

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 6 problemas, sendo que os 5 primeiros valem 10 pontos e o sexto vale 20 pontos;
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 4". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 4".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.
10. Para as entregas após o prazo final, utilizaremos o seguinte protocolo:
 - Até 1h de atraso: perde 10% da nota final
 - De 1 a 6h de atraso: perde 30% da nota final
 - Mais de 6h de atraso: a lista não será aceita

Prazo: 08/06/2021 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **(Nebulosa do Anel)** A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de $2'$ para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57?

Lembre-se de que o gás de uma nebulosa é extremamente rarefeito e assumo que a nebulosa não absorve sua própria radiação.

Importante: Nessa questão, você deve calcular a magnitude total do céu noturno considerando que o ângulo sólido acima do horizonte do observador equivale a 2π sr. A resposta final não é o fundo de céu (em mag/arcsec²).

Solução:

A primeira etapa para resolver essa questão é notar que a luminosidade superficial (em mag/sr⁻²) não depende da distância para corpos extensos. Tanto o fluxo quanto o ângulo sólido são inversamente proporcionais ao quadrado da distância. Portanto, a razão entre os dois é constante independentemente da distância ao observador.

Esse raciocínio é válido mesmo dentro da nebulosa. Isso pode parecer contraintuitivo a princípio, mas uma maneira simples de compreender esse conceito é pensar na nebulosa como uma junção de várias partes menores. Para cada uma dessas partes, a luminosidade superficial é independente da distância, o que continua válido mesmo se o observador estiver vendo essa parte de dentro da nebulosa.

Como o gás na nebulosa é rarefeito e não há absorção interna, não é necessário usar um modelo mais complicado.

Dessa forma, é importante calcular o ângulo sólido da nebulosa vista da Terra:

$$S = \frac{\pi \delta^2}{4}$$

$$S = \frac{\pi \left(\frac{2 \cdot 2\pi}{60 \cdot 360} \right)^2}{4}$$

$$S = 2,65 \cdot 10^{-7} \text{ sr}$$

Como a luminosidade superficial é constante e o observador veria 2π sr do céu noturno da superfície do planeta, é possível calcular a magnitude do céu da seguinte maneira:

$$m_{centro} - m_{Terra} = -2,5 \cdot \log \left(\frac{2\pi}{S} \right)$$

$$m_{centro} = 9 - 2,5 \cdot \log \left(\frac{2\pi}{2,65 \cdot 10^{-7}} \right)$$

$$m_{centro} = -9,4$$

∴ A magnitude do céu noturno em um planeta no centro da nebulosa do Anel equivale a -9,4.

2. **(Efeito Cherenkov)** O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto de seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio.

Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velocidade seja maior que a velocidade de fase (c/n), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura 2α , como mostra a figura abaixo.

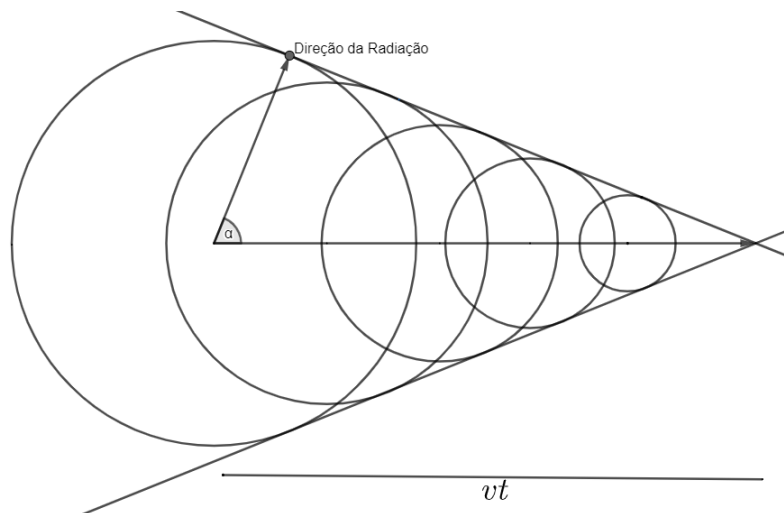


Figura 1: Mecanismo de radiação do Efeito Cherenkov.

Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade super sônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov.

Parte A - Modelo Teórico (6 pontos)

Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração n . Sabe-se que sua massa de repouso é m_o , possui momento linear p e velocidade v . Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo α , como mostra a figura 1.

- A.1 **(0,5 pontos)** Sendo μ a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear, p_μ , e sua energia, E_μ . Sua resposta deve estar em função de n , μ e constantes físicas.
- A.2 **(0,5 pontos)** Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de p_μ , p e α .
- A.3 **(0,5 pontos)** Sendo $\beta_n = c/vn$, prove que a relação abaixo é verdadeira:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\beta_n} \quad (1)$$

- A.4 **(4,5 pontos)** Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velocidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov.

Dica: Quando comparado com os outros parâmetros, o fator $(n^2 - 1)h\mu$ pode ser desprezado.

Parte B - Reações Nucleares (4 pontos)

A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Uma dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a *pp IV*, na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir.



B.1 **(0,5 pontos)** Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.

B.2 **(1,5 pontos)** Considere que essa reação foi reproduzida em laboratório e que a energia do neutrino emitido foi de $18,00\text{MeV}$. Sabe-se também que a energia liberada pela reação é dividida entre o neutrino e a partícula no quadrado. Sendo assim, determine o índice de refração do meio reacional para que haja radiação Cherenkov.

Dados: Massa do Hélio-3: $2808,30\text{ MeV}/c^2$, Massa do Hélio-4: $3727,40\text{ MeV}/c^2$, Massa do próton: $938,27\text{ MeV}/c^2$, massa da partícula no quadrado: $0,511\text{ MeV}/c^2$.

Píon é um méson produzido quando prótons de alta energia dos raios cósmicos e outros componentes de raios cósmicos hadrônicos interagem com a matéria na atmosfera da terrestre. Dado um píon π^- , é dado o seguinte decaimento:



B.3 **(0,5 pontos)** Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.

B.4 **(1,5 pontos)** Na tentativa de estudar a formação de muões, um feixe de píons e muões por um material transparente. Nesse material, somente muões podem emitir radiação pelo Efeito Cherenkov. Dado que o momento linear dos dois tipos de partícula no experimento é de $140\text{ MeV}/c$, qual o intervalo de valores do índice de refração do meio?

Dados: massa do píon: $140\text{ MeV}/c^2$, massa do múon: $106\text{ MeV}/c^2$.

Solução:

PARTE - A

A.1. i) Para o momento linear, temos $p_\mu = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{v_{mex}} \cdot \mu \Rightarrow$

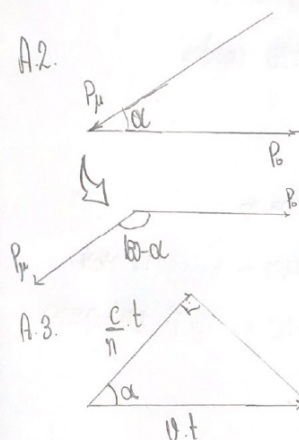
$$\Rightarrow \boxed{p_\mu = \frac{h\eta\mu}{c}}$$

$$(4) \quad v_{mex} = \frac{c}{n}$$

+0,10 eq. de velocidade
no meio
+0,15 eq. do momento
correto + desenvolvimento

ii) $E = \frac{h v_{mex}}{\lambda} = \frac{h v_{mex}}{v_{mex}} \cdot \mu \Rightarrow \boxed{E = h\mu}$ +0,25 desenvolvimento + resultado

A.2.



$$P^2 = P_0^2 + P_\mu^2 - 2P_0P_\mu \cos \alpha$$

+0,5 Lei dos cossenos correta

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{c/n \cdot t}{v \cdot t} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{\beta n}$$

+0,4 desenvolvimento correto geometria + álgebra
+0,1 resultado final

A.4. i) Conservação de energia:

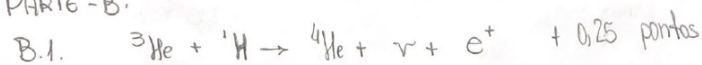
$$\begin{aligned} \sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} &= \sqrt{P_C^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} + h\mu \Rightarrow \sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} - \sqrt{P_C^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} = h\mu \\ \Rightarrow P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 &= P_C^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 - 2\sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} h\mu + (h\mu)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_0^2 c^2 + P_\mu^2 c^2 - 2P_0 P_\mu c^2 \cos \theta &= P_0^2 c^2 - 2\sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} h\mu + (h\mu)^2 \\ \Rightarrow 2P_0 \frac{h\eta\mu}{c} c^2 \cos \theta &= 2\sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} h\mu + \frac{h^2 \eta^2 \mu^2 c^2}{c^2} - (h\mu)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{2\sqrt{P_0^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} + (n^2 - 1)h\mu}{2P_0 c n} \end{aligned}$$

Do enunciado, $(n^2 - 1)h\mu \rightarrow 0$, assim, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{p_0^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{2p_0 c n}$

Como $\cos\theta = 1/p_n$, vem:
$$v = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{p_0^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

- + 0,5 conservação de energia
- + 3,0 desenvolvimento correto
- + 1,0 aproximação + resultado correto

PARTIC-B.



► Conservação do número de léptons + 0,25 pontos

B.2. i) Da parte A, $n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{p_0^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{p_0 c}$

ii) Defeito de massa: $\Delta m = 3727,40 - 938,27 - 2808,20 = -19,27 \frac{\text{MeV}}{c^2}$

iii) Do enunciado, $E_+ + E_\gamma = |\Delta E| \Rightarrow E_+ = 19,27 - 18,00 \Rightarrow E_+ = 1,17 \text{ MeV}$

iv) Energia total da partícula: $E_+^2 = (pc)^2 + m^2 c^4 \Rightarrow (pc)^2 = 1,17^2 - 0,511^2$
 $\Rightarrow p = 1,05 \text{ MeV}/c$

v) Finalmente, $n = \sqrt{1 + \left(\frac{0,511}{1,05}\right)^2} \Rightarrow \boxed{n = 1,11}$

Tome + 0,30 para cada passo.



► Conservação do número de léptons + 0,25 pontos

B.4. Pela condição do problema, $n_\mu \leq n \leq n_\pi \Rightarrow +1 \text{ pelo raciocínio correto}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{106}{140}\right)^2} \leq n \leq \sqrt{1 + \left(\frac{140}{140}\right)^2} \Rightarrow \boxed{1,25 \leq n \leq 1,41}$ + 0,5 desenvolvimento e intervalo correto

3. **(Trajetória de Hayashi)** O termo Trajetória de Hayashi se refere ao caminho percorrido no diagrama Hertzsprung-Russell por estrelas jovens com menos de 3 massas solares antes destas se tornarem estrelas da sequência principal. Nesta fase de sua evolução estelar a luminosidade dessas estrelas decresce lentamente enquanto sua temperatura permanece quase constante.

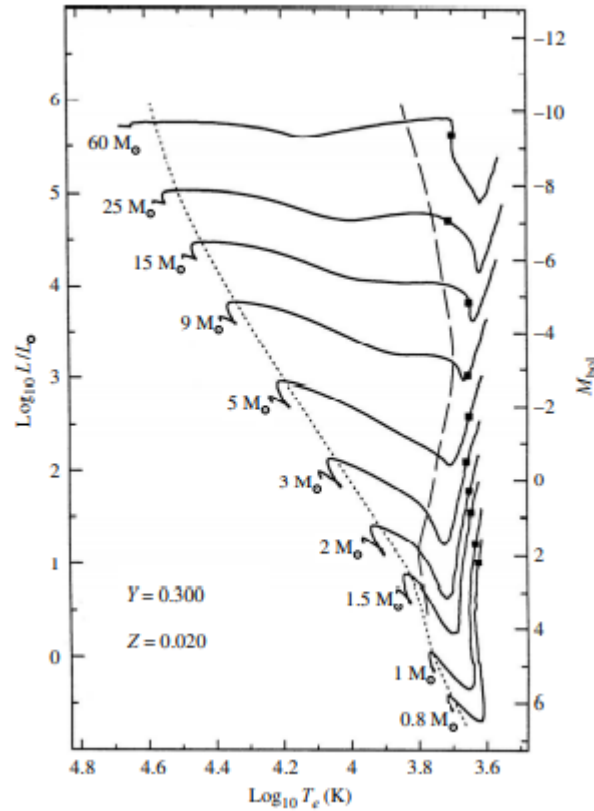


Figura 2

A Trajetória de Hayashi também define um limite importante: nenhuma estrela pode existir à sua direita no diagrama HR, pois é impossível atingir um equilíbrio hidrostático naquela zona. Neste exercício vamos encontrar uma relação entre a temperatura efetiva de uma estrela e sua massa que defina este limite.

Assuma que toda a região entre a fotosfera e o núcleo destas estrelas é puramente convectiva, e que seu centro tenha densidade ρ_C e temperatura T_C . A atmosfera é fina e possui opacidade média κ , de modo que $\kappa = \kappa_0 \rho^{0.5} T^{7.7}$. Considere todos os processos termodinâmicos como adiabáticos e que a espessura ótica da fotosfera é $\tau = 2/3$

a) Ache uma expressão para a temperatura da estrela em função de ρ_C , T_C , κ_0 , sua massa M e sua luminosidade L .

Dica: se necessário assuma que se $P = K \rho^{\frac{(n+1)}{n}}$, então $\frac{\rho}{T^n} = C$

Solução: Como a estrela está em equilíbrio hidrostático, temos:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho$$

E pela definição de opacidade:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\kappa\rho$$

Disso:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}$$

Assumindo κ constante para a fotosfera, podemos integrar esta equação, obtendo então:

$$P = \frac{2g}{3\kappa}$$

Além disso, a partir da lei dos gases ideais:

$$P V = N K T$$

Logo:

$$P = \frac{K \rho T}{m_H}$$

Onde m_H é a massa do átomo de hidrogênio.

Como todos os processos são adiabáticos, temos ainda:

$$P V^\gamma = C \rightarrow P \left(\frac{NKT}{P} \right)^\gamma = C \rightarrow P^{\gamma-1} T^\gamma = C'$$

Assim:

$$P^\gamma = \left(\frac{K \rho T}{m_H} \right)^\gamma \rightarrow P^\gamma = \left(\frac{K \rho}{m_H} \right)^\gamma \frac{C'^\gamma}{P^{(\gamma-1)\gamma}} \rightarrow P = \left(\frac{K \rho C'}{m_H} \right)^\gamma$$

Onde γ é o coeficiente da expansão adiabática, que vale neste caso 5/3 (gás monoatômico). Podemos notar que isso satisfaz a relação dada no enunciado para $n=1,5$:

$$P = K \rho^{\frac{5}{3}} = K \rho^{\frac{n+1}{n}}$$

Disso tiramos, a partir do enunciado:

$$\frac{\rho}{T^{1,5}} = \frac{\rho_C}{T_C^{1,5}}$$

Igualando as 2 expressões que temos para a pressão da estrela:

$$\frac{K \rho T}{m_H} = \frac{2g}{3\kappa} = \frac{2g}{3 \kappa_0 \rho^{0,5} T^{7,7}}$$

Substituindo ρ :

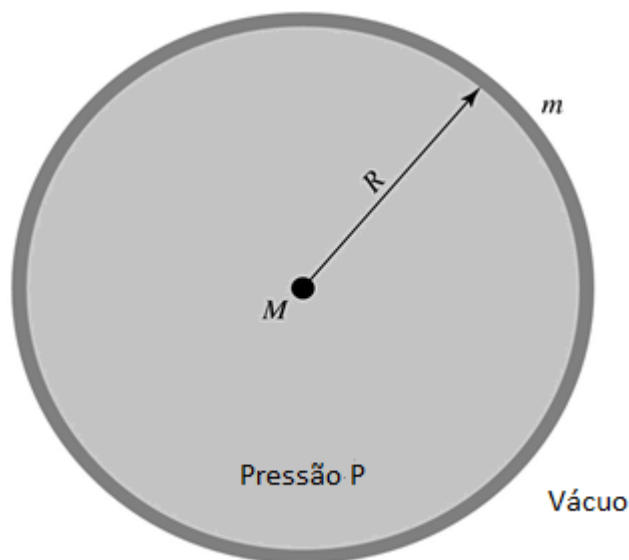
$$T^{10,95} = \frac{2 G M m_H T_C^{2,25}}{3 R^2 \kappa_0 K \rho_C^{1,5}}$$

Assumindo que $T = T_{ef}$ e utilizando a Lei de Steffan-Boltzman obtemos:

$$T^{6,95} = \frac{8 \pi \sigma G M m_H T_C^{2,25}}{3 L \kappa_0 K \rho_C^{1,5}}$$

4. **(Pulsação Simplificada)** Nesse problema, estudaremos um modelo simplificado e clássico de pulsações estelares. Considere que uma estrela seja um sistema formado por um ponto central de massa M (massa da estrela) envolto por uma camada esférica de gás ideal de massa desprezível e de

raio R (raio da estrela), sendo que a superfície estelar é uma fina casca esférica de massa m que não oferece resistência à expansão nem compressão e sendo responsável por isolar termodinamicamente o gás interno do ambiente externo (vácuo). Considere que as transformações do gás na estrela se dão de maneira reversível.



- Calcule o valor mínimo do coeficiente de expansão adiabática para que as oscilações do gás no interior estelar sejam um movimento harmônico simples. Considere que a amplitude das oscilações tenha tamanho desprezível em relação ao raio R da estrela.
- Considerando o coeficiente de expansão adiabática $\gamma = \frac{5}{3}$ (gás monoatômico), calcule o período das oscilações da estrela em função de G (constante gravitacional), M e R .

Se necessário, utilize que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$.

Solução:

- Primeiro, escreveremos a Segunda Lei de Newton para a casca esférica sabendo que as forças atuantes nela é a gravitacional (em decorrência do núcleo de massa M) e a causada pela pressão do gás interno:

$$ma = -\frac{GMm}{R^2} + 4\pi R^2 P$$

Para a situação de equilíbrio, teremos $a = 0$. Logo:

$$\frac{GMm}{R^2} = 4\pi R^2 P$$

Agora, vamos observar o que ocorre caso o sistema seja levemente deslocado do estado de equilíbrio com uma variação do raio ΔR , que, conseqüentemente, ocasionará uma pequena variação na pressão do gás ΔP . Assim, teremos a seguinte nova equação para a Segunda Lei de Newton:

$$ma = -\frac{GMm}{(R + \Delta R)^2} + 4\pi (R + \Delta R)^2 (P + \Delta P)$$

Para uma aproximação de primeira ordem:

$$\frac{1}{(R + \Delta R)^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - 2\frac{\Delta R}{R} \right)$$

Assim, substituindo a expressão acima, desenvolvendo e ignorando os termos de grau dois para as variações, chegamos em:

$$ma = 0 - \frac{GMm}{R^2} + 4\pi R^2 P + \frac{2GMm}{R^3} \Delta R + 8\pi RP \Delta R + 4\pi R^2 \Delta P$$

$$ma = \frac{2GMm}{R^3} \Delta R + 8\pi RP \Delta R + 4\pi R^2 \Delta P$$

Agora, precisamos relacionar o ΔP com o ΔR , e para isso, vamos utilizar que o sistema formado pelo gás está isolado e, portanto, as transformações são adiabáticas. Para tal:

$$PV^\gamma = C \rightarrow PR^{3\gamma} = C'$$

Assim, teremos:

$$PR^{3\gamma} = (P + \Delta P)(R + \Delta R)^{3\gamma}$$

Utilizando novamente aproximações de primeira ordem:

$$(R + \Delta R)^{3\gamma} \approx R^{3\gamma} \left(1 + \frac{3\gamma \Delta R}{R} \right)$$

Assim, utilizando a expressão acima na transformação adiabática, chegamos em:

$$\frac{\Delta P}{P} = -3\gamma \frac{\Delta R}{R} \rightarrow \Delta P = -3\gamma P \frac{\Delta R}{R}$$

Substituindo na expressão que descreve o movimento:

$$ma = \frac{2GMm}{R^3} \Delta R + 8\pi RP \Delta R - 12\pi RP \gamma \Delta R$$

Da equação inicial do equilíbrio:

$$\frac{GMm}{R^2} = 4\pi R^2 P \rightarrow \frac{GMm}{R^3} = 4\pi RP$$

$$8\pi RP = \frac{2GMm}{R^3} \quad \text{e} \quad 12\pi RP = \frac{3GMm}{R^3}$$

Assim, substituindo:

$$a = -(3\gamma - 4) \frac{GM}{R^3} \Delta R$$

Sabemos que um MHS segue uma equação diferencial do tipo $a = -\omega^2 x$. Assim, é necessário que $(3\gamma - 4) > 0$ para termos uma equação no mesmo formato. Portanto:

$$\boxed{\gamma > \frac{4}{3}}$$

(b) Para $\gamma = \frac{5}{3}$, teremos:

$$a = -\frac{GM}{R^3} \Delta R$$

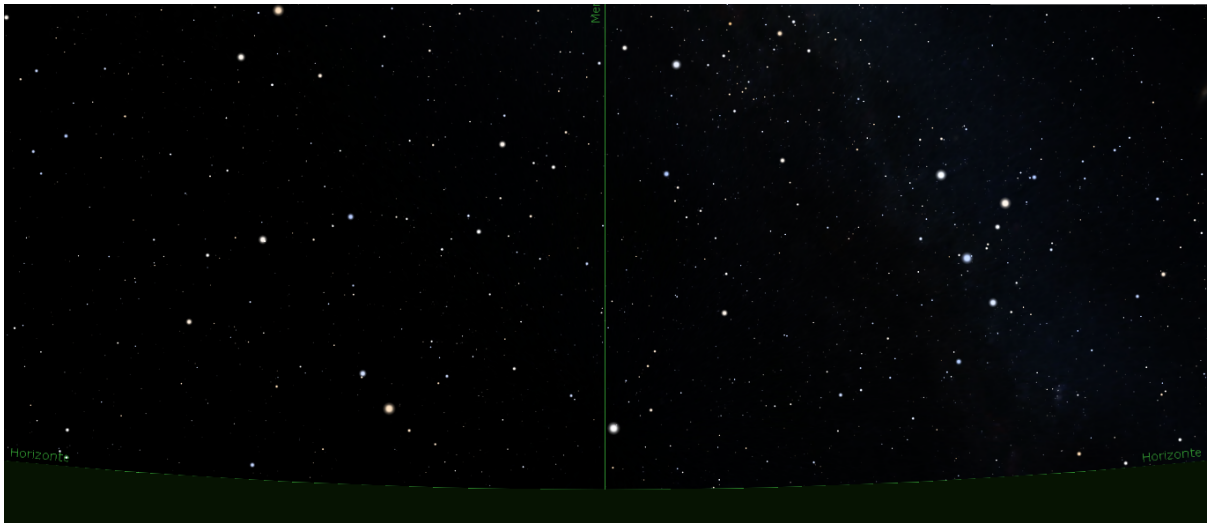
Perceba que $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$, então:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

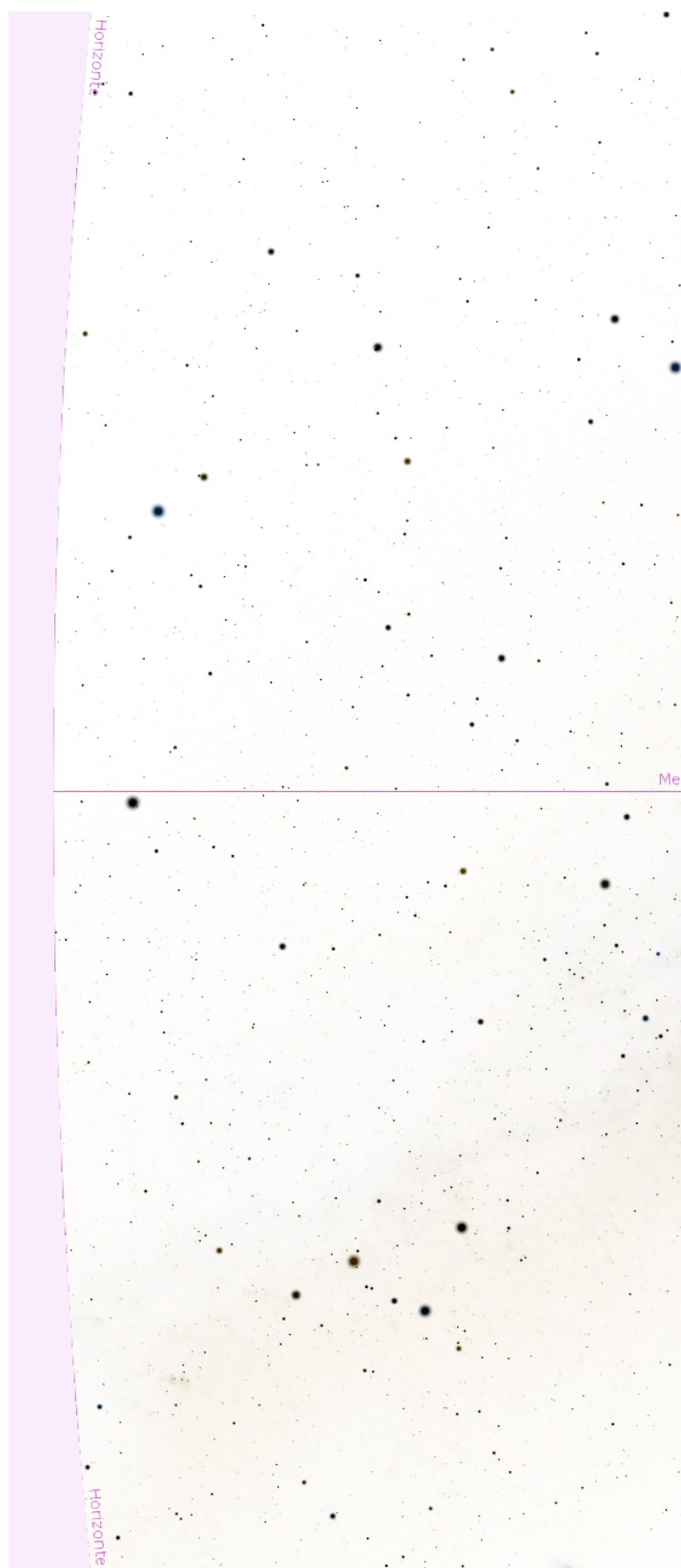
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

5. **(Informações de Carta Celeste)** Abaixo temos certa região do céu próxima ao horizonte local. Considere que a curvatura da esfera celeste é desprezível na imagem, então não há distorções no mapa apresentado. Vamos obter algumas informações a partir dela e, para tanto, você poderá utilizar softwares de edição de imagem, tais como o *paint*, *GeoGebra* e outros.

Para quem quiser imprimir a carta, ao final da lista disponibilizamos uma versão com o fundo branco e estrelas em preto.



- (a) **(1 ponto)** Localize a posição da estrela Thuban (α Dra) na imagem.
- (b) **(2,5 pontos)** Sabendo que o Polo Norte Celeste no passado já possuiu praticamente a mesma posição de Thuban, cuja declinação é $\delta_{\text{Thuban}} = 64^\circ 16,5'$ e conhecendo a obliquidade da eclíptica $\epsilon = 23^\circ 27'$, encontre a posição do Polo Norte Eclíptico.
- (c) **(2,5 pontos)** Daqui a 5400 anos, qual será a estrela mais próxima do Polo Norte Celeste? Calcule a separação angular entre tais pontos, ela corresponderá ao erro angular no polo daqui a 5400 anos. **Dado:** Velocidade angular do ponto vernal em relação às estrelas: $\omega_\gamma = 50,2 \text{ arcsec/yr}$.
- (d) **(1,5 ponto)** Qual é a latitude do local?
- (e) **(2,5 pontos)** Sabendo que a ascensão reta de Thuban é $\alpha_T = 14^{\text{h}} 5^{\text{m}}$ e que a ascensão reta do Sol na época da imagem é $\alpha_\odot = 4^{\text{h}} 32,8^{\text{m}}$, calcule o horário do momento da imagem, isto é, o seu tempo solar verdadeiro local.



Solução: .

(a):

Abaixo vemos a estrela Thuban marcada:



(b):

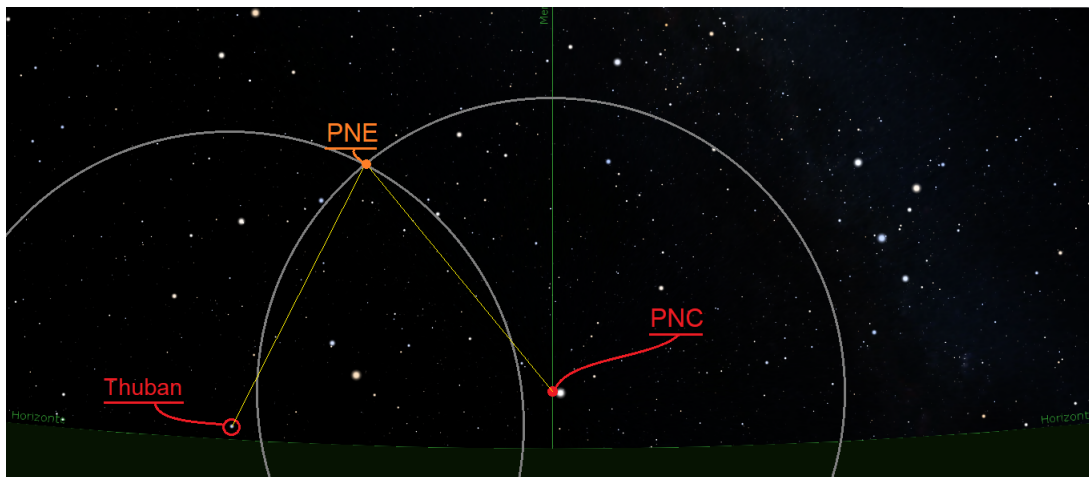
O PNC praticamente passou pelas posições de Polaris e Thuban, então vamos considerar que tais estrelas estão sobre o círculo de precessão, cujo centro é o PNE. Se soubermos o raio de tal círculo, localizamos o seu centro.

Como podemos desprezar a curvatura da esfera celeste, então as distâncias entre os pontos da imagem não está distorcida e podemos fazer proporções entre elas.

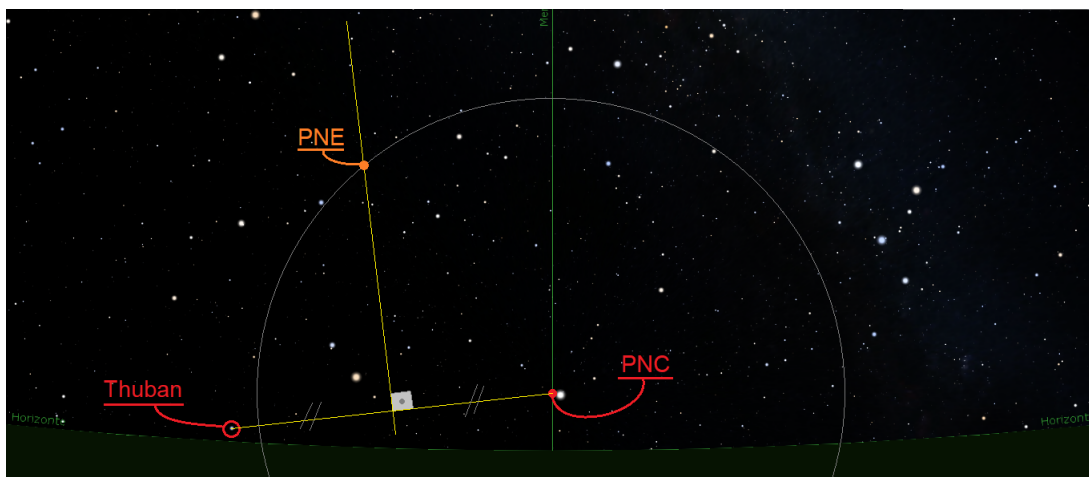
A distância angular de Thuban ao Polo Norte Celeste é $\Delta_T = 90^\circ - 64^\circ 16,5' = 25^\circ 43,3'$ e a distância angular entre os polos Norte Eclíptico e Norte Celeste é equivalente à obliquidade da eclíptica $\epsilon = 23^\circ 27'$. As distâncias lineares entre tais pontos na imagem deve possuir a mesma proporção, já que desprezamos as distorções nas distâncias. Utilizando o *paint*, descobrimos que entre Thuban e PNC há certa de 403,41 pixels e, por regra de três, encontramos a distância linear entre o PNE e PNC (d_{EC}):

$$\frac{d_{EC}}{403,41} = \frac{23^\circ 27'}{25^\circ 43,3'} \Rightarrow d_{EC} = 367,779 \text{ px}$$

De posse dessas informações, traçamos duas circunferências de raio d_{EC} e a intersecção entre elas será o PNE, pois a distância desse ponto a Polaris e Thuban será d_{EC} . Dessa maneira:



Ou podemos traçar mediatriz à Thuban-Polaris e uma circunferência com centro em Thuban ou Polaris e a intersecção entre tais lugares geométricos será o PNE. Dessa maneira:

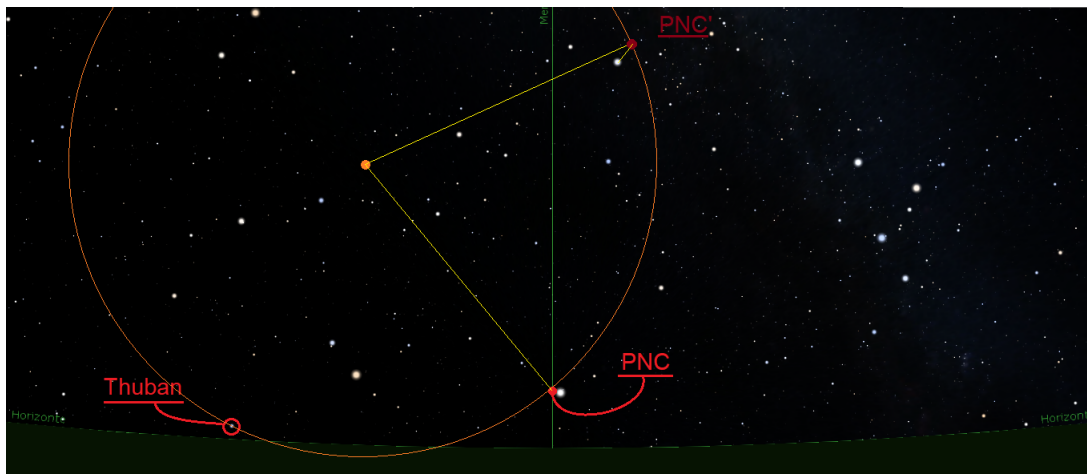


(c):

Daqui a 5400 anos o PNC percorrerá um ângulo θ sobre o círculo de precessão, a partir de Polaris.

$$\theta = \frac{5400}{P_{\text{Precessão}}} \cdot 360^\circ = \frac{5400}{360^\circ/\omega_\gamma} \cdot 360^\circ = 75,3^\circ$$

Basta deslocarmos angularmente por $\theta = 75,3^\circ$ a posição de Polaris com relação ao PNE e obteremos o PNC futuro (PNC'):



Ao fazermos o deslocamento angular na imagem obtemos o polo futuro, como representado acima.

A estrela que estará mais próximo dele será Alderamin (α Cep). Utilizando novamente proporções, encontramos o erro ξ_{AP} entre a estrela e o polo futuro:

$$\frac{30,61}{403,41} = \frac{\xi_{AP}}{25^{\circ}43,3'} \Rightarrow \boxed{\xi_{AP} \approx 1^{\circ}57'}$$

(d):



Utilizando proporções novamente, encontramos a latitude ϕ do local:

$$\frac{72}{403,41} = \frac{\phi}{25^{\circ}43,3'} \Rightarrow \boxed{\phi \approx +4^{\circ}35,5'}$$

(e):

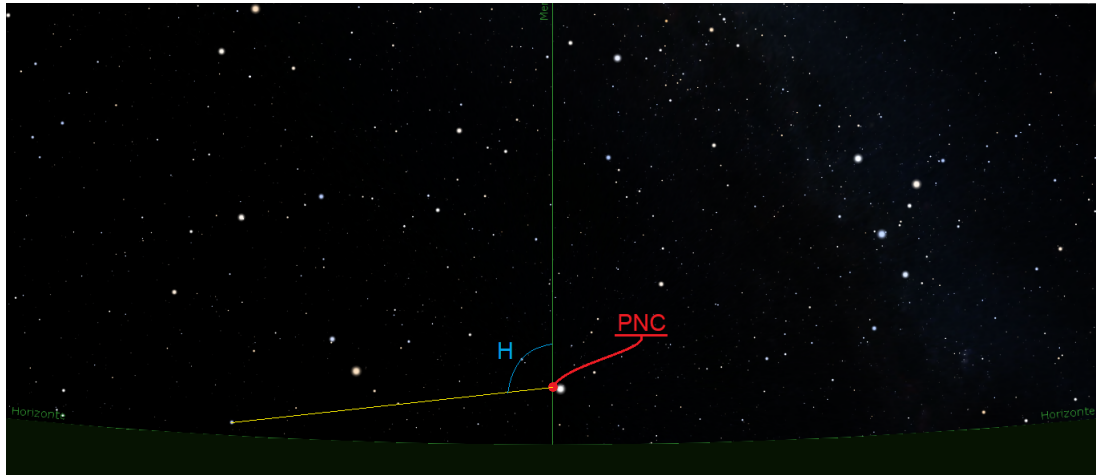
A equação do tempo sideral vai nos ajudar a solucionar este problema:

$$TS = H_{\gamma} = H_{*} + \alpha_{*}$$

Usando Thuban e o Sol:

$$H_{\odot} + \alpha_{\odot} = H_T + \alpha_T$$

Obteremos $H_T = H$ da imagem:



Encontramos $H = 96,7^{\circ}$. Substituindo esse valor e os demais do enunciado na equação anterior, achamos o ângulo horário do Sol: $H_{\odot} = 16h$

Como o tempo solar verdadeiro local é $TSVL = H_{\odot} + 12h$, temos:

$$TSVL = 28h \equiv 4h$$

$$\boxed{TSVL = 4h}$$