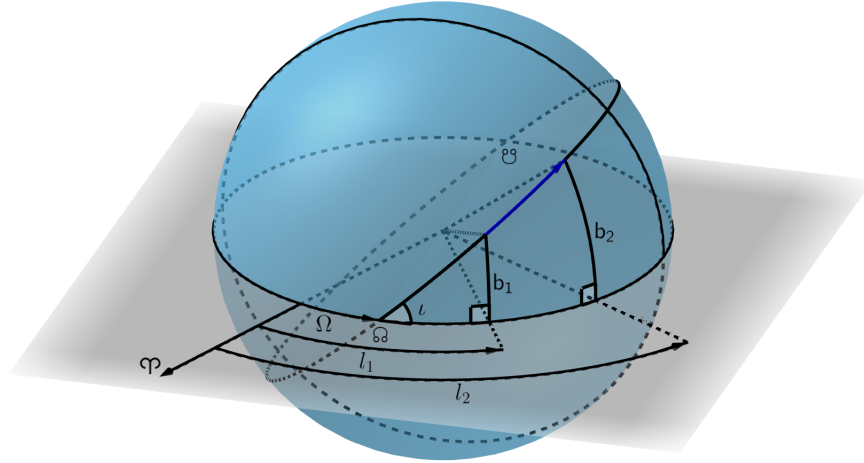
Observação 1: não é necessário calcular a incerteza de nenhum dos valores.

Observação 2: o gráfico deve ser feito a mão em uma folha sulfite ou milimetrada de forma que ele ocupe pelo menos 50% da página. Portanto, escolha uma escala adequada para os eixos.

Observação 3: não é permitido utilizar softwares externos na resolução da questão. Faça uma resolução objetiva que contenha todos os passos e cálculos essenciais.

Solução:

(a) A partir da representação abaixo, podemos utilizar as coordenadas do cometa nas duas primeiras medições para calcular os ângulos requisitados:



ι : inclinação, Ω : longitude do nodo ascendente, $\mathfrak{Q}$: nodo ascendente, $\mathfrak{U}$: nodo descendente. Utilizando a Lei dos quatro-elementos nos dois triângulos:

$$\cot b \cdot \sin (l - \Omega) = \cos (l - \Omega) \cdot \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cdot \cot \iota$$

$$\Rightarrow tg \iota = \frac{tg b_1}{\sin (l_1 - \Omega)} = \frac{tg b_2}{\sin (l_2 - \Omega)}$$

$$\Omega = l_1 - \sin^{-1} \left(\sin (l_2 - \Omega) \cdot \frac{tg b_1}{tg b_2} \right)$$

Com iteração, obtemos:

$$\Rightarrow \boxed{\Omega \approx 22^\circ 12' 38''}$$

Substituindo na fórmula encontrada anteriormente:

$$\Rightarrow \boxed{\iota \approx 41^\circ 46' 32''}$$

(b) Inicialmente, podemos encontrar a distância angular percorrida pelo cometa entre o nodo ascendente e a medição ($\mathbf{n}$), θ , e o ângulo percorrido durante cada medição, $\Delta\theta$, respectivamente, pelas fórmulas:

$$\cos \theta = \cos b \cdot \cos (l - \Omega)$$

$$\cos \Delta\theta = \sin b \cdot \sin (b + \Delta b) + \cos b \cdot \cos (b + \Delta b) \cdot \cos \Delta l$$

Observação: Como $\theta_6 > 180^\circ$, a função arco cosseno, devido ao seu domínio, vai indicar o valor $360^\circ - \theta_6$ e não o valor de θ_6 .

Medição	θ	$\Delta\theta$
1	$35^{\circ}11'44''$	$19'24.57''$
2	$60^{\circ}27'57''$	$38'48.29''$
3	$115^{\circ}12'26''$	$50'32.35''$
4	$135^{\circ}30'7''$	$38'48.46''$
5	$176^{\circ}6'0''$	$9'14.95''$
6	$192^{\circ}0'6''$	$2'22.42''$

Perceba que, como os tempos de medição são iguais e pequenos, a velocidade angular do cometa nas medições 2 e 4 são quase iguais e, conseqüentemente, essas posições são simétricas em relação à reta que liga o periélio ao Sol como pode ser verificado no desenho abaixo:

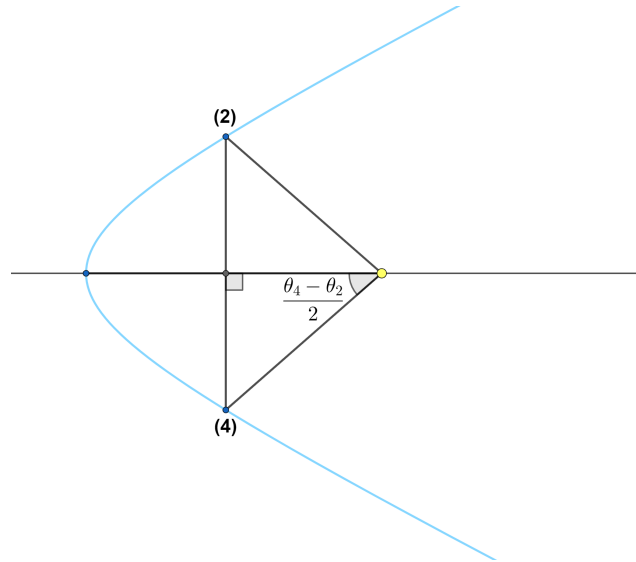


Figura 4: Nesse caso, foi utilizado uma órbita hiperbólica para representar a situação, porém a constatação acima é válida para qualquer cônica.

Portanto, podemos calcular o argumento do periélio, ω , por:

$$\omega = \theta_2 + \frac{\theta_4 - \theta_2}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega \approx 97^{\circ}59'2''}$$

Conseqüentemente, a anomalia verdadeira do cometa na posição (**n**) pode ser calculada pela expressão:

$$\nu = \theta - \omega$$

Refazendo a tabela:

Medição	ν	$\Delta\theta$
1	$-62^{\circ}47'17''$	$19'24.57''$
2	$-37^{\circ}31'5''$	$38'48.29''$
3	$17^{\circ}13'25''$	$50'32.35''$
4	$37^{\circ}31'6''$	$38'48.46''$
5	$78^{\circ}6'59''$	$9'14.95''$
6	$94^{\circ}2'23''$	$2'22.42''$

Pela conservação do momento angular entre a posição (1) e a (2), temos:

$$r_1^2 \cdot \dot{\theta}_1 = r_2^2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$\left(\frac{p}{1 + e \cos \nu_1} \right)^2 \cdot \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} = \left(\frac{p}{1 + e \cos \nu_2} \right)^2 \cdot \frac{\Delta \theta_2}{\Delta t}$$

$$(1 + e \cos \nu_2) \cdot \sqrt{\Delta \theta_1} = (1 + e \cos \nu_1) \cdot \sqrt{\Delta \theta_2}$$

$$e = \frac{\sqrt{\Delta \theta_2} - \sqrt{\Delta \theta_1}}{\sqrt{\Delta \theta_1} \cos \nu_2 - \sqrt{\Delta \theta_2} \cos \nu_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{e \approx 2,823}$$

Agora, sabendo que a órbita é hiperbólica ($e > 1$), podemos utilizar a conservação do momento angular entre a posição (1) e o periélio:

$$r_1^2 \cdot \dot{\theta}_1 = r_p \cdot v_p$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu}, \quad v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$$

$$\left(\frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu_1} \right)^2 \cdot \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} = a(e - 1) \cdot \sqrt{\mu \left(\frac{2}{a(e - 1)} + \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$$

$$\frac{a^3(e^2 - 1)^3}{(1 + e \cos \nu_1)^4} \cdot \left(\frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} \right)^2 = \mu$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{\mu(1 + e \cos \nu_1)^4}{(e^2 - 1)^3} \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta \theta_1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \approx 0,6949 \text{ U.A.}}$$

(c) Com essas informações, podemos encontrar a distância do cometa em cada uma das medições por:

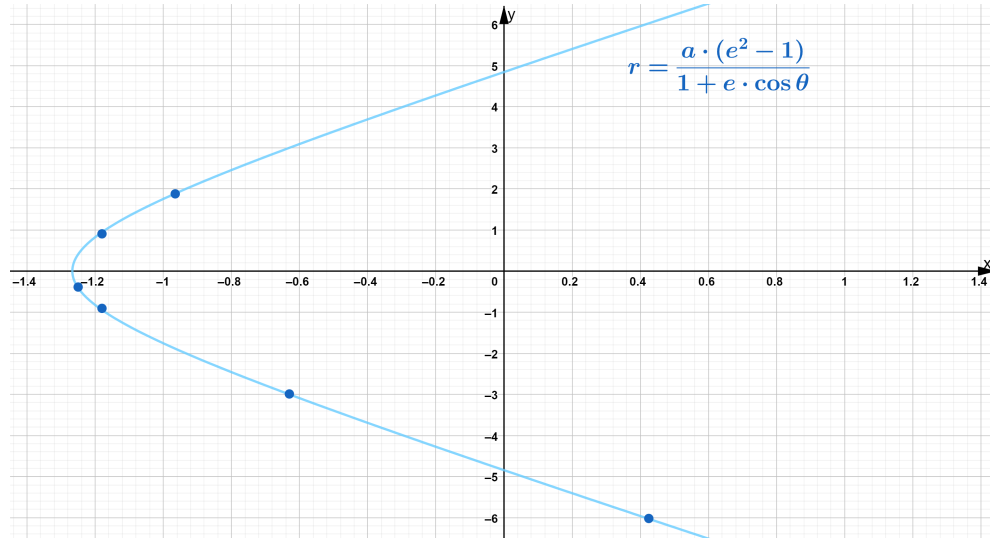
$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu}$$

E as coordenadas no plano cartesiano:

$$x = r \cos(180^\circ + \nu), \quad y = r \sin(180^\circ + \nu)$$

Medição	ν	r (U.A.)	x (U.A.)	y (U.A.)
1	$-62^\circ 47' 17''$	2,11	-0,965	1,88
2	$-37^\circ 31' 5''$	1,49	-1,18	0,907
3	$17^\circ 13' 25''$	1,31	-1,25	-0,388
4	$37^\circ 31' 6''$	1,49	-1,18	-0,907
5	$78^\circ 6' 59''$	3,06	-0,630	-2,99
6	$94^\circ 2' 23''$	6,03	0,425	-6,02

Plotando esses pontos no gráfico, obtemos:



Nesse gráfico, foi também representada a hipérbole que melhor representa o movimento do cometa utilizando o semieixo maior e a excentricidade calculados acima.

(d) Utilizando o diâmetro do telescópio do satélite, podemos encontrar a sua magnitude limite:

$$m_t - 6 = 5 \log \left(\frac{D \text{ (mm)}}{6} \right)$$

$$m_t = 2,11 + 5 \log(D)$$

$$\Rightarrow m_t \approx 21,0$$

Agora, precisamos encontrar a distância máxima do cometa para que ele seja visível ($m_c = m_t$):

$$m_t - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{\odot} \pi R^2}{4 \pi r^2} \cdot \frac{p}{\pi r^2} \cdot \frac{4 \pi (1 \text{ U.A.})^2}{L_{\odot}} \right)$$

$$r = (p R^2 (1 \text{ U.A.})^2)^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{m_t - m_{\odot}}{10}}$$

$$\Rightarrow r \approx 9,95 \text{ U.A.}$$

Pela equação polar:

$$\nu = \cos^{-1} \left(\frac{a(e^2 - 1)}{er} - \frac{1}{e} \right)$$

$$\Rightarrow \nu \approx 100^{\circ} 28' 22''$$

ν_7	$r_7 \text{ (U.A.)}$	$x_7 \text{ (U.A.)}$	$y_7 \text{ (U.A.)}$
$100^{\circ} 28' 22''$	9,95	1,81	-9,78

Pela segunda Lei de Kepler, sabemos que a velocidade areolar pode ser calculada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\sqrt{\mu a(e^2 - 1)}}{2}$$

Note que a fórmula do momento angular em uma trajetória hiperbólica foi obtida no item (b).

Assim, podemos estimar a área percorrida pelo raio-vetor do cometa desde a primeira medição com o gráfico:

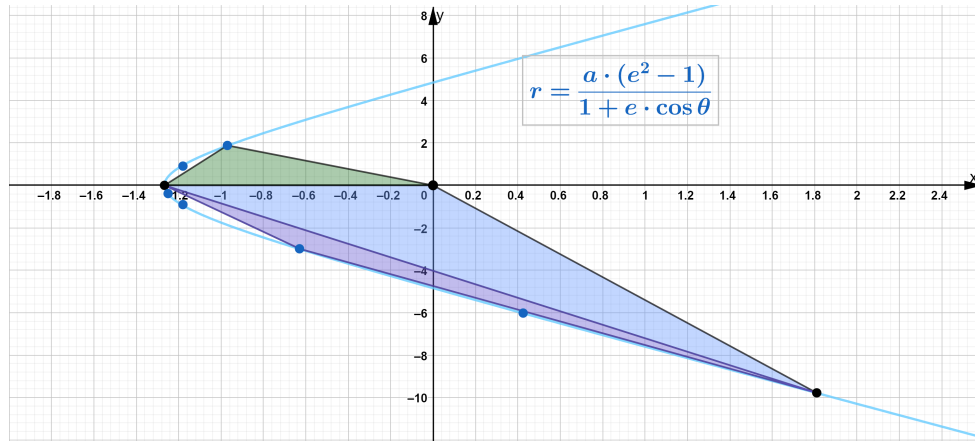


Figura 5: A_1 : área verde, A_2 : área azul, A_3 : área roxa

$$A_T \approx A_1 + A_2 + A_3 = \frac{y_1 \cdot a(e-1)}{2} + \frac{|y_7| \cdot a(e-1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -a(e-1) & 0 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_7 & y_7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A_T \approx 8,87 \text{ U.A.}^2$$

Substituindo na fórmula encontrada anteriormente:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot A_T}{\sqrt{\mu a(e^2 - 1)}}$$

$$\Rightarrow \Delta t \approx 469 \text{ dias}$$

Portanto, utilizando essa aproximação, o cometa não será mais visível a partir do dia 11 de Janeiro 2021. Porém, como foi feita uma estimativa um pouco inferior a real, é provável que isso, na verdade, ocorra no início do mês seguinte.

O cometa não será mais visível pelo satélite a partir de Fevereiro de 2021.

Extra:

A área real percorrida pelo cometa é de $9,33 \text{ U.A.}^2$, assim, o cometa não será mais visível, aproximadamente, a partir do dia 4 de Fevereiro, comprovando a nossa estimativa.