

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 5 problemas, todos valendo 10 pontos;
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 7". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 7".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.
10. Para as entregas após o prazo final, utilizaremos o seguinte protocolo:
 - Até 1h de atraso: perde 10% da nota final
 - De 1 a 6h de atraso: perde 30% da nota final
 - Mais de 6h de atraso: a lista não será aceita

Prazo: 14/07/2021 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. **(Aglomerado Globular)** Shell, durante suas observações noturnas, descobre um novo aglomerado globular. Após aferir alguns parâmetros, ele determina que o aglomerado possui tamanho angular $\theta = 30''$ e magnitude aparente $m = +6,0$ quando visto da Terra, além de conter $N = 500 \cdot 10^3$ estrelas de luminosidade 3 vezes menor que a solar. Shell também nota que o aglomerado se move em direção ao plano do disco da Via Láctea, de tal modo que irá adentrá-lo com um ângulo $\alpha = 20^\circ$ em relação ao plano galáctico.

Para as questões abaixo, considere que o disco da Via Láctea tem espessura $\delta = 300 \text{ pc}$ e que os efeitos extinção interestelar podem ser desprezados.

- (1,0 ponto)** Encontre a distância do aglomerado à Terra no instante em que ele foi detectado por Shell.
- (3,0 pontos)** Calcule o volume, em pc^3 , da trajetória percorrida pelo aglomerado no disco galáctico.
- (3,0 pontos)** Estime a densidade numérica de estrelas no disco da Via Láctea, em $\text{estrelas}/\text{pc}^3$. Use o fato de que a magnitude aparente de uma estrela próxima ao Sol, αCen , é $m_1 = 0,0$.
- (2,0 pontos)** Faça uma estimativa do número de estrelas do tipo solar que estariam contidas na trajetória percorrida pelo aglomerado dentro do disco galáctico.
- (1,0 ponto)** Reavalie, qualitativamente, sua estimativa do item anterior. Para tanto, discuta sobre a hipótese de se desprezar os efeitos extinção interestelar.

Solução:

- a) Para calcular a distância, primeiro será determinada a magnitude absoluta do aglomerado:

$$M - M_\odot = -2,5 \log \left(\frac{500 \cdot 10^3 L_\odot / 3}{L_\odot} \right) \iff M = 4,83 - 2,5 \log \left(\frac{500 \cdot 10^3 L_\odot / 3}{L_\odot} \right)$$

$$M = -8,22$$

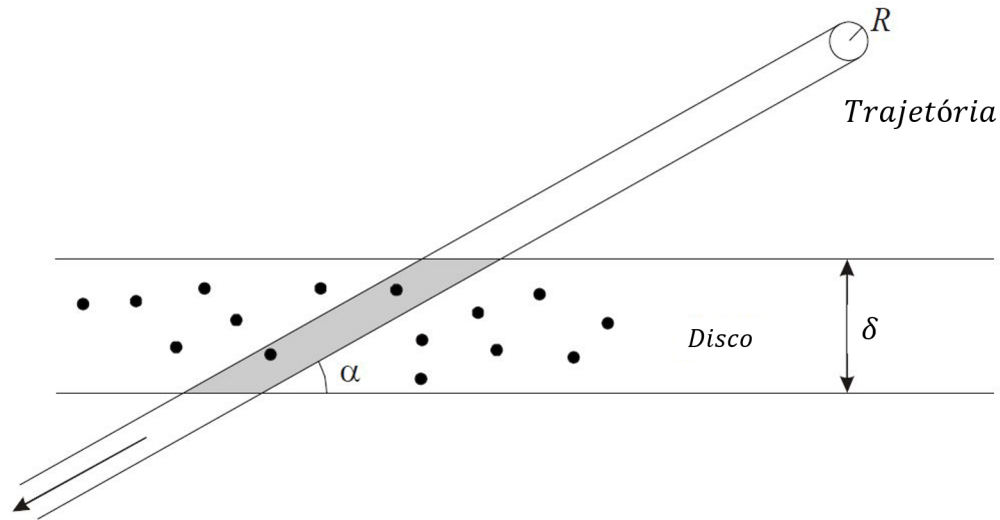
Assim, do módulo de distância,

$$m - M = 5 \log d - 5 \iff d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \approx \boxed{7000 \text{ pc}}$$

- b) Primeiramente, obtém-se o raio do aglomerado:

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{R}{d} \iff R = d \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = 30,54 \text{ pc}$$

Agora, observando-se um esboço da trajetória do aglomerado,



nota-se que o volume requerido é o do cilindro oblíquo, representado pela região mais escura na imagem, calculado pela expressão:

$$V = S_t \delta$$

A área da base do cilindro está relacionada ao raio do aglomerado e ao ângulo de entrada. Isso porque a base será uma elipse, com semi-eixo menor igual ao raio do aglomerado e semi-eixo maior igual a $R/\sin \alpha$

$$S_t = \pi \frac{R}{\sin \alpha} R = 8569 \text{ pc}^2$$

Por fim, o volume,

$$V = 2,57 \cdot 10^6 \text{ pc}^3$$

- c) Uma possível estimativa pode ser obtida a partir da distância de $\alpha \text{ Cen}$, aproximando que ela seja uma estrela do tipo solar

$$d' = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 10^{\frac{0,0-4,83+5}{5}} \approx 1,1 \text{ pc}$$

Sabe-se que o valor medido é, na realidade, aproximadamente $1,33 \text{ pc}$. A discrepância se dá por conta da aproximação feita. Assim, a estimativa para a densidade numérica de estrelas é:

$$n = \frac{1}{d'^3} = 0,75 \text{ estrelas/pc}^3$$

- d) Basta multiplicar a densidade numérica de estrelas pelo volume da trajetória:

$$N = n V \approx 2 \cdot 10^6 \text{ estrelas}$$

- e) Na situação em que se considera o efeito de extinção interestelar, a distância calculada do aglomerado é afetada. Assim, a distância determinada seria **maior** que a real.

Com a distância superestimada do aglomerado, seu raio também o está, bem como o volume da trajetória. Logo, estamos obtendo um valor de estimativa do número de estrelas **superestimado**. Assim, considerar o efeito de extinção levaria a um número de estrelas **menor** do que o calculado no item d).

2. **(Limite de Chandrasekhar)** O limite teórico para o valor de massa que uma Anã Branca pode ter foi obtido em 1930 pelo físico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar. Serão realizados alguns procedimentos de modo a se obter uma versão simplificada da análise feita por ele.

Dados: massa de repouso do elétron - $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; massa de repouso do próton - $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

- a) **(3,0 pontos)** Primeiramente, será considerado um modelo de estrela composta apenas por hidrogênio e que ele está na forma ionizada. Também se assume que não há energia produzida por fusão na estrela. A energia total dos elétrons será

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}$$

em que N_e é o número total de elétrons. Sendo assim, obtenha, da condição de equilíbrio, uma expressão do raio R_{ab} da Anã Branca em função de constantes e da massa da estrela.

Dica: lembre-se que a condição de equilíbrio está associada a uma configuração de energia mínima.

- b) **(1,0 ponto)** Calcule o valor numérico de R_{ab} com a expressão do item anterior, considerando uma estrela de massa $M = 1,0 M_\odot$.
- c) **(2,0 pontos)** Considerando o valor de R_{ab} do item anterior, obtenha uma estimativa para a separação média r_{sep} entre os elétrons na estrela, assumindo que eles se distribuam uniformemente na estrela.
- d) **(2,0 pontos)** Levando-se em conta elétrons no limite ultrarrelativístico, a expressão da energia atrelada a eles é modificada

$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}$$

Tomando um procedimento análogo ao do item a), obtenha a expressão para a massa crítica M_c da estrela.

- e) **(1,0 ponto)** Analisando a expressão do item anterior, avalie: caso a massa M da estrela seja maior que M_c , a estrela expande ou contrai? Descreva brevemente se esse resultado corrobora as observações astronômicas.
- f) **(1,0 ponto)** Calcule o valor de M_c em unidades de massa solar. Ele é semelhante ao esperado? Caso não seja, elenque algumas hipóteses para a divergência.

Solução:

- a) A energia total da estrela será a soma da energia total dos elétrons e da potencial gravitacional:

$$E = E_G + E_e = -\frac{3GM^2}{5R} + \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}$$

Na condição de equilíbrio, a energia será mínima, ou seja, a derivada de E em relação à distância radial R será nula:

$$\frac{dE}{dR} = 0 \iff \frac{dE_G}{dR} = -\frac{dE_e}{dR}$$

Do enunciado, R associado ao equilíbrio será R_{ab} :

$$\frac{3GM^2}{R_{ab}^2} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{2N_e^{5/3}}{R_{ab}^3}$$

Isolando-se R_{ab} ,

$$R_{ab} = \frac{\hbar^2 \pi^3}{6Gm_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{2N_e^{5/3}}{M^2}$$

- b) Primeiramente, como todo o hidrogênio está ionizado, o número total de prótons será igual ao de elétrons. Como a massa do próton é muito maior que a do elétron, tem-se

$$N_e = N_p \approx \frac{M}{m_p}$$

Com os valores numéricos,

$$R_{ab} = \frac{(1,055 \cdot 10^{-34})^2 \cdot \pi^3}{6 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 4^{2/3}} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \cdot \frac{2 \cdot (\frac{2 \cdot 10^{30}}{1,67 \cdot 10^{-27}})^{5/3}}{(2 \cdot 10^{30})^2} = \boxed{2,28 \cdot 10^4 \text{ km}}$$

- c) A estimativa pode ser obtida pelo procedimento:

$$N_e \cdot \frac{4}{3} \pi r_{sep}^3 \approx \frac{4}{3} \pi R_{ab}^3 \iff$$

$$\boxed{r_{sep} = 2,13 \cdot 10^{-12} \text{ m}}$$

- d) De modo semelhante ao item a),

$$\frac{dE}{dR} = 0 \iff \frac{dE_G}{dR} = -\frac{dE_e}{dR}$$

mas,

$$E = E_G + E_e^{rel} = -\frac{3GM^2}{5R} + \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}$$

Derivando-se ambos os termos de energia,

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R^2} N_e^{4/3}$$

e, portanto, a massa crítica será

$$\boxed{M_c = \frac{3(5^3 \pi)^{1/2}}{16m_p^2} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}}$$

- e) Analisando-se a expressão de energia total, tem-se:

$$E_{tot} = \frac{M}{R} (\beta M^{1/3} - \alpha M)$$

Ambas as constantes são positivas. Da situação do item anterior, com o cálculo da massa crítica, sabe-se que

$$\beta = \alpha M_c^{2/3}$$

e, portanto, a energia será

$$E_{tot} = \frac{\alpha M^{4/3}}{R} (M_c^{2/3} - M^{2/3})$$

uma expressão negativa, já que M é maior que M_c .

Dessa mesma expressão, conclui-se que o **raio contrai**: para se ter energia mínima, configurando estabilidade, o módulo da expressão acima deve aumentar, fato proporcionado pela diminuição do raio.

Esse resultado corrobora as observações. Basta tomar como exemplo uma Supernova Ia, em que a componente Anã Branca do sistema binário, ao atingir a massa do limite de Chandrasekhar, contrai e colapsa.

f) Com os valores dados, encontra-se

$$M_c = 1,36 \cdot 10^{31} \text{ kg} = 6,8 M_\odot$$

Nota-se que o valor é aproximadamente 4,7 vezes menor que o esperado, de $1,4 M_\odot$. Isso se deve a algumas das simplificações feitas. A primeira delas refere-se à expressão da energia total, em que foram tomadas apenas as parcelas gravitacional e dos elétrons, desprezando-se parcelas cinéticas, de potencial elétrico ou a energia produzida pela própria estrela. Ademais, assumiu-se que a composição da estrela é puramente hidrogênio, mas Anãs Brancas também contêm carbono e oxigênio.

3. **(Um longo caminho)** Uma protoestrela (futura estrela, cujo interior ainda não iniciou reações termonucleares) possui massa igual à massa do Sol, composição química solar e magnitude absoluta 0^m . Estime quanto tempo, em milhões de anos, levará para esta protoestrela encolher até o tamanho do Sol.

Considere que durante a compressão a protoestrela não gira, não perde massa e mantém uma temperatura efetiva constante de 3500 K. Lembre-se dos seus conhecimentos de termodinâmica.

Solução:

Vamos determinar os valores iniciais da luminosidade e do raio da protoestrela usando as leis de Pogson e de Stefan-Boltzmann:

$$m_\odot - m = 2,5 \cdot \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right) \Rightarrow L = L_\odot \cdot 10^{\frac{m_\odot - m}{2,5}} \Rightarrow L = 83,1764 L_\odot$$

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} \Rightarrow R_1 = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T} \right)^2 \sqrt{L/L_\odot} \Rightarrow R_1 = 24,8553 R_\odot$$

A taxa com que a protoestrela emite energia, sua luminosidade, está ligada a sua contração, já que não há reações nucleares em seu interior. Ao contrair, parte da energia potencial gravitacional da estrela transforma-se em energia cinética das suas partículas e, por fim, elas emitem radiação.

É lógico supor (e isso está muito próximo da verdade, pois o processo é lento) que a energia é gasta em quantidades iguais para ambos os propósitos, aquecer o interior e emitir radiação, temos então o teorema do virial.

Seja K a energia cinética média total das partículas e U a energia potencial média total das partículas da estrela, isto é, toda a energia potencial armazenada nesse corpo. O teorema do virial afirma que para tal sistema estável, vale:

$$2K + U = 0$$

A energia mecânica total da estrela é $E = K + U$. Juntando com a relação passada, temos:

$$E = \frac{1}{2}U$$

Conhecemos a energia potencial total (ver anexo após esta questão):

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Vamos relacionar tais expressões com a potência de energia irradiada:

Sem Cálculo

Enquanto contrai, a energia mecânica da protoestrela é liberada na forma de radiação. Assim, como comentado no terceiro parágrafo da solução, podemos dizer que a taxa de variação de energia total da protoestrela é igual a sua luminosidade. Como a energia diminui, sua variação é negativa, então, como gostamos de expressar luminosidade positivamente, colocaremos o menos antes de tudo, veja:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = -L \Rightarrow \Delta E = -L\Delta t$$

Fazendo a variação das energias:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta U$$

Substituindo a luminosidade:

$$\Delta U = -2L\Delta t$$

A variação da energia potencial será, sendo R o raio inicial e $R + \Delta R$ o raio final:

$$\Delta U = -\frac{3GM^2}{5} \left(\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} \right)$$

Podemos supor $\frac{\Delta R}{R}$ pequeno e usar a aproximação $(1+x)^c \approx 1+cx$, para $x \ll 1$ e aproximar:

$$\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left(\left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right)^{-1} - 1 \right) \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\Delta R}{R} - 1 \right) = -\frac{\Delta R}{R^2}$$

Fazendo substituições:

$$-\frac{3GM^2}{5} \left(-\frac{\Delta R}{R^2} \right) = -2L\Delta t = -2 \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4 \cdot \Delta t$$

$$-\frac{\Delta R}{R^4} = \frac{40\pi\sigma T^4}{3GM^2} \Delta t$$

Supor ΔR pequeno não é uma boa nesse caso, já que R é o raio solar e $R + \Delta R$ é 24, 8553 raios solares. Vamos pensar em uma engenharia reversa para aproximar $-\frac{\Delta R}{R^4}$ melhor. Lembre-se que $\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} \approx -\frac{\Delta R}{R^2}$, então, de alguma maneira, possivelmente $\frac{1}{(R + \Delta R)^3} - \frac{1}{R^3}$ pode nos ajudar. Vejamos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(R + \Delta R)^3} - \frac{1}{R^3} &= \frac{1}{R^3} \left(\left(1 + \frac{\Delta R}{R} \right)^{-3} - 1 \right) \approx \frac{1}{R^3} \left(1 - 3 \frac{\Delta R}{R} - 1 \right) = -3 \frac{\Delta R}{R^4} \\ -\frac{\Delta R}{R^4} &\approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(R + \Delta R)^3} - \frac{1}{R^3} \right) = \frac{1}{3} \Delta \left(\frac{1}{R^3} \right)\end{aligned}$$

Dessa maneira, em vez de usar ΔR no cálculo, usamos o próprio valor do raio final. Por fim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \Delta \left(\frac{1}{R^3} \right) &= \frac{40\pi\sigma T^4}{3GM^2} \Delta t \\ \Delta t &= \frac{GM^2}{40\pi\sigma T^4} \Delta \left(\frac{1}{R^3} \right) = \frac{GM^2}{40\pi\sigma T^4} \left(\frac{1}{R_f^3} - \frac{1}{R_i^3} \right)\end{aligned}$$

Substituindo $R_i = R_1$ e $R_f = R_\odot$, obtemos:

$$\boxed{\Delta t \approx 23 \text{ milhões de anos}}$$

Caso não utilizássemos $\Delta \left(\frac{1}{R^3} \right)$ e calculássemos $\frac{3GM^2}{40\pi\sigma T^4} \left(\frac{R_i - R_f}{R_i^4} \right)$, obteríamos:

$$\Delta t \approx 1660 \text{ milhões de anos}$$

Com Cálculo

Tomando a derivada temporal na expressão das energias:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dU}{dt}$$

A taxa de variação da energia total deve ser igual a menos a luminosidade, como comentado no terceiro parágrafo, então:

$$\frac{dU}{dt} = -2L = -2 \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Note que R é o raio da estrela no tempo t . Vamos derivar a energia potencial total:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{3GM^2}{5} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

Juntando as duas equações anteriores:

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt} = -8\pi R^2 \sigma T^4$$

Separando as variáveis:

$$dt = -\frac{3GM^2}{40\pi\sigma T^4} \frac{dR}{R^4}$$

Integrando desde o início da contração até atingir as dimensões solares:

$$\int_0^{\Delta t} dt = \int_{R_1}^{R_\odot} -\frac{3GM^2}{40\pi\sigma T^4} \frac{dR}{R^4}$$

$$\Delta t = -\frac{3GM^2}{40\pi\sigma T^4} \int_{R_1}^{R_\odot} \frac{1}{R^4} dR = -\frac{3GM^2}{40\pi\sigma T^4} \frac{1}{1-4} \left(\frac{1}{R_\odot^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)$$

$$\Delta t = \frac{GM^2}{40\pi\sigma T^4} \left(\frac{1}{R_\odot^3} - \frac{1}{R_1^3} \right)$$

Substituindo os respectivos valores, obtemos o tempo de contração de interesse:

$$\Delta t \approx 23 \text{ milhões de anos}$$

Solução:

Anexo: cálculo da energia potencial gravitacional total, U , de uma esfera homogênea de massa M e raio R

A densidade da esfera é:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Seja uma casca esférica de massa dm e raio r com uma massa M_r contida dentro dela. A energia potencial dela é:

$$dU = -\frac{GM_r dm}{r}$$

$$dU = -\frac{G\rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rho \cdot dV}{r}$$

$$dU = -\rho^2 \frac{4\pi G r^3 dV}{3r}$$

O volume dV da casca será:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

Continuando na energia potencial da casca:

$$dU = -\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}\pi G r^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$dU = -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr$$

Calculando a energia total:

$$U = \int_0^U dU' = \int_0^R -\frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \frac{1}{5} R^5$$

Portanto:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

4. **(Relação Raio-Massa)** O Diagrama de Hertzsprung-Russell, conhecido como diagrama HR, foi publicado independentemente pelo dinamarquês Hertzsprung, em 1911, e pelo americano Russell, em 1913, como uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva. Isso permitiu a conclusão de que a maior parte das estrelas está alinhada ao longo de uma estreita faixa na diagonal que vai do extremo superior esquerdo (estrelas quentes e muito luminosas), até o extremo inferior direito (estrelas frias e pouco luminosas). A partir dele, surgiram diversas relações empíricas que relacionam parâmetros das estrelas na sequência principal. Nas questões abaixo, será abordada a relação entre o raio e a massa de estrelas na Sequência Principal.

- a) **(4,0 pontos)** Usando a tabela ao final do exercício, plote um gráfico de $\log R$ vs. $\log M$ para todas as estrelas.
- b) **(1,0 ponto)** No gráfico, é possível identificar duas regiões. Cada uma delas possui uma relação $\log R$ vs. $\log M$ distinta. Determine, usando o gráfico, uma linha vertical que divide essas regiões.
Dica: a posição exata da linha não é relevante. O importante é dividir corretamente os dados da tabela em duas amostras.
- c) **(3,0 pontos)** Faça uma regressão linear para os dados de cada uma das regiões e mostre os coeficientes lineares e angulares obtidos, bem como as incertezas associadas a eles.
- d) **(2,0 pontos)** Usando a relação $\log R$ vs. $\log M$ conveniente, calcule o raio do Sol. Levando em consideração a incerteza dos coeficientes, o resultado é incoerente com a realidade?

Tipo Espectral	Raio ($R_{\odot}$)	Massa ($M_{\odot}$)
B0	6,7	17,5
B3	3,8	7,6
B5	3,2	5,9
B8	2,5	3,8
A0	2,2	2,9
A5	1,8	2,0
F0	1,4	1,6
F5	1,2	1,4
G0	1,06	1,05
K0	0,93	0,79
K5	0,8	0,67
M0	0,63	0,51
M2	0,48	0,40
M5	0,29	0,21

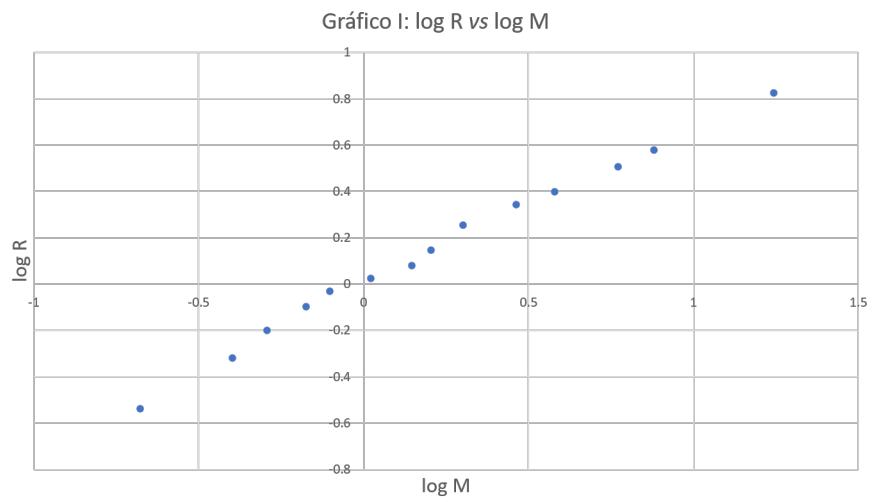
Tabela 1: Raio e massa de estrelas de classe de luminosidade V

Solução:

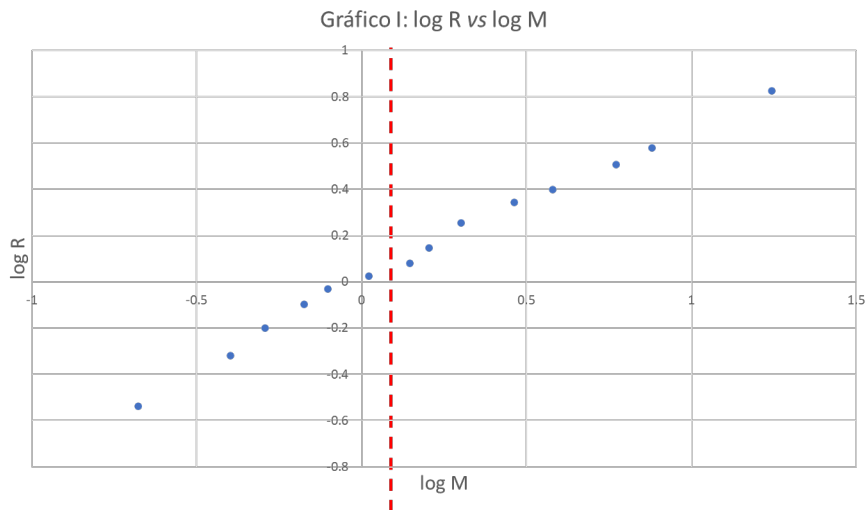
- a) Primeiramente, a tabela com os dados em $\log$ é:

log M	log R
1.243	0.826
0.881	0.580
0.771	0.505
0.580	0.398
0.462	0.342
0.301	0.255
0.204	0.146
0.146	0.079
0.021	0.025
-0.102	-0.032
-0.174	-0.097
-0.292	-0.201
-0.398	-0.319
-0.678	-0.538

Assim, o gráfico esperado é:



b) A linha vertical mais adequada seria como segue:



c) Com a regressão dos 6 dados da região 1, à esquerda, obtém-se:

Parâmetro	Valor	Incerteza
Coefficiente angular	0,84072	0,038597
Coefficiente linear	0,0340943	0,0135956

Assim, sendo a reta de equação $y = ax + b$, os coeficientes são:

$$\begin{cases} a = 0,84 \pm 0,04 \\ b = 0,034 \pm 0,014 \end{cases}$$

Analogamente, para os 8 dados da região 2:

Parâmetro	Valor	Incerteza
Coefficiente angular	0,646131	0,0252031
Coefficiente linear	0,0209247	0,0169508

Novamente, mas com a reta de equação $y = cx + d$, os coeficientes são:

$$\begin{cases} c = 0,65 \pm 0,03 \\ d = 0,021 \pm 0,017 \end{cases}$$

d) O Sol encontra-se na região 1 do gráfico, à esquerda. Assim,

$$\begin{aligned} \log R &= a \log M + b \\ \log R'_{\odot} &= 0,84 \cdot \log 1 + 0,034 = 0,034 \end{aligned}$$

$$R'_{\odot} = 1,08 \cdot R_{\odot}$$

Para analisar a influência das incertezas, deve-se isolar o raio na expressão:

$$R = 10^{a \log M + b}$$

e, com isso, a incerteza de R em função das incertezas de a e b será:

$$\sigma_R^2 = (\sigma_a \cdot \ln M \cdot 10^{a \log M + b})^2 + (\sigma_b \cdot \ln 10 \cdot 10^{a \log M + b})^2 \iff \\ \sigma_R = 0,014 \cdot 2,3026 \cdot 1,08 = 0,03$$

Nota-se que o intervalo de confiança associado ao raio determinado é $[1,05; 1,11]$, que não contém o valor esperado de $1,00 R_\odot$. No entanto, trata-se de uma boa aproximação, dada a natureza puramente empírica.

5. **(Colonização alienígena)** Num futuro hipotético nem um pouco distante, o aquecimento global levou à extinção da vida humana na Terra. Assim, alienígenas de sistemas estelares próximos decidiram colonizar o sistema solar e reabitar nossos planetas. Para estudar mais sobre a configuração do nosso sistema, eles decidem pousar em um dos planetas e a partir de lá, com base em observações terráqueas às quais eles têm acesso, observar o céu e o comportamento dos astros. Os aliens, no entanto, não tem muita experiência no estudo do céu, e pedem sua ajuda para descobrir algumas informações que podem lhes ser relevantes. Para descobri-las você tem acesso aos seguintes dados:

- 1) Uma tabela produzida por terráqueos com algumas características dos planetas.

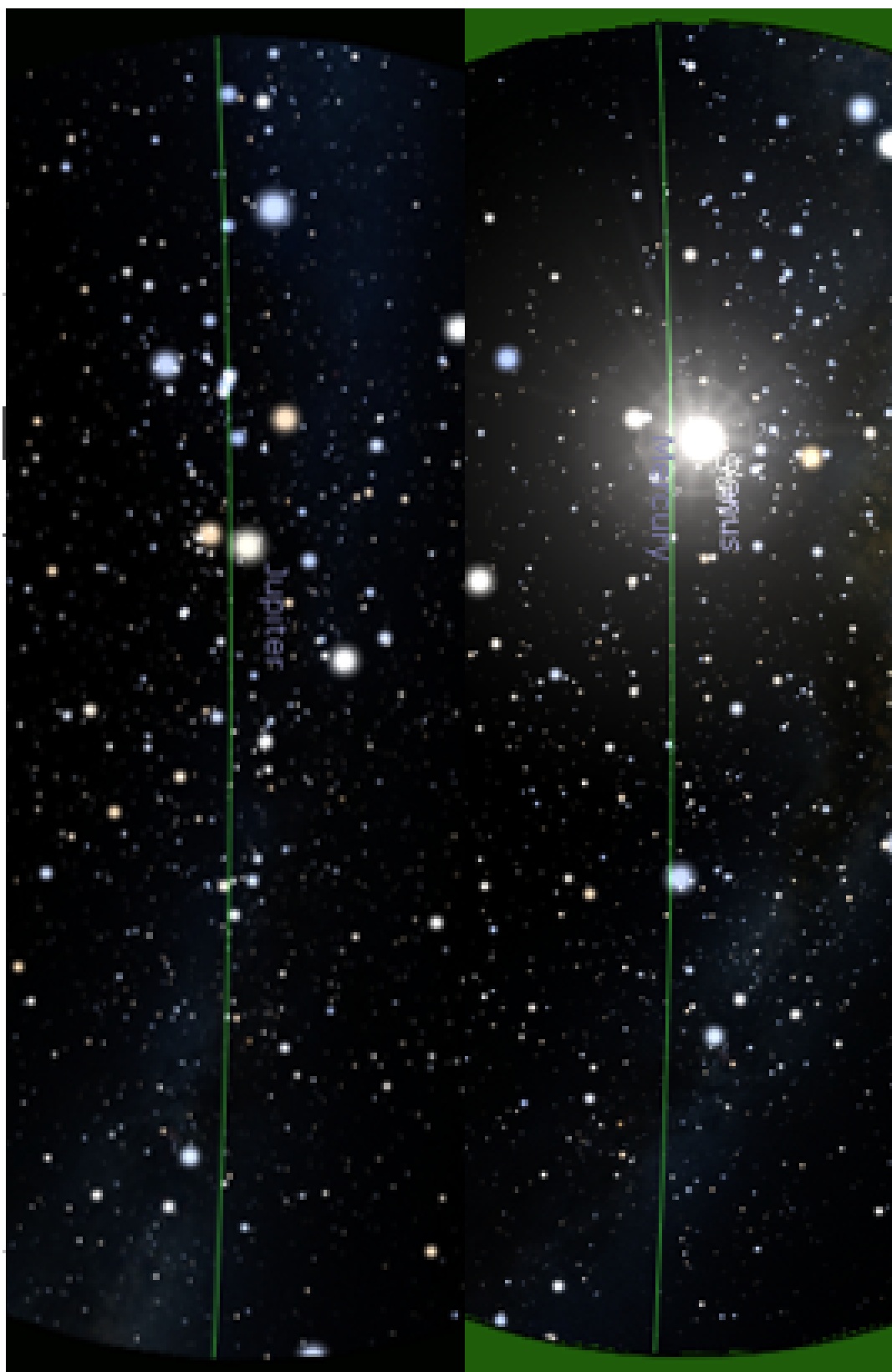
Planeta	Distância ao Sol (UA)	Inclinação do eixo de rotação (°)
Mercúrio	0,39	0
Vênus	0,72	177
Terra	1,00	23
Marte	1,52	25
Júpiter	5,20	3
Saturno	9,58	27
Urano	19,22	98
Netuno	30,11	28

- 2) A localização do polo celeste Norte e do polo eclíptico Norte da Terra.

- 3) Fotos de 2 observações que os alienígenas fizeram em momentos diferentes do mesmo dia. A faixa verde indica o meridiano local do lugar de observação. A única informação relevante que os alienígenas obtiveram foi que o ângulo horário do Sol no momento da primeira observação era de cerca de $H = 13h$.

Assim, aponte (e justifique):

- (1,5 ponto)** Todos os planetas em que os aliens podem estar com base nas informações do enunciado e da carta.
- (4,5 pontos)** Todos os meses nos quais tal aterrissagem pode ter acontecido.
- (1 ponto)** A constelação na qual está o polo sul celeste deste planeta.
- (3 pontos)** A estrela beta da constelação da eclíptica que está nascendo no momento da primeira observação.



Solução:

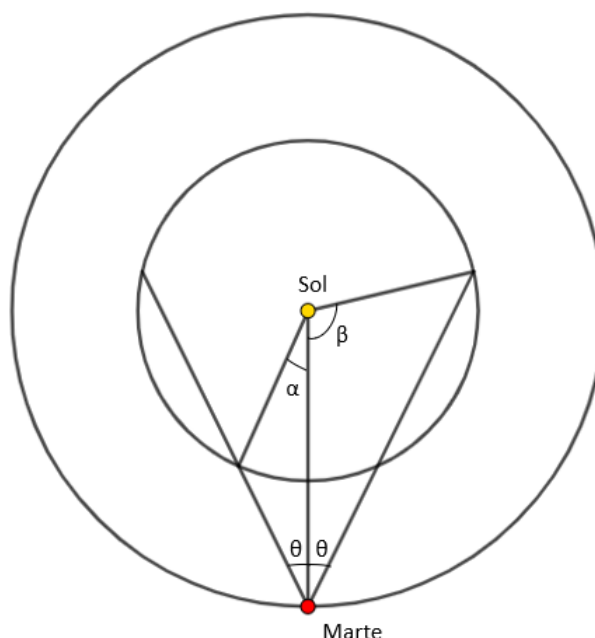
a) O planeta pode ser descoberto a partir de um processo de eliminação:

1) O planeta em que os aliens estão claramente não é visível no céu deles, o que elimina os planetas Mercúrio, Vênus e Júpiter.

2) Na primeira foto, Júpiter está muito perto do meridiano local, enquanto o Sol está a cerca de H graus do planeta, o que seria impossível se Júpiter fosse um planeta interno em relação ao local de observação dos aliens. Assim, o planeta deve ser a Terra ou Marte.

3) Por fim, o fator decisivo é achar o polo celeste deste céu. Olhando sobre o meridiano local, podemos ver que o ponto sobre ele que aparece nas 2 fotografias é um ponto em Cisne, bem próximo a Deneb. Sabemos que na Terra o polo celeste é próximo a Polaris, então os aliens devem estar em **Marte**.

b) Para saber a época do ano, precisamos ver onde o Sol se encontra para um observador na Terra. Como a Terra não está na imagem em que o Sol aparece, sabemos que a distância angular entre ela e o Sol, a partir de Marte, é maior que o ângulo coberto na imagem. Aproximando que o Sol esteja aproximadamente sobre o meridiano, temos que o campo de visão de Marte é $2\theta = 28,8^\circ$



Assim, a Terra está necessariamente fora do campo definido pelo ângulo θ . Assim, por trigonometria básica, temos:

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1,52}{\sin(180^\circ - \alpha - \theta)}$$

Pela analogia para β , obtemos que:

$$\alpha = 7,81^\circ \text{ e } \beta = 143,3^\circ$$

Assim, a Terra está necessariamente em uma das regiões nas quais seu ângulo Terra-Sol-Marte é $> \alpha$ e $< \beta$. Como o Sol visto de Marte se encontra em escorpião, as constelações nas quais o Sol pode se encontrar são Ofiúco, Sagitário, Capricórnio, Aquário, Libra, Virgem e Leão, o que corresponde a um período de aproximadamente julho-fevereiro.

- c) Já vimos que o polo norte celeste está em Cisne. Olhando na esfera celeste, o ponto antípoda se localiza na **Vela**.
- d) Partindo do princípio de que enxergamos metade da eclíptica no céu a todo tempo e que a constelação da eclíptica sobre o meridiano local é Touro, podemos deduzir que a constelação nascendo é Leão. Assim, a estrela β é **Denebola**.