

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 5 problemas, todos valendo 10 pontos;
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 5". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 5".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.
10. Para as entregas após o prazo final, utilizaremos o seguinte protocolo:
 - Até 1h de atraso: perde 10% da nota final
 - De 1 a 6h de atraso: perde 30% da nota final
 - Mais de 6h de atraso: a lista não será aceita

Prazo: 23/06/2021 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **(Binárias e Exoplaneta)** O astrônomo Juventus, natural do planeta da Concha, observa ao longo dos anos um sistema binário com componentes A e B. Curioso para saber mais sobre a binária, o cientista mediu a distância angular mínima entre as duas estrelas, $q = 0,56''$, a distância máxima, $Q = 0,66''$, a magnitude total do sistema, $m = 5,85$, e a magnitude da componente A, $m_A = 7,64$, e deduziu o período do sistema em $P = 163$ anos. Ele também descobriu o tipo espectral da estrela A, F5V.

Observando atentamente os dados fotométricos da estrela A, Juventus descobriu que a estrela possui uma queda periódica no seu fluxo durante 3 horas e 58 minutos, que ocorre de 6 meses em 6 meses. Sagaz como sempre, ele depois deduziu que o fenômeno decorria de um exoplaneta em uma órbita circular edge-on (inclinação de 90° em relação ao plano do céu), chamando o corpo de Concha 2, muito menor que a sua estrela hospedeira.

Você, como assistente do grande astrônomo, foi encarregado de encontrar as seguintes informações:

- (a) **(3 pontos)** O raio da órbita do exoplaneta, r , em UA.
 - (b) **(1 ponto)** A distância até o sistema, d , em parsecs.
 - (c) **(3 pontos)** A massa das componentes A e B, M_A e M_B , em massas solares.
 - (d) **(3 pontos)** A inclinação das órbitas do sistema binário em relação ao plano do céu, $i \in [0, 90^\circ]$, em graus. Suponha que o *latus rectum* das órbitas esteja nesse plano.
- (Extra) **(0 pontos)** Concha 2 está na zona habitável, isto é, pode possuir água líquida na superfície?

Dica: Consulte a tabela de tipos espectrais nesse [site](#), **não** usando a coluna das magnitudes absolutas. Considere a relação massa-luminosidade aproximada $L \propto M^{3,5}$.

Solução:

- (a) Olhando a tabela dada, uma estrela F5V tem temperatura $T_A \approx 6700$ K e luminosidade $L_A \approx 2,7L_\odot$.

Usando $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, $R = 8,48 \times 10^8$ m.

A estrela A é parcialmente eclipsada por $\Delta t = 3$ horas e 58 minutos, a cada $T = 0,5$ anos. Como a órbita do planeta é edge-on, o planeta eclipsa a estrela passando pelo centro do disco estelar.

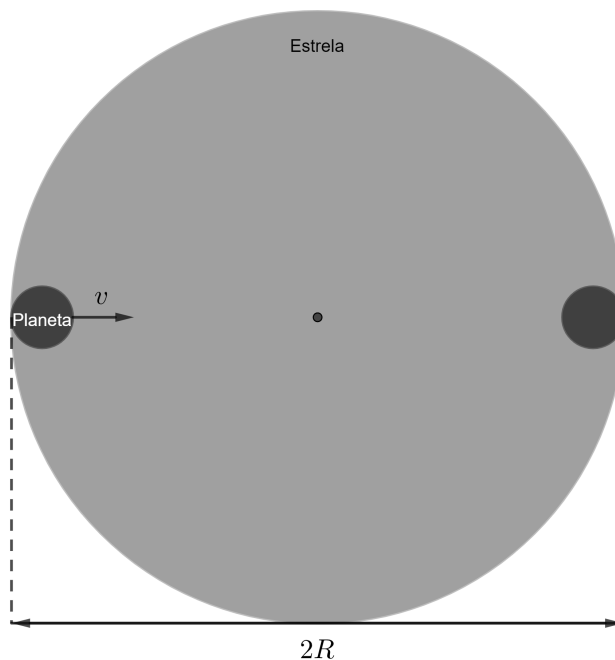


Diagrama da situação

Usando a velocidade da órbita circular $v = 2\pi r/T$:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2R}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow r = \frac{RT}{\pi \Delta t} \Rightarrow \boxed{r = 1,99 \text{ UA}}$$

Obs: O problema deu dados demais, e é possível calcular o raio orbital por outra maneira, resultando em $r = 0,69 \text{ UA}$. Essa e outras inconsistências causadas pelo excesso de dados foram consideradas na correção.

- (b) Comparando a magnitude de A com a magnitude absoluta do Sol:

$$m_A - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_A}{L_{\odot}} \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \right)$$

Com isso, obtemos $\boxed{d = 59,9 \text{ pc}}$

- (c) Usando a relação massa-luminosidade:

$$\frac{L_A}{L_{\odot}} = \left(\frac{M_A}{M_{\odot}} \right)^{3,5} \Rightarrow \boxed{M_A = 1,33 M_{\odot}}$$

Para encontrarmos a massa de B, vamos primeiro descobrir a sua luminosidade. Com-

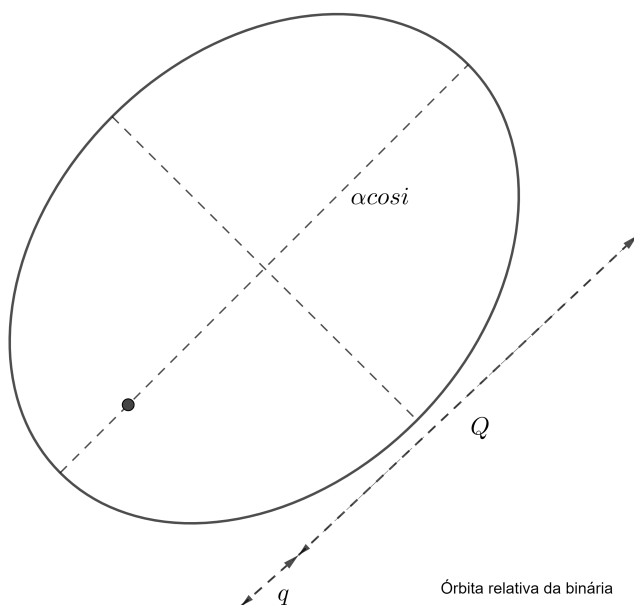
parando magnitudes:

$$\begin{aligned} m - m_A &= -2,5 \log \left(\frac{L_A + L_B}{L_A} \frac{d^2}{d^2} \right) \\ &= -2,5 \log \left(\frac{L_B}{L_A} + 1 \right) \\ \Rightarrow L_B &= 11,33 L_\odot \end{aligned}$$

Com isso, de maneira análoga à estrela A, $M_B = 2,00 M_\odot$

- (d) Nós observamos uma órbita inclinada em um ângulo i em relação ao plano do céu. Assim, a órbita relativa possuirá um semieixo maior angular observado de $\alpha \cos i$, sendo α o semieixo maior angular visto da mesma distância e sem inclinação ($\alpha = a/d$). Também, esse valor é igual à média das mínima e máxima distâncias angulares entre as estrelas. Algebricamente:

$$\begin{aligned} \alpha \cos i &= \frac{Q + q}{2} \\ \Rightarrow \frac{a}{d} \cos i &= \frac{Q + q}{2} \\ \Rightarrow a &= \frac{d(Q + q)}{2 \cos i} \end{aligned}$$



Órbita Relativa Observada da Binária

Aplicando a terceira lei de Kepler para binárias:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_A + M_B)} a^3$$

$$\Rightarrow P^2 = \frac{1}{(M_A + M_B)} \left(\frac{(Q + q)d}{2 \cos i} \right)^3$$

$$\Rightarrow \cos i = 0,820$$

Onde usamos G numericamente igual a $4\pi^2$ para UA, anos e $M_\odot$. Como $0 < i < 90^\circ$, calculamos que $i = 34,9^\circ$.

2. **(Binárias)** Considere duas estrelas que estão em um sistema binário. Vistas da Terra, são binárias espectroscópicas (o plano da órbita é perpendicular ao plano do céu). Isso significa que podemos ver o deslocamento das linhas de emissão no espectro estelar. Identificaremos a estrela menor como S (*small*) e a estrela maior como L (*large*).

Observando o espectro, temos que os máximos do deslocamento Doppler da linha $H\alpha$ ($\lambda = 656,281\text{nm}$) são $\Delta\lambda_S = 0,065\text{nm}$ para a estrela menor e $\Delta\lambda_L = 0,0070\text{nm}$ para a estrela maior. O período orbital é $P = 10$ anos e as órbitas são circulares.

- (a) **(8 pontos)** Com as informações acima, encontre a massa das duas estrelas, isto é, M_S e M_L , em função da massa do Sol.
- (b) **(2 pontos)** Suponha que para outro planeta habitável, esse sistema seja de binárias visuais (o plano da órbita é paralelo ao plano do céu) e a separação angular máxima entre as estrelas seja de $\theta = 2,0''$, qual a distância (em parsecs) do exoplaneta até o sistema binário?

Solução:

- (a) Podemos encontrar a razão entre as massas a partir dos deslocamentos Doppler.

Sabemos que o efeito Doppler é dado por

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} \Leftrightarrow v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c$$

E que a razão das massas pode ser escrita como

$$\frac{M_L}{M_S} = \frac{v_{S,r}}{v_{L,r}} \Rightarrow \frac{M_L}{M_S} = \frac{\Delta\lambda_S c}{\Delta\lambda_L c} \frac{\lambda}{\lambda} \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{M_L}{M_S} = \frac{\Delta\lambda_S}{\Delta\lambda_L}$$

Logo,

$$\frac{M_L}{M_S} = \frac{\Delta\lambda_S}{\Delta\lambda_L} = \frac{0,065}{0,0070} = 9,3$$

A partir da terceira lei de Kepler, podemos calcular a soma das massas:

$$M_L + M_S = \frac{a^3}{P^2}$$

Para isso, precisamos do semi-eixo maior da órbita que é dado por $a = a_L + a_S$, onde a_L e a_S são os semi-eixos das órbitas individuais de cada estrela. Lembre-se de que o período P é o mesmo para ambas as estrelas.

Podemos calcular a_L pela expressão da velocidade radial por efeito Doppler:

$$v_{L,r} = \frac{2\pi a_L}{P} = \frac{\Delta\lambda_L}{\lambda} c \Rightarrow a_L = \frac{\Delta\lambda_L P c}{2\pi\lambda}$$

De maneira similar para a_S :

$$v_{S,r} = \frac{2\pi a_S}{P} = \frac{\Delta\lambda_S}{\lambda} c \Rightarrow a_S = \frac{\Delta\lambda_S P c}{2\pi\lambda}$$

Logo,

$$a = a_S + a_L = \frac{\Delta\lambda_S P c}{2\pi\lambda} + \frac{\Delta\lambda_L P c}{2\pi\lambda} = \frac{P c}{2\pi\lambda} (\Delta\lambda_S + \Delta\lambda_L)$$

$$a = \frac{(3,1536 \times 10^8)(3 \times 10^8)}{2\pi(656,281)}(0,072) = 1,652 \times 10^{14} m = 11,04 U A$$

Substituindo na soma das massas:

$$M_L + M_S = \frac{a^3}{P^2} = \frac{(11,04)^3}{(10)^2} = 13,5 M_\odot$$

Temos o seguinte sistema:

$$\frac{M_L}{M_S} = 9,3 \Rightarrow M_L = 9,3 M_S$$

$$M_L + M_S = 13,5 M_\odot$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $M_L = 12 M_\odot$ e $M_S = 1,3 M_\odot$

(b) Para descobrirmos a distância do exoplaneta ao sistema binário, temos

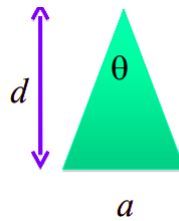


Figura 3: Representação esquemática das grandezas envolvidas no exercício

Queremos a distância em parsec, então utilizaremos a separação angular máxima em segundos de arco, como fornecida no enunciado.

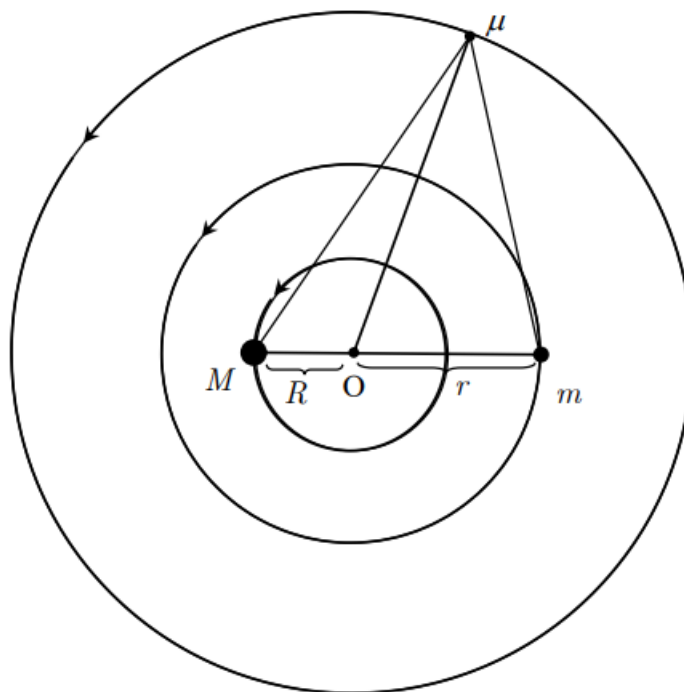
$$a(UA) = \theta(") d(pc) \Rightarrow d(pc) = \frac{a(UA)}{\theta(")}$$

Substituindo o valor de a encontrado no item anterior

$$d(pc) = \frac{a(UA)}{\theta''} = \frac{11,04}{2,0} = 5,5$$

Encontramos $d = 5,5pc$

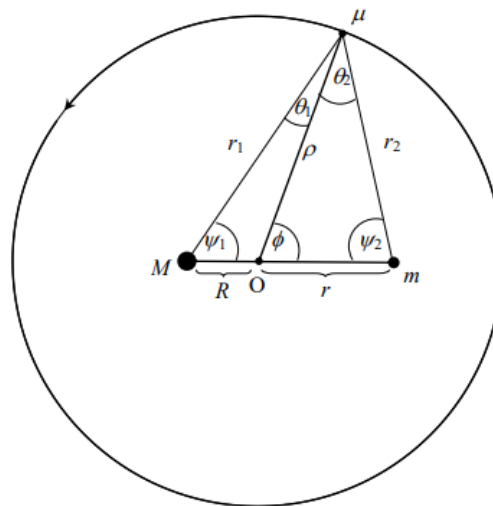
3. **(Sistema Triplo)** Dois corpos de massa M e m orbitam um centro de massa em comum em órbitas circulares de raios R e r , respectivamente. Um corpo de massa infinitesimal μ é colocado em um órbita circular coplanar com as órbitas de M e m ao redor do mesmo centro de massa, de modo que μ permanece estacionário com relação a esses dois corpos. Assuma que μ não é colinear com M e m .



- (a) **(2 pontos)** Encontre a velocidade angular ω_0 da linha que liga M e m em função de R, r, M, m e da constante gravitacional G .
- (b) **(8 pontos)** Encontre os valores das distâncias entre μ e M , μ e m e entre μ e o centro de massa.

Solução:

I. Solution



1.1 Let O be their centre of mass. Hence

$$MR - mr = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{(R+r)^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

From Eq. (2), or using reduced mass, $\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3}$

$$\text{Hence, } \omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} = \frac{GM}{r(R+r)^2} = \frac{Gm}{R(R+r)^2}. \quad \dots\dots\dots (3)$$

1.2 Since μ is infinitesimal, it has no gravitational influences on the motion of neither M nor m . For μ to remain stationary relative to both M and m we must have:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu \omega_0^2 \rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3} \rho \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2} \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Substituting $\frac{GM}{r_1^2}$ from Eq. (5) into Eq. (4), and using the identity

$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, we get

$$m \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{r_2^2} = \frac{(M+m)}{(R+r)^3} \rho \sin \theta_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

The distances r_2 and ρ , the angles θ_1 and θ_2 are related by two Sine Rule equations

$$\begin{aligned} \frac{\sin \psi_1}{\rho} &= \frac{\sin \theta_1}{R} \\ \frac{\sin \psi_1}{r_2} &= \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R+r} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Substitute (7) into (6)

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{R}{(R+r)^4} \frac{(M+m)}{m} \quad \dots\dots\dots (10)$$

Since $\frac{m}{M+m} = \frac{R}{R+r}$, Eq. (10) gives

$$r_2 = R+r \quad \dots\dots\dots (11)$$

By substituting $\frac{Gm}{r_2^2}$ from Eq. (5) into Eq. (4), and repeat a similar procedure, we get

$$r_1 = R+r \quad \dots\dots\dots (12)$$

Hence, it is an equilateral triangle with

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 60^\circ \\ \psi_2 &= 60^\circ\end{aligned}\dots\dots\dots (13)$$

The distance ρ is calculated from the Cosine Rule.

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + (R+r)^2 - 2r(R+r)\cos 60^\circ \\ \rho &= \sqrt{r^2 + rR + R^2}\end{aligned}\dots\dots\dots (14)$$

Alternative Solution to 1.2

Since μ is infinitesimal, it has no gravitational influences on the motion of neither M nor m . For μ to remain stationary relative to both M and m we must have:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2}\cos\theta_2 = \mu\omega^2\rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3}\rho \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2}\sin\theta_2 \dots\dots\dots (5)$$

Note that

$$\begin{aligned}\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} &= \frac{R}{\sin\theta_1} \\ \frac{r_2}{\sin\phi} &= \frac{r}{\sin\theta_2} \quad (\text{see figure}) \\ \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} &= \frac{R}{r} \times \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \times \frac{r_2}{r_1}\end{aligned}\dots\dots\dots (6)$$

$$\text{Equations (5) and (6):} \quad r_1 = r_2 \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{m}{M} \dots\dots\dots (8)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \dots\dots\dots (9)$$

The equation (4) then becomes:

$$M\cos\theta_1 + m\cos\theta_2 = \frac{(M+m)}{(R+r)^3}r_1^2\rho \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{Equations (8) and (10):} \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2\rho}{(R+r)^3} \sin\theta_2 \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{Note that from figure,} \quad \frac{\rho}{\sin\psi_2} = \frac{r}{\sin\theta_2} \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{Equations (11) and (12): } \sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2 r}{(R+r)^3} \sin \psi_2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

Also from figure,

$$(R+r)^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1^2 = 2r_1^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{Equations (13) and (14): } \sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin \psi_2}{2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ - \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ - 2\psi_2 \quad (\text{see figure})$$

$$\therefore \cos \psi_2 = \frac{1}{2}, \psi_2 = 60^\circ, \psi_1 = 60^\circ$$

Hence M and m form an equilateral triangle of sides $(R+r)$

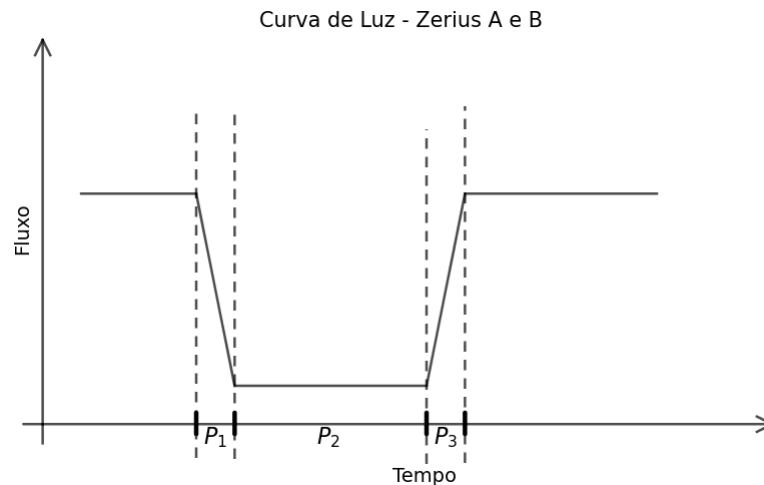
Distance μ to M is $R+r$

Distance μ to m is $R+r$

$$\text{Distance } \mu \text{ to } O \text{ is } \rho = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2} - R\right)^2 + \left\{(R+r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}^2} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

4. **(Anomalia na Curva de Luz)** Os astrônomos Eugênio e Gustavo analisam há muitos anos as curvas de luz de um conjunto binário de estrelas eclipsantes, Zerius A e Zerius B. Certo dia, após muitas comparações de várias curvas, eles perceberam uma anomalia no comportamento do decréscimo de luz. Tratava-se então de um exoplaneta orbitando **Zerius B**.

Em seguida, utilizaram de algumas técnicas para manipular os dados e chegar a um mesmo instante de fase do binário com o objetivo de isolar o comportamento apenas do planeta na curva de luz. O resultado foi o seguinte (figura não em escala):



Assuma que todas as órbitas são circulares e coplanares com inclinação $i = 90^\circ$, que as estrelas não estão se eclipsando nos instantes de brilho máximo no gráfico acima e que os centros do exoplaneta e de Zerius A se alinham na direção da visada em um instante do intervalo de tempo de brilho mínimo. Atenção, a curva acima refere-se ao eclipse de Zerius A, não o B, pelo planeta.

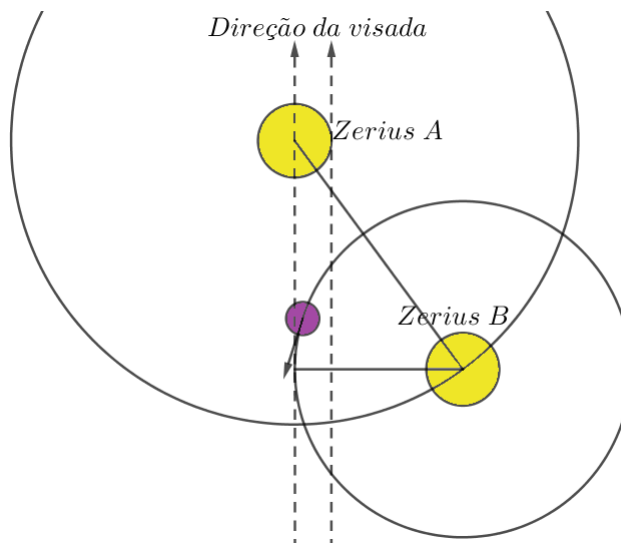
Interprete a situação e encontre os raios do exoplaneta, em raio de Júpiter, e da estrela Zerius A, em raio solar. Dados: ambas as estrelas possuem uma massa solar e o período orbital do planeta

é $P = 1,4$ ano. No gráfico, $P_1 = P_3 = 0,001546$ ano e $P_2 = 0,037951$ ano.

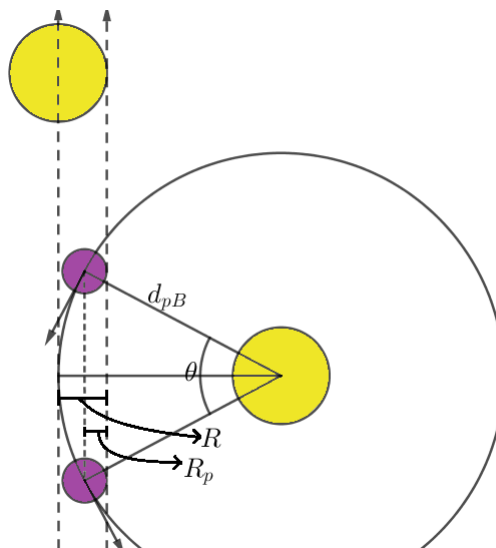
Solução:

O decréscimo de fluxo do sistema binário se deve ao exoplaneta e como indicado no texto ao eclipse de Zeriús A por ele.

Como exposto, o corpo orbita Zeriús B, uma estrela não está eclipsando a outra e os centros do exoplaneta e de Zeriús A se alinham na direção da visada, então tem-se a seguinte configuração:



O fluxo mínimo acontece quando o disco planetário está totalmente à frente do disco estelar de Zeriús A, isto é:



θ será o ângulo orbital percorrido pelo exoplaneta durante o patamar do mínimo:

$$\theta = \frac{P_2}{P} \cdot 2\pi$$

Pela simetria e geometria do problema, desenvolvemos a seguinte expressão:

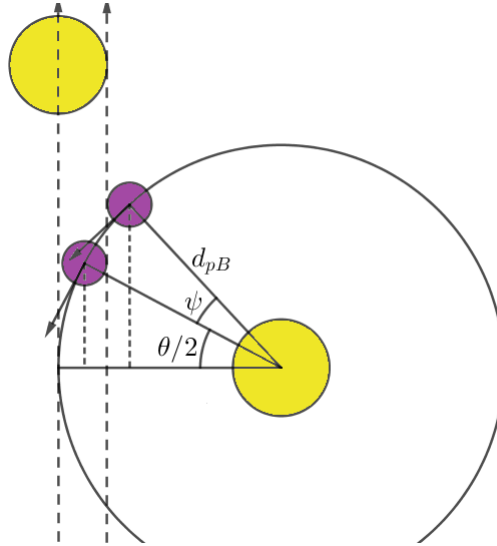
$$R - R_p = d_{pB} - d_{pB} \cdot \cos(\theta/2) \Rightarrow$$

$$R - R_p = d_{pB} \left(1 - \cos \left(\pi \cdot \frac{P_2}{P} \right) \right)$$

Substituindo os valores:

$$R - R_p = 6,78497 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Considerando o movimento desde o ponto de início da diminuição de brilho, temos a situação:



ψ será o ângulo orbital percorrido pelo exoplaneta durante a diminuição:

$$\psi = \frac{P_1}{P} \cdot 2\pi$$

Novamente, observando a geometria do problema, concluímos:

$$R + R_p = d_{pB} - d_{pB} \cdot \cos(\theta/2 + \psi)$$

$$R + R_p = d_{pB} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{P_1 + P_2/2}{P} \right) \right)$$

Substituindo os valores temos:

$$R + R_p = 7,93478 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Resolvendo o sistema acima para R e R_p e convertendo para as requeridas unidades, encontramos:

$$R = 1,057 R_{\odot}$$

$$R_p = 0,804 R_{Jup}$$

5. **(Amnésia)** Shell decidiu fazer uma viagem de férias e, como um bom astrônomo, tirou inúmeras

fotos do céu. Contudo, após retornar ao Brasil, Shell infelizmente passou por um severo caso de amnésia e esqueceu todos os eventos que haviam ocorrido nas últimas semanas, incluindo o local que ele havia visitado.

Por sorte, Shell havia enviado a seguinte foto a Lais:



Na imagem, a linha verde é o horizonte.

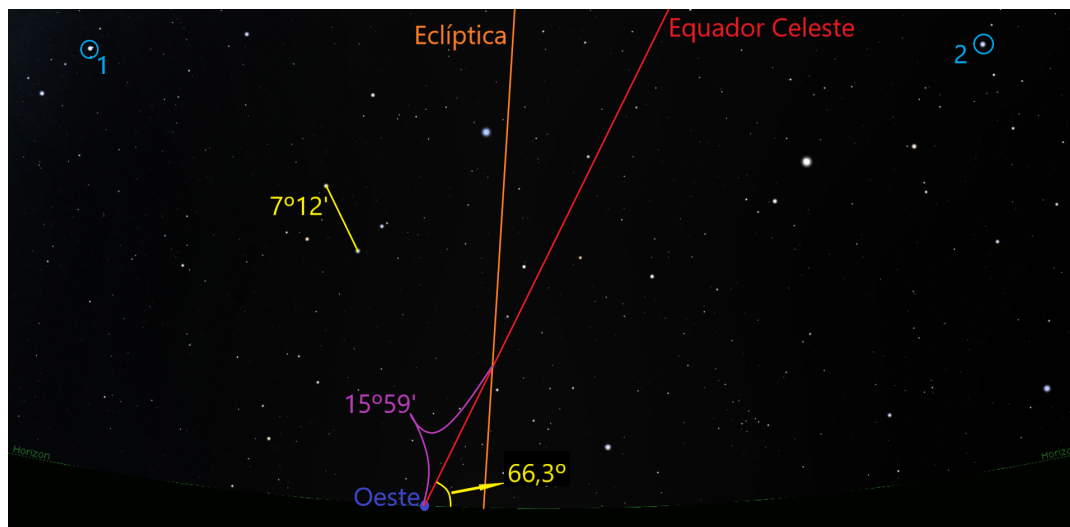
Shell anotou no verso da imagem que, no instante em que a foto foi tirada, o horário civil em Greenwich era 16h30min00s do dia 14 de maio de 2021.

Como Lais sabia que o tempo sideral local em Greenwich no dia 1 de janeiro de 2021 à meia noite era igual a 06h43min29s, ela pôde determinar a latitude e a longitude do local visitado por Shell e consequentemente descobrir o país onde ele tirou a foto.

Para essa questão, fique à vontade para pesquisar as coordenadas de qualquer estrela, separação angular entre estrelas ou mapas de países. Você pode pesquisar o que você quiser, desde que você cite a fonte de todas as informações externas que você utilizar na resolução.

- (a) **(2 pontos)** Qual era a latitude de Shell?
- (b) **(2,5 pontos)** Qual era a longitude de Shell?
- (c) **(1 ponto)** Qual era a constelação no zênite de Shell?
- (d) **(1 ponto)** Qual era a constelação no nadir de Shell?
- (e) **(0,5 ponto)** Marque na figura e escreva o nome do ponto cardeal que está na foto de Shell.
- (f) **(1,5 ponto)** Marque o Equador celeste, a Eclíptica e o Equador galáctico na foto tirada por Shell. Como o fundo da imagem é preto, talvez seja mais simples utilizar um editor de imagens (o Paint 3D é extremamente fácil de usar) do que imprimir a imagem.
- (g) **(1 ponto)** Identifique as estrelas 1 e 2.
- (h) **(0,5 ponto)** Identifique o país em que a foto foi tirada.

Solução:



- (a) A latitude de Shell era igual a aproximadamente -23° (o valor mais preciso seria -23.68°). Respostas entre -21° e -25° receberão a pontuação total.

Respostas entre -20° e -21° ou entre -25° e -26° receberão metade da pontuação.

A maneira mais fácil de determinar a latitude era traçar o Equador celeste e medir a inclinação entre o Equador e o horizonte, que é igual a 67° . Portanto, a latitude deve ser igual a $90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$.

Além disso, era fácil perceber que o hemisfério de Shell era o Sul, pois a constelação *Corvus*, que está no hemisfério celeste sul, está claramente no hemisfério do polo elevado na foto.

- (b) Número de dias entre o início do ano e o momento em que a foto foi tirada:

$$n_{\text{Solares}} = 133 + \frac{16.5}{24} \text{ dias}$$

Considerando que o ano tem um dia sideral a mais do que dias solares, é possível calcular o horário sideral em Greenwich no momento em que a foto foi tirada:

$$n_{\text{Siderais}} = \left(133 + \frac{16.5}{24} \right) * \frac{365.242 + 1}{365.242}$$

$$n_{\text{Siderais}} = 134.0535 \text{ dias}$$

$$TS_{\text{Greenwich}} = 06h43min29s + 0.0535 \text{ dias}$$

$$TS_{\text{Greenwich}} = 06h43min29s + 1h17min05s$$

$$TS_{Greenwich} = 8h00min34s$$

Como o Ponto Antivernal está na figura, é fácil determinar o tempo sideral local no local em que Shell tirou a foto. Para isso, é necessário medir o ângulo entre o Ponto Antivernal e o oeste. Para isso é necessário utilizar algum outro ângulo como referência. Nesse caso, as estrelas utilizadas como referência foram Kraz (β Crv, $\delta = -23^{\circ}23'$ e $\alpha = 12h34min$) e (γ Crv, $\delta = -17^{\circ}33'$ e $\alpha = 12h16min$). Utilizando a lei dos cossenos, é possível determinar que a separação angular entre as duas estrelas é igual a $7^{\circ}12'$. Com base nesse ângulo, é possível concluir que o ângulo entre o oeste e o Ponto Antivernal é igual a $1h03min56min$ (evidentemente seria impossível obter um valor tão preciso com uma régua, mas eu achei melhor incluir o valor exato no gabarito).

Dessa forma, o ângulo horário do Ponto Antivernal é igual a $4h56min04s$, o que implica que o ângulo horário do Ponto Vernal é igual a $16h56min04s$ (o ângulo horário geralmente é definido em uma escala de $-12h$ a $12h$, mas nesse caso será utilizada escala de $0h$ a $24h$ para facilitar os cálculos). Por definição, o valor do ângulo horário do Ponto Vernal é igual ao tempo sideral local. Como a diferença entre o tempo sideral de Shell e o tempo sideral de Greenwich deve-se exclusivamente à diferença de longitude, é possível determinar a longitude de Shell:

$$\lambda_{Shell} = TS_{Shell} - TS_{Greenwich}$$

$$\lambda_{Shell} = 16h56min04s - 8h00min34s$$

$$\lambda_{Shell} = 8h55min30s$$

$$\lambda_{Shell} = 134^{\circ}L$$

Vale ressaltar que o sinal positivo indica que Shell está no hemisfério Leste.

Respostas entre $132^{\circ}L$ e $136^{\circ}L$ receberão a pontuação total. Respostas entre $131^{\circ}L$ e $132^{\circ}L$ ou entre $136^{\circ}L$ e $137^{\circ}L$ receberão metade da pontuação atribuída à resposta final.

- (c) A constelação no zênite era *Ophiuchus*.
Scorpius também é uma resposta que receberá a pontuação total, pois essa constelação estava extremamente próxima do zênite.
- (d) A constelação no nadir era *Taurus*.
- (e) O ponto cardeal oeste está marcado na imagem.
- (f) A Eclíptica e o Equador celeste estão marcados na imagem. O Equador galáctico não está nessa foto.
- (g) 1 - Muhlifain (γ Cen)
2 - Alphecca (α CrB)
- (h) A foto foi tirada na Austrália.
Caso alguém esteja curioso para saber, o nome da cidade em que a foto foi tirada é Alice Springs.