

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 5 problemas, todos valendo 10 pontos;
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 5". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 6".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.
10. Para as entregas após o prazo final, utilizaremos o seguinte protocolo:
 - Até 1h de atraso: perde 10% da nota final
 - De 1 a 6h de atraso: perde 30% da nota final
 - Mais de 6h de atraso: a lista não será aceita

Prazo: 03/07/2021 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **(Distância)** Um telescópio f/2,5 com 0,5m de diâmetro coleta imagens no Filtro B de uma estrela com diâmetro angular de 1". Utiliza-se uma placa CCD com pixels de $2 \mu m$ de lado cada um, e a medição é feita em um tempo de integração $t=2$ segundos. Considere a razão sinal-ruído $SNR=250$, em que os ruídos são $\sigma_1 = 11 \text{ contagens/pixel}$ e $\sigma_2 = 5t \text{ contagens/pixel}$ e o ruído total dado por $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$. Ainda, sabe-se que o índice de cor aparente dessa estrela vale 0,13, $M_v = 2,00 \text{ mag}$ e a extinção atmosférica $a_v = 0,01 \text{ mag/pc}$

Pede-se:

- A escala de placa em "/mm.
- A magnitude aparente no filtro B dessa estrela. Considere que foi detectada uma taxa de 1 contagem por segundo para uma outra estrela de magnitude 16,8 mag.
- A distância, em parsecs, até essa estrela.

Solução:

- Sendo p a escala de placa, D o diâmetro e R a razão focal:

$$p = \frac{1}{D.R} = \frac{1}{(500 \text{ mm})(2,5)} \cdot \frac{180.60.60}{\pi} = 165''/\text{mm}$$

- Pela razão sinal-ruído, temos:

$$SNR = \frac{C_{total}}{\sigma}$$

C =Contagens, σ =Ruído total

Calculando σ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(5.t.n)^2 + (11.n)^2}$$

n =número de pixels ocupados pela estrela

Sendo L o tamanho do pixel e θ o diâmetro angular, n é dado pelo quadrado do diâmetro ocupado pela estrela:

$$\text{diâmetro} = \frac{\theta}{p.L} = \frac{1''}{(165''/\text{mm}).(2.10^{-3} \text{ mm})} = 3 \text{ pixels}$$

$$n = 3^2 = 9 \text{ pixels}$$

Nota-se que, dependendo da geometria, a imagem poderia ocupar de 9 até 16 pixels (uma vez que 9 pixels é uma aproximação e, na realidade, daria um pouco maior). Portanto, outros valores de pixels foram considerados, desde que corretamente justificados. Assim,

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(5.2.9)^2 + (11.9)^2}$$

$$C_{total} = 250.\sigma \approx 33449 \text{ contagens}$$

$$F = \frac{C}{t} = 16724 \text{ contagens/s}$$

Finalmente:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m_B - 16,8 = -2,5 \log\left(\frac{16724}{1}\right)$$

$$m_B = 6,24 \text{ mag}$$

(c) A partir do índice de cor, temos:

$$(B - V) = m_B - m_V = 0,13$$

$$m_V = 6,24 - 0,13 = 6,11$$

Comparando-se com a magnitude absoluta:

$$m_V - M_V = 5 \log(d) - 5 + a_v d$$

$$d = 10^{\frac{m_V - M_V + 5 - 0,01d}{5}}$$

Por iteração, chegamos em $d = 52,2 \text{ pc}$

2. **(Telescópio Cassegrain)** Bismarck, um astrônomo muito curioso, resolveu investigar as propriedades de um espelho parabólico. Para tanto, comprou um telescópio com foco Cassegrain com espelho primário parabólico de abertura $D = 160 \text{ mm}$ e distância focal $f_p = 700 \text{ mm}$. O espelho secundário é hiperbólico com semi-eixo maior de comprimento $a = 150 \text{ mm}$ e a distância focal do telescópio é $f = 1600 \text{ mm}$. Ajude Bismarck e faça o que se pede.

- (4,0 pontos)** Considere uma superfície parabólica espelhada. Partindo de uma equação de parábola $y = a(x^2 - x_0^2)$, demonstre o fato de que qualquer raio paralelo ao eixo y que incidir sobre a referida superfície será refletido para o mesmo ponto P . Calcule as coordenadas do ponto P .
- (1,0 ponto)** Usando a equação de parábola do item anterior, determine o parâmetro a para o espelho de Bismarck.
- (4,0 pontos)** Quantos centímetros após o espelho primário é focalizada a imagem produzida pelo telescópio do astrônomo?
- (1,0 ponto)** Determine o comprimento do tubo do telescópio.

Solução:

- Primeiramente, pode-se esquematizar a parábola dada pela equação $y = a(x^2 - x_0^2)$ e uma reta $x = x_1$ que representa um raio de luz genérico e paralelo ao eixo y .

Assim, esse raio será refletido na parábola no ponto de coordenada (x_1, y_1) . Nesse ponto, a inclinação da reta tangente à parábola pode ser obtida:

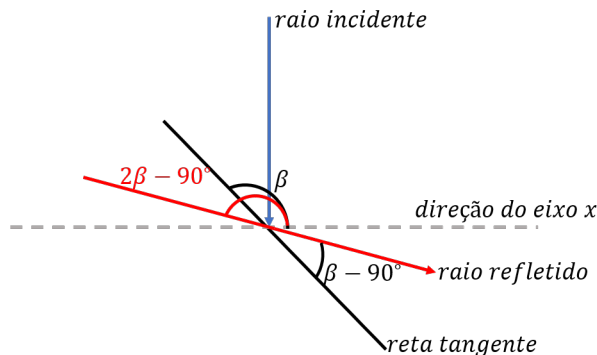
$$f(x) = a(x^2 - x_0^2) \iff f'(x) = 2ax$$

$$f'(x_1) = 2ax_1$$

Desse modo, a equação da reta tangente é dada por:

$$y - y_1 = 2ax_1(x - x_1)$$

Sabe-se que o coeficiente angular dessa reta representa a tangente do ângulo que ela faz com o eixo das abscissas: $\tan \beta = 2ax_1$. Usando esse fato e associando-o às propriedades de reflexão, tem-se:



Nota-se que a reta que representa o raio refletido faz um ângulo de $2\beta - 90^\circ$ com o eixo x . Agora, é necessário obter, com essa informação, a equação da reta refletida. Isso pode ser conseguido usando-se as relações trigonométricas:

$$\tan(2\beta - 90^\circ) = \frac{\sin 2\beta \cos 90^\circ - \cos 2\beta \sin 90^\circ}{\cos 2\beta \cos 90^\circ + \sin 2\beta \sin 90^\circ} = -\frac{1}{\tan 2\beta}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta será

$$\tan(2\beta - 90^\circ) = \frac{\tan^2 \beta - 1}{2 \tan \beta} = \frac{4a^2 x_1 - 1}{4ax_1}$$

A equação da reta refletida será:

$$y = y_1 + \frac{4a^2 x_1 - 1}{4ax_1}(x - x_1)$$

Da equação da parábola, sabe-se que $y_1 = a(x_1^2 - x_0^2)$. Substituindo essa expressão na equação acima,

$$y = \frac{4a^2 x_1 - 1}{4ax_1}x + \frac{1 - 4a^2 x_0^2}{4a}$$

Analisando-se o coeficiente linear, percebe-se que ele independe do raio incidente $x = x_1$. Ou seja, todos os raios refletidos interceptam o eixo y na ordenada $\frac{1 - 4a^2 x_0^2}{4a}$.

Por fim, a coordenada do ponto P será

$$P = \left(0, \frac{1}{4a} - ax_0^2\right)$$

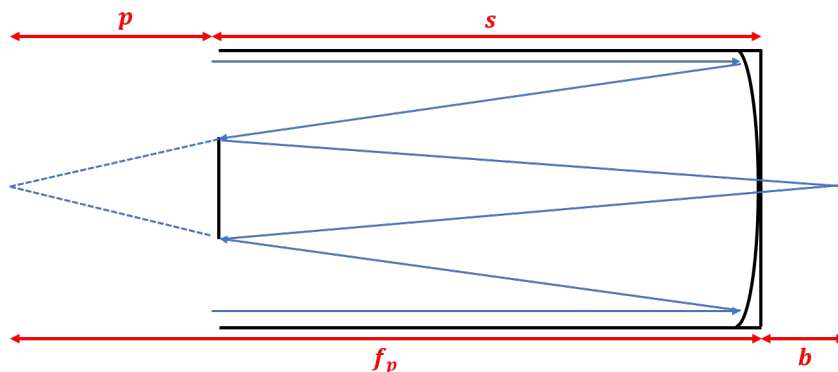
- b) O enunciado fornece a distância focal do espelho primário, f_p , que nada mais é a distância entre o ponto de foco P e o vértice da parábola. Da equação da parábola, obtém-se o vértice V :

$$V = (0, -ax_0^2)$$

A distância entre os pontos será

$$f_p = \frac{1}{4a} \iff a = \frac{1}{4f_p} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

c) Usando a imagem abaixo como referência



são definidos os parâmetros:

- f_p : distância focal do espelho primário
- p : distância entre o espelho secundário e o foco do espelho primário
- s : distância entre os espelhos
- b : distância entre o final do tubo e o ponto focal
- q : distância entre o espelho secundário e o ponto focal

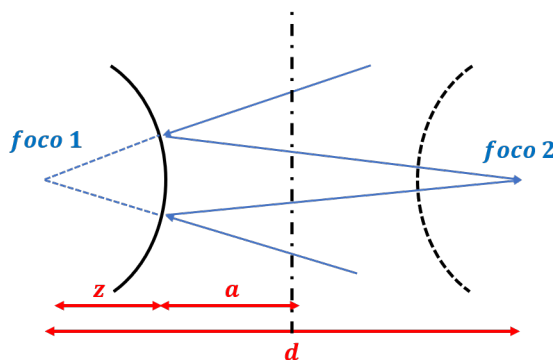
Assim, pode-se escrever

$$\begin{cases} f_p = p + s \\ q = s + b \end{cases}$$

A distância focal efetiva f do telescópio será dada por

$$f = f_p \frac{q}{p}$$

Agora, deve-se analisar o espelho secundário. Conforme o esboço abaixo, a hipérbole apresenta dois focos. Para se atender aos requisitos de boa formação de imagem do telescópio, o primeiro foco deve coincidir com o foco da parábola, ao passo que o segundo deve ser o ponto focal.



Das propriedades de hipérboles, a distância entre os focos será $2(f_h + a)$, sendo $f_h = p$ a distância focal da hipérbole e a o semi-eixo maior. De acordo com a imagem, essa distância será igual $f_p + b$. Obteve-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} f_p = p + s \\ f = f_p \frac{s + b}{p} \\ 2(p + a) = f_p + b \end{cases} \iff \begin{cases} 700 = p + s \\ 1600 = 700 \frac{s + b}{p} \\ 2(p + 150) = 700 + b \end{cases}$$

A resolução do sistema fornece:

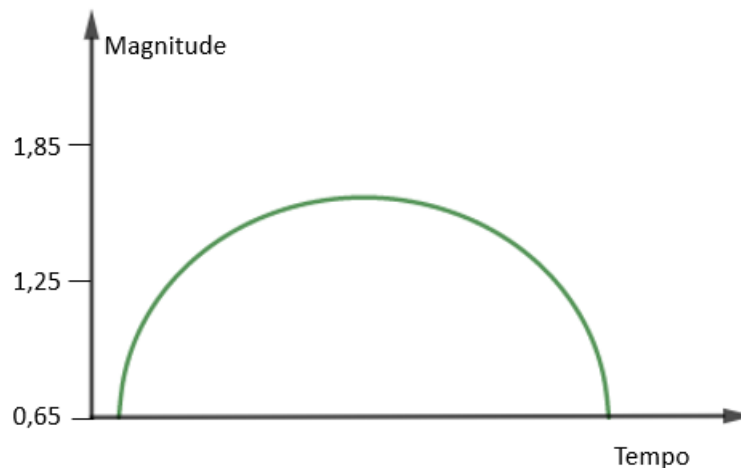
$$\begin{cases} p = 233 \text{ mm} \\ s = 467 \text{ mm} \\ b = 67 \text{ mm} \end{cases}$$

O valor requerido pelo enunciado é $b = 67 \text{ mm}$.

- d) Para um telescópio do tipo Cassegrain, o comprimento do tubo é, com boa aproximação, a distância entre os espelhos primário e secundário:

$$L = s = 467 \text{ mm}$$

3. **(Betelgeuse)** De novembro de 2019 a março de 2020 Betelgeuse sofreu um aumento abrupto de magnitude. Diversas hipóteses foram levantadas para explicar o fenômeno, sendo uma delas a possibilidade de uma nuvem de poeira ter encoberto a estrela. Neste exercício trabalharemos com duas hipóteses envolvendo a absorção da luz de Betelgeuse por nuvens de poeira. O gráfico abaixo mostra a magnitude de Betelgeuse com o passar do tempo para o primeiro modelo analisado:



Primeiramente consideraremos uma nuvem de poeira exatamente no meio do caminho entre a Terra e Betelgeuse:

- a) **(5 pontos)** Baseando-se nos dados, qual o formato da nuvem? Justifique matematicamente e encontre suas dimensões, sabendo que após diversas análises foi descoberto que a distância percorrida pela luz na nuvem no caso de maior absorção (em UA) é cerca de 100 vezes maior que o coeficiente de absorção do objeto (em mags por UA).

Outra hipótese considerada foi a de que Betelgeuse teria expelido matéria no universo a seu redor de forma que tais partículas absorvessem parte de sua luz. Assuma que neste caso a poeira assumiu a forma de um fino véu (espessura de aproximadamente $\epsilon = 10 R_{\odot}$) capaz de cobrir inteiramente Betelgeuse quando esta atingiu sua máxima magnitude quando vista da Terra.

b) **(3 pontos)** Análises levaram à conclusão de que as partículas deste véu possuíam raio de cerca de $r = 0,1 \text{ mm}$. Qual a densidade numérica de partículas nessa nuvem?

c) **(2 pontos)** Seja $(B-V)_0$ o índice de cor de Betelgeuse antes do fenômeno e $B-V$ seu índice de cor quando a estrela atinge sua máxima magnitude. Qual destes índices possui maior valor? Justifique matematicamente.

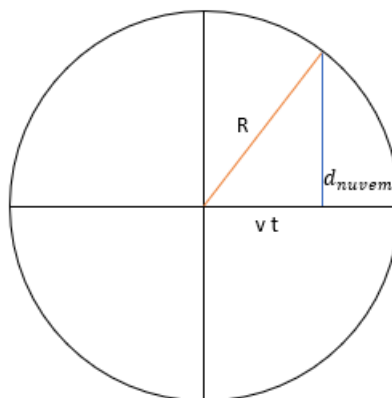
Pode ser útil uma razão bem conhecida nas olimpíadas relacionada aos índices de cor.

Solução: a) Primeiramente vamos analisar o que é essa mudança de magnitude. Temos que:

$$m - M = -5 \log \left(\frac{10}{d} \right) + a_V \ 2 \ d_{nuvem}$$

Como a distância de Betelgeuse a Terra não varia, apenas o último termo influencia na variação de magnitude. Podemos ver que em momento algum a magnitude permanece constante, o que indica que a distância percorrida pela luz também varia o tempo todo, ou seja, a espessura não é constante.

Testemos então a hipótese mais intuitiva: a de uma nuvem esférica.



Assim, a distância percorrida pela luz no interior da nuvem é:

$$d_{nuvem} = \sqrt{R^2 - (vt)^2}$$

O que bate com nosso gráfico!

Assim, basta achar o raio R da nuvem. Para tal, peguemos pontos estratégicos no gráfico, tais como os pontos de maior (m_{max}) e menor (m_{min}) magnitude:

$$m_{max} - m_{min} = a_V \ 2 \ R = 100 a_V^2 = 0,95$$

$$a_V = 0,097 \text{ mag/UA}$$

$$R = 4,9 \text{ UA}$$

b) Comparando o fluxo da menor e maior magnitude, temos:

$$F = F_0 e^{-\eta \epsilon \sigma}$$

$$\ln \left(\frac{F}{F_0} \right) = -\eta \epsilon \pi r^2$$

Encontrando a razão dos fluxos pela equação de Pogson e substituindo os valores finalmente encontramos:

$$\eta = 4,06 \cdot 10^{-3} \text{ grãos/m}^3$$

c) É conhecido que:

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3$$

Logo:

$$(B - V) - (B - V)_0 = \frac{0,95}{3} = 0,32$$

Assim, $B - V > (B - V)_0$.

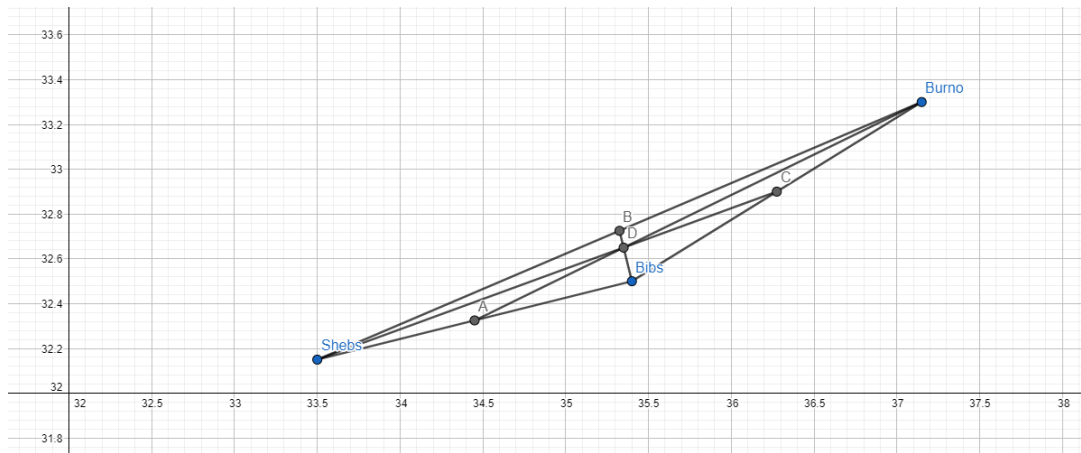
4. **(Contando Pixels)** Em um belo dia, o astrônomo Gelecaio se deparou com um sistema muito curioso de estrelas, o "EAMG", como preferiu denominar. Esse conjunto estelar é constituído por 3 componentes e o astrônomo deseja realizar uma imagem que consiga compreender todas. Para isso, ele dispõe de um telescópio $f/3$, de abertura 150 cm e uma placa CCD $(1,5 \times 1,5) \text{ cm}$. Cada pixel do CCD é um quadrado de lado $l = 1 \mu\text{m}$.

Estrela	Ascensão Reta	Declinação
Bibs	$\alpha_1 = 18h56,3min35,40seg$	$\delta_1 = 35^\circ 27,8' 32,50''$
Shebs	$\alpha_2 = 18h56,3min33,50seg$	$\delta_1 = 35^\circ 27,8' 32,15''$
Burno	$\alpha_3 = 18h56,3min37,15seg$	$\delta_1 = 35^\circ 27,8' 33,30''$

- (a) Em um gráfico de Declinação por Ascensão Reta, represente a disposição das estrelas quando observadas por Caio. Em que coordenadas Gelecaio irá mirar seu telescópio para a melhor centralização do conjunto?
- (b) Quantos pixels serão ocupados pela imagem das três estrelas?

Solução:

- (a) Segue o gráfico de Declinação em função da Ascensão Reta. Para que a figura coubesse na escala, o eixo y começa no ponto $18h56,3min32seg$ e o eixo x começa em $35^\circ 27,8' 32,15''$.



Para melhor centralização, mira-se no baricentro formado pelas estrelas.

$$D = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}; \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{3} \right) \quad (1)$$

Substituindo os valores, obtemos: $D = (18h56,3min35,35seg; 35^\circ27,8'32,65'')$.

(b) (i) Nesse item, primeiramente vamos escrever o operador área, considerando que as estrelas estão muito próximas umas das outras. Assim, fazendo esse cálculo para segundos de arco, vem:

$$A = \frac{15}{2} \begin{vmatrix} 35,40 & 32,50 \\ 33,50 & 32,15 \\ 37,15 & 33,30 \\ 35,40 & 32,50 \end{vmatrix} = 6,81arcsec^2 \quad (2)$$

(ii) Cálculo da escala de placa do telescópio:

$$S = 1rad/f = \frac{206265}{3 \cdot 150 \cdot 10^4} = 0,0458arcsec/\mu m \quad (3)$$

Assim, o número de pixels, n, ocupado em cada eixo será:

$$n^2 S^2 = A \Rightarrow n = 3240pixels \quad (4)$$

Como n é um número inteiro, ele é arredondado para cima. Dessa maneira, o número total de pixels ocupados será n^2 , ou seja:

$$n^2 = (3240 \times 3240) = 10497600pixels \quad (5)$$

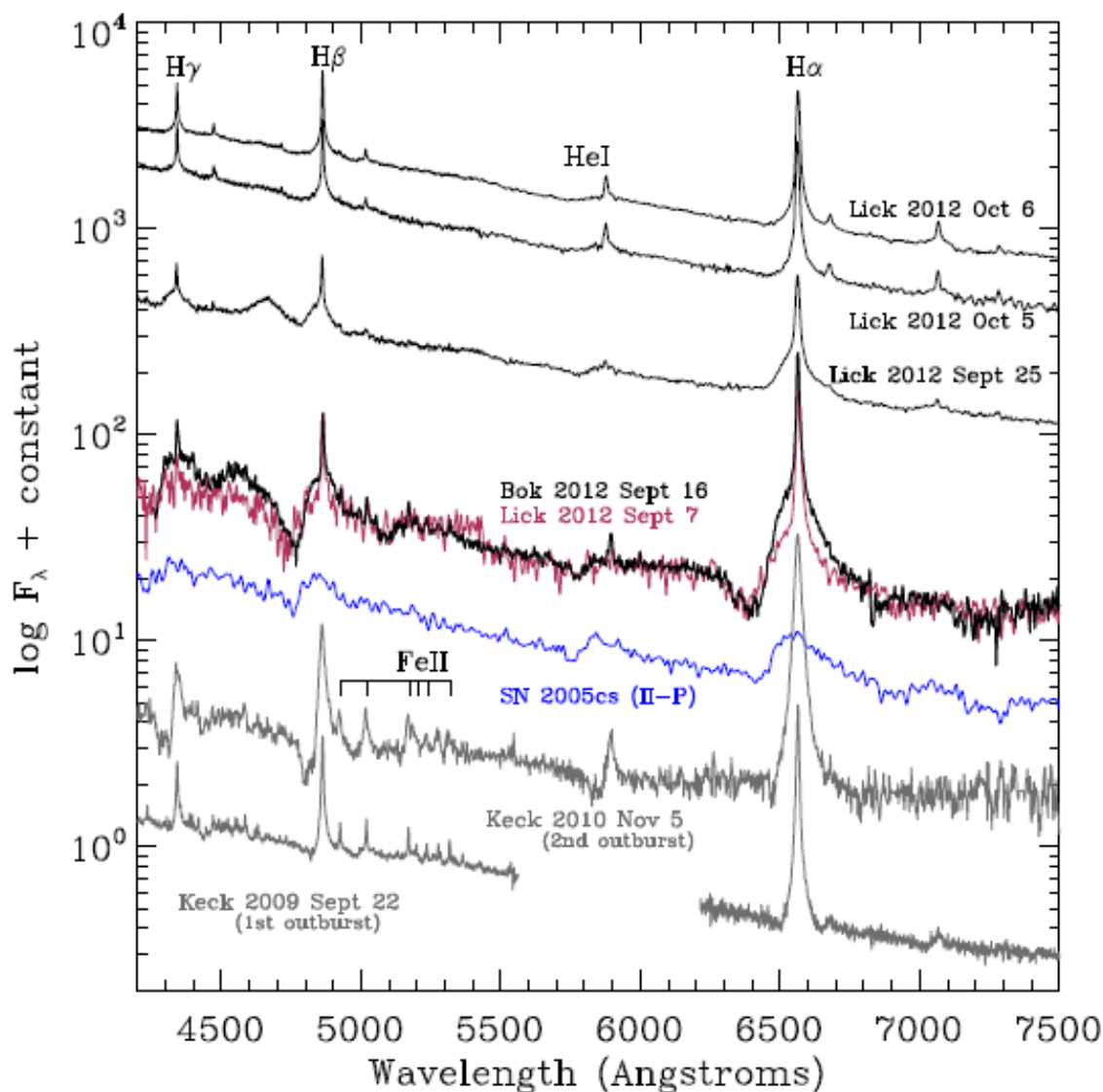
5. **(Nuvem de supernova)** Você está presenciando um dos maiores espetáculos do universo: uma supernova. Ela explodiu em 2009 na galáxia NGC 7259, e formou uma onda de choque que

expande a uma velocidade muito alta. Considere o espectro da supernova por Bok 2012/Lick 2012, no gráfico abaixo.

Calcule o diâmetro angular da explosão, ou seja, da onda de choque da supernova em 2021.

Considere que a velocidade de expansão é constante, e começou no momento da explosão da supernova. Ignore a extinção interestelar e atmosférica.

A partir disto, calcule o diâmetro angular da onda de choque da supernova em 2021, considerando-a com velocidade de expansão constante desde o momento de sua explosão. Ignore a extinção interestelar e atmosférica. ($H_{\alpha} = 6562,8\text{\AA}$)



Espectros da supernova.

Solução:

Primeiro, vamos calcular a distância à supernova combinando a lei de Hubble e o redshift:

$$\begin{aligned}v &= H_0 d = zc \\d &= \frac{zc}{H_0} \\d &= 26,5 \text{ Mpc}\end{aligned}$$

Observando a linha por Bok 2012/Lick 2012 nó gráfico na região da linha H-alpha, percebemos uma linha de emissão marcante, provavelmente do centro da supernova. Também, vemos uma forte absorção em um comprimento de onda um pouco menor. Isso se deve à nuvem de gás que expandiu da supernova e esfriou, absorvendo nesse comprimento de onda.

Medindo na figura, a emissão está em $\lambda_e \approx 6600 \text{ \AA}$ e a absorção em $\lambda_a \approx 6350 \text{ \AA}$. Assim, a diferença de velocidade entre essas regiões, ou seja, a velocidade de expansão da supernova é de:

$$\begin{aligned}v &= c \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} - \frac{\lambda_a - \lambda_0}{\lambda_0} \\&= c \frac{\lambda_e - \lambda_a}{\lambda_0} \\v &= 11400 \text{ km/s}\end{aligned}$$

De setembro de 2012 até julho de 2021, a supernova teve $\Delta t = 8,833$ anos. Com isso, o raio da onda de choque será $R = v\Delta t$. Finalmente, o diâmetro angular é:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2R}{d} \\&= \frac{2v\Delta t}{d}\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta = 1,6 \text{ mas}}$$