

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. A lista é composta por 4 problemas, todos valendo 10 pontos;
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**;
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, essa informação deve ficar explícita (coloque "Pulei a questão X" na resolução da questão X+1);
5. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - Lista 8". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - Lista 8".
6. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
7. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
8. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
9. A lista é totalmente individual.
10. Para as entregas após o prazo final, utilizaremos o seguinte protocolo:
 - Até 1h de atraso: perde 10% da nota final
 - De 1 a 6h de atraso: perde 30% da nota final
 - Mais de 6h de atraso: a lista não será aceita

Prazo: 22/07/2021 - 23h 59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	$4,83 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
Raio da Via Láctea (R_{VL})	$16,2 \text{ kpc}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Problemas

1. A primeira equação de Friedmann é uma das equações mais fundamentais da cosmologia, relacionando a expansão do universo com as densidades de energia das componentes dele. Nessa questão iremos deduzir de forma simplificada essa equação e revisar alguns outros conceitos.

Considere uma partícula em um universo homogêneo, isotrópico e Newtoniano. Ela possui uma distância $R(t)$ medida em um tempo t com algum outro ponto qualquer desse universo. Medindo a mesma distância no tempo atual ($t = t_0$), como existe expansão do universo, obtemos um valor R_0 . Definimos o fator de escala como $a(t) = R(t)/R_0$. Assim, $a_0 = a(t_0) = 1$ e o fator de escala aumenta com o tempo num universo em expansão.

- (a) **(2 pontos)** Encontre uma relação entre $a(t)$ e a sua segunda derivada, $\ddot{a}(t)$, em função da densidade desse universo ρ e constantes fundamentais.

Dica: Considere a lei de Gauss para a gravitação.

- (b) **(3 pontos)** Partindo da expressão encontrada no item a, demonstre a primeira equação de Friedmann na forma:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\kappa c^2}{a^2(t)R_0^2}$$

onde κ é uma constante adimensional, $H(t)$ é o parâmetro de Hubble e R_0 é o raio comóvel do universo, que aqui pode ser assumido como uma distância arbitrária.

Na equação do item anterior, é possível perceber que a expansão do universo depende do valor de ρ . Em universos em que $\rho > \rho_c$, sendo ρ_c uma densidade crítica, existe muita gravidade e o universo passa a contrair em algum momento (universo fechado). Quando $\rho < \rho_c$, existe pouca gravidade e o universo expande de forma acelerada (universo aberto). No limite em que $\rho = \rho_c$, a expansão para em um tempo infinito. Esse universo é chamado de plano e a geometria dele é euclidiana.

- (c) **(3 pontos)** Calcule o valor da densidade crítica atual ρ_c .

Dica: Use uma analogia com a velocidade de escape.

Quando incluímos os efeitos relativísticos, podemos pensar na densidade ρ como não só uma densidade de massa, mas um análogo a uma densidade de energia do universo ($\varepsilon = \rho c^2$). Assim, podemos definir uma "densidade" para componentes que não são massa, como radiação e energia escura.

Empiricamente, percebemos que o nosso universo é extremamente próximo de plano. Porém, a densidade de massa (incluindo matéria escura) observada é $\rho_m \approx 2,83 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$, menor que a densidade crítica do item c. A justificativa mais aceita para esse problema é a existência de uma energia escura, que contribui para a densidade de energia ao mesmo tempo que acelera a expansão do universo.

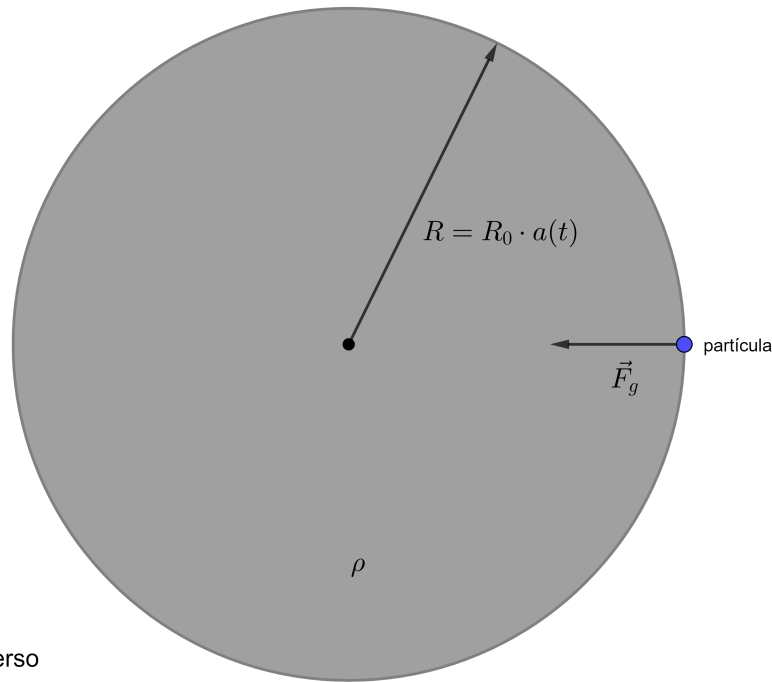
- (d) **(2 pontos)** Calcule o parâmetro de densidade da energia escura, $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_c$.

Extra: Para a dedução da segunda equação de Friedmann e aplicações da primeira, veja a questão 9 da prova T2 de 2020.

Solução:

- (a) Uma das consequências da lei de Gauss para a gravitação é que em uma distribuição homogênea e isotrópica de massa, cascas esféricas externas a um ponto não importam no cálculo do campo gravitacional desse ponto causado pela massa nos arredores. Logo,

podemos calcular o campo gravitacional causada por essa distribuição de massa somente considerando uma esfera de um raio R arbitrário, como na figura abaixo.



A única força relevante na escala cosmológica é a gravitacional. Aplicando a segunda lei de Newton para a situação:

$$\begin{aligned} m\ddot{R} &= F_g \\ &= -\frac{GMm}{R^2} \\ &= -\frac{Gm}{R^2} \frac{\rho 4\pi R^3}{3} \\ \Rightarrow \ddot{R} &= -\frac{G\rho 4\pi R}{3} \end{aligned}$$

onde substituímos a massa da esfera $M = \rho V = \rho 4\pi R^3/3$. Como $R = R_0 a(t)$, derivando duas vezes, $\ddot{R} = R_0 \ddot{a}(t)$ por R_0 ser constante. Aplicando essas equações:

$$\boxed{\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G\rho a(t)}{3}}$$

- (b) Considerando a partícula e a esfera de massa da situação descrita anteriormente, a energia é uma constante, que chamaremos de K :

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} &= K \\ m \left(\frac{v^2}{2} - \frac{G}{R} \frac{\rho 4\pi R^3}{3} \right) &= K \end{aligned}$$

K tem unidade de energia, ou seja, massa vezes velocidade ao quadrado. Podemos definir uma outra constante adimensional κ tal que $K = \kappa mc^2$:

$$\frac{v^2}{2} - 4\pi\rho GR^2 = \kappa c^2$$

$$R_0^2 \left(\frac{\dot{a}^2(t)}{2} - 4\pi\rho G a^2(t) \right) = \kappa c^2$$

Rearranjando:

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\kappa c^2}{a^2(t) R_0^2}$$

Como $H(t) = \dot{a}/a$, conseguimos:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\kappa c^2}{a^2(t) R_0^2}$$

- (c) Caso o universo pare de expandir num tempo infinito, a partícula na situação anterior para num tempo infinito, de forma similar a uma órbita parabólica. Logo, nesse universo com densidade crítica, a velocidade da partícula será análoga à uma de escape em relação ao centro da esfera.

Para calcularmos a velocidade de escape numa órbita comum, igualamos a energia do corpo para zero. Fazendo o mesmo para o nosso universo, $K = \kappa = 0$ nas equações do item b. Encontrando a expressão para a densidade crítica ρ_c :

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho_c + \frac{\kappa c^2}{a^2(t) R_0^2} \xrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

Substituindo o valor atual de H_0 da tabela de constantes, encontramos:

$$\rho_c = 8,64 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

- (d) A densidade de energia do universo é uma soma das densidades de matéria (escura e bariônica/normal), energia escura e radiação. A densidade dessa última componente é muito pequena na nossa era (da ordem de 10^{-4} comparada com as outras), portanto podemos desconsiderá-la nesse exercício, mas ela se torna importante quando voltamos no passado.

Com isso, a densidade do universo pode ser escrita como $\rho = \rho_\Lambda + \rho_m$, onde novamente ρ_Λ é a densidade de energia escura e ρ_m a densidade total de matéria. Como o nosso universo é bem perto de plano, $\rho \approx \rho_c$. Desse modo, calculando Ω_Λ :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$$

$$= \frac{\rho_c - \rho_m}{\rho_c}$$

$$= 1 - \frac{\rho_m}{\rho_c}$$

Substituindo valores:

$$\Omega_{\Lambda} = 0,67$$

2. A equação de Friedmann é $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2}$, em que a é o fator de escala no tempo t , ε é a densidade de energia no tempo t e k é o parâmetro que informa a geometria do universo, pode assumir qualquer valor real. Considerando um universo composto apenas de matéria bariônica não relativística e resolvendo essa equação diferencial não linear para $k > 0$, obtêm-se as seguintes soluções em termos do parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$a(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3kc^4}(1 - \cos(\theta))$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G\varepsilon_0}{3k^{3/2}c^5}(\theta - \sin(\theta))$$

Seja um universo de $\Omega_0 = 4$ e $H_0 = 67,4$ km/s/Mpc.

- (3,5 pontos)** A partir da equação de Friedmann, mostre que $kc^2 = H^2(\Omega - 1)a^2$. Por fim, reescreva as equações paramétricas de a e t em termos do parâmetro de densidade atual Ω_0 e da constante de Hubble atual H_0 , além do parâmetro θ . Não substitua os seus respectivos valores numéricos.
- (3 pontos)** Encontre a idade t_0 do universo em questão em termos de H_0 e em seguida em bilhões de anos.
- (1 ponto)** O chamado *Lookback time*, Δt_L , representa quanto tempo no passado o universo estava com certo fator de escala a . Qual é Δt_L em bilhões de anos para quando o tamanho do universo era 1/3 do que é atualmente?
- (2,5 pontos)** Determine θ_n e em seguida t_n para os quais $H = 0$.

Solução:

(a)

Vamos encontrar o parâmetro de densidade Ω na equação de Friedmann. O parâmetro é dado pela densidade crítica ε_c definida para o universo plano, isto é, quando $k = 0$, então anulamos a segunda parcela do segundo membro:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \frac{0 \cdot c^2}{a^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\varepsilon_c}{3c^2} \Rightarrow \frac{8\pi G}{3c^2} = \frac{H^2}{\varepsilon_c}$$

Substituindo $\frac{8\pi G}{3c^2}$ na equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{H^2\varepsilon}{\varepsilon_c} - \frac{kc^2}{a^2}$$

$$H^2 = H^2\Omega - \frac{kc^2}{a^2} \Rightarrow \frac{kc^2}{a^2} = H^2\Omega - H^2 = H^2(\Omega - 1)$$

$$kc^2 = H^2(\Omega - 1)a^2$$

Para o universo atual, $a_0 = 1$, $H = H_0$ e $\Omega = \Omega_0$, então k e a densidade atual ε_0 serão:

$$k = H_0^2(\Omega_0 - 1)/c^2$$

$$\frac{8\pi G}{3c^2} = \frac{H^2}{\varepsilon_c} = \frac{H_0^2}{\varepsilon_{c,0}} = \frac{H_0^2}{\varepsilon_0/\Omega_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \Omega_0$$

Substituindo isso na solução paramétrica da equação de Friedmann para o nosso universo fechado, obtemos:

$$a(\theta) = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{3kc^4} (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow a(\theta) = \frac{4\pi G \left(\frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \Omega_0 \right)}{3(H_0^2(\Omega_0 - 1)/c^2)c^4} (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow$$

$$a(\theta) = \frac{4\pi G}{3H_0^2 c^2} \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow$$

$$a(\theta) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos(\theta))$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{3k^{3/2} c^5} (\theta - \sin(\theta)) \Rightarrow t(\theta) = \frac{4\pi G \left(\frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \Omega_0 \right)}{3(H_0^2(\Omega_0 - 1)/c^2)^{3/2} c^5} (\theta - \sin(\theta)) \Rightarrow$$

$$t(\theta) = \frac{4\pi G}{3H_0^3 c^2} \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin(\theta)) \Rightarrow$$

$$t(\theta) = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin(\theta))$$

(b)

Em $t = 0$ o universo começou, então $t = t_0$, o instante de tempo atual, fornece a sua idade. Temos $a_0 = 1$, então:

$$1 = \frac{4}{2 \cdot (4 - 1)} (1 - \cos(\theta_0)) \Rightarrow \cos(\theta_0) = -1/2 \Rightarrow \theta_0 = 2\pi/3 \text{ rad ou } \theta_0 = 4\pi/3 \text{ rad}$$

Na expressão de $t(\theta)$ será:

$$t(2\pi/3 \text{ rad}) = \frac{4}{2H_0(4 - 1)^{3/2}} (2\pi/3 - \sin(2\pi/3)) = \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{H_0}$$

$$t(2\pi/3 \text{ rad}) = 0,4728 \frac{1}{H_0}$$

$$t(4\pi/3 \text{ rad}) = \frac{4}{2H_0(4 - 1)^{3/2}} (4\pi/3 - \sin(4\pi/3)) = \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{H_0}$$

$$t(4\pi/3 \text{ rad}) = 1,9456 \frac{1}{H_0}$$

Afinal, a questão em processo admite duas respostas válidas? Na verdade, não!

Lembre-se que em um universo fechado, ele expande até um tamanho máximo e em seguida contrai-se e diminui sua largura progressivamente. Por isso, para um mesmo tamanho, há dois instantes de tempo distintos, como verificado acima.

Note que $H_0 = +67,4$ km/s/Mpc, ou seja, o universo em questão está em expansão, então é a primeira vez que admire o tamanho que tem. Logo $\theta_0 = 2\pi/3$, pois fornece o menor tempo e a nossa resposta é:

$$t_0 = \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{H_0} = 0,4728 \frac{1}{H_0}$$

$$t_0 = 6,9 \text{ bilhões de anos}$$

(c)

Pelo enunciado, queremos: $\Delta t_L = t_0 - t(\theta(a = 1/3))$. Vamos encontrar o θ correspondente:

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{2 \cdot (4-1)} (1 - \cos(\theta)) \Rightarrow \cos(\theta) = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/3 \text{ rad ou } \theta = 5\pi/3 \text{ rad}$$

Para um tempo no passado, $\theta < \theta_0 = 2\pi/3$, então $\theta = \pi/3$. Substituindo na expressão do tempo:

$$t(\pi/3 \text{ rad}) = \frac{4}{2H_0(4-1)^{3/2}} (\pi/3 - \sin(\pi/3)) = \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{H_0}$$

Dessa maneira, finalmente:

$$\Delta t_L = \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{H_0} = \frac{2\pi}{3^{5/2}} \frac{1}{H_0} = 1,845328 \cdot 10^{17} \text{ s} = 5,8474 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

$$\Delta t_L = 5,8 \text{ bilhões de anos}$$

(d)

Vamos encontrar uma expressão para H em termos de t ou θ . Da equação de Friedmann, temos:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Usando a regra da cadeia:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Sabendo a expressão da derivada inversa, $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, em que g é a função inversa de f ,

$g = f^{-1}$, vemos que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}}$ e:

$$H = \frac{\frac{1}{a} \frac{da}{d\theta}}{\frac{dt}{d\theta}}$$

Vamos calcular as derivadas:

$$a = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{da}{d\theta} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (\sin \theta)$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (1 - \cos \theta)$$

Substituindo:

$$H = \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0(1 - \cos \theta)} \frac{\Omega_0 \sin \theta}{2(\Omega_0 - 1)} \frac{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}{\Omega_0(1 - \cos \theta)}$$

$$H = \frac{2H_0\Omega_0 - 1)^{3/2}}{\Omega_0} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}$$

Impondo a condição de interesse e supondo que o denominador não se anule para tal:

$$0 = H = \frac{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}{\Omega_0} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \Rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta_n = n\pi, \quad n \in \{0, 1, 2\}$$

Para $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, temos:

$$H = \frac{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}}{\Omega_0} \frac{0}{(1 - 1)^2} \Rightarrow \text{incoerente}$$

Portanto, é apenas válido $\theta = \pi$.

Dessa maneira, o t_n será:

$$t_n = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\pi - \sin(\pi))$$

$$t_n = 17,5 \text{ bilhões de anos}$$

Curiosamente, esta é a metade do tempo de vida do universo em questão.

3. Um dos principais problemas do modelo do Big Bang está relacionado ao formato do universo. Embora todas as evidências empíricas apontem para um universo plano ou quase plano, isso seria extremamente improvável de acordo com o modelo do Big Bang. Para demonstrar isso, considere a seguinte expressão, em que Ω é o parâmetro de densidade:

$$n = \frac{\Omega - 1}{\Omega}$$

Para essa questão, tome como base um universo em que o valor de Ω seja muito próximo de 1, mas não exatamente igual a 1.

- (a) **(7 pontos)** Para um universo dominado por matéria, determine como n varia com o tempo. Em outras palavras, calcule o valor do expoente m na expressão $n \propto t^m$.
- (b) **(2 pontos)** Determine o valor do mesmo expoente m para um universo dominado por radiação.
- (c) **(1 ponto)** Explique **brevemente** como as respostas dos itens anteriores indicam que de acordo com o modelo do Big Bang, é extremamente improvável que o nosso universo seja plano.

Importante: Para os itens A e B, assuma que o universo sempre foi dominado pelo componente especificado no enunciado.

Importante: Para os itens A e B, vocês só precisam encontrar relações de proporcionalidade que funcionem para valores de Ω próximos de 1. Essas expressões não necessariamente precisam se manter válidas caso o valor de Ω seja muito diferente de 1.

Importante: Eu realmente não estou a fim de ler uma dissertação sobre cosmologia quando eu for corrigir as listas. A resposta para o item C é bem objetiva e eu garanto que vocês não precisam escrever mais do que duas ou três frases.

Solução:

(a) Primeiramente, é preciso considerar a Primeira Equação de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2$$

Como o universo em questão é dominado por matéria, é possível ignorar a constante cosmológica:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Também é possível definir o parâmetro de Hubble em função da densidade crítica:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_c}{3}$$

Combinando as duas expressões para o parâmetro de Hubble:

$$\frac{8\pi G\rho_c}{3} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Dividindo ambos os lados da equação por ρ :

$$\frac{8\pi G}{3} \frac{(\rho_c - \rho)}{\rho} = -\frac{kc^2}{a^2\rho}$$

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2\rho}$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado esquerdo por ρ_c :

$$\frac{\frac{\rho}{\rho_c} - 1}{\frac{\rho}{\rho_c}} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2\rho}$$

Considerando que Ω equivale à razão entre a densidade do universo e a densidade crítica:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2\rho}$$

Considerando que o termo $\frac{3kc^2}{8\pi G}$ é constante:

$$n \propto \frac{1}{a^2 \rho}$$

Para um universo plano dominado por matéria, $\rho \propto \frac{1}{a^3}$:

$$n \propto a$$

Para um universo plano dominado por matéria, $a \propto t^{2/3}$:

$$n \propto t^{2/3}$$

(b) É possível tomar como base a expressão obtida no item anterior:

$$n \propto \frac{1}{a^2 \rho}$$

Para um universo plano dominado por radiação, $\rho \propto \frac{1}{a^4}$:

$$n \propto a^2$$

Para um universo plano dominado por radiação, $a \propto t^{1/2}$:

$$n \propto t$$

(c) Os itens anteriores demonstram que tanto para um universo dominado por matéria quanto para um universo dominado por radiação, a expressão $\frac{\Omega-1}{\Omega}$ é diretamente proporcional ao tempo elevado a um expoente positivo. Dessa forma, mesmo para um valor de Ω muito próximo de 1, com o passar do tempo a tendência seria que esse valor ficasse cada vez mais distante de 1. Portanto, para que o valor de Ω fosse aproximadamente igual a 1 hoje, o parâmetro de densidade precisaria ter sido absurdamente próximo de 1 no início do universo, o que é extremamente improvável.

4. Nesse problema, nós assumiremos que o universo é descrito pelo modelo de Einstein - de Sitter: plano ($k = 0$) e composto apenas por matéria não relativística.

(a) **(1 ponto)** Sabemos que para esse modelo $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, onde a é o fator de escala e t é a idade do universo. A partir disso, mostre que a idade do universo em um dado redshift z pode ser escrita como

$$t(z) = t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}}$$

onde t_0 representa a idade atual do universo.

- (b) **(2 pontos)** Assuma que na presente época ($t = t_0$), nós observamos dois objetos com aproximadamente as mesmas coordenadas galácticas fixas: um com redshift $z_1 = 3$ e o outro com $z_2 = 8$. Quando, em unidades de t_0 , a luz que observamos desses objetos foi emitida?
- (c) **(3 pontos)** Calcule a distância radial comóvel de cada um desses objetos em função de c (velocidade da luz) e t_0 .
- (d) **(4 pontos)** Imagine que existe um observador situado no objeto com $z_1 = 3$. Que redshift ele observou para a luz emitida que observamos hoje do objeto de redshift $z_2 = 8$?

Solução:

- (a) Nós sabemos que, para uma idade t_0 teremos $a = 1$. Assim, para um universo de Einstein-de Sitter

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Ainda

$$a(t) = \frac{1}{1+z}$$

Substituindo na primeira equação e isolando o termo t , chegamos no que é pedido

$$t(z) = t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}}$$

- (b) Para tal item, basta utilizar a equação a anterior:

$$t(z_1) = t_0(1+3)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{t_0}{8}}$$

$$t(z_1) = t_0(1+8)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{t_0}{27}}$$

- (c) A coordenada radial comóvel de um objeto observado hoje é dado por

$$r = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Onde t_e é o momento em que a luz recebida em t_0 foi emitida. Logo

$$r = ct_0^{2/3} \int_{t_e}^{t_0} t^{-2/3} dt$$

$$r = 3ct_0^{2/3} (t_0^{1/3} - t_e^{1/3})$$

$$r = 3ct_0 \left(1 - \frac{t_e^{1/3}}{t_0^{1/3}}\right)$$

Da equação do item, podemos escrever

$$r = 3ct_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)$$

Assim, teremos

$$r_1 = r(z_1) = 3ct_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = \boxed{\frac{3ct_0}{2}}$$

$$r_2 = r(z_2) = 3ct_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}} \right) = \boxed{2ct_0}$$

- (d) Primeiro, vamos escrever a equação da trajetória de um raio de luz que vemos hoje como função do tempo, de modo que $r(t_e) = 2ct_0$ (distância do raio no momento da emissão) e $r(t_0) = 0$ (distância do raio no momento em que esse chega até nós). A trajetória de um raio de luz para um universo plano é dada por:

$$r(t) = 2ct_0 - \int_{t_e}^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

Resolvendo a integral, como no item c:

$$r(t) = 2ct_0 - 3ct_0 \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/3} - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right]$$

No momento T em que o raio atinge a coordenada r_1 , teremos:

$$\frac{3ct_0}{2} = 2ct_0 - 3ct_0 \left[\left(\frac{T}{t_0} \right)^{1/3} - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right]$$

Temos que:

$$\left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} = \sqrt{\frac{a(t_e)}{a(t_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1+z_2}} = \frac{1}{3}$$

Assim, conseguimos encontrar que:

$$\left(\frac{T}{t_0} \right)^{1/3} = \frac{1}{2}$$

Por fim, pela definição de redshift cosmológico, o observador em r_1 verá o objeto r_2 com um redshift dado por:

$$1 + z_{12} = \frac{a(T)}{a(t_e)} = \frac{(T/t_0)^{2/3}}{(t_e/t_0)^{2/3}} = \left(\frac{1/2}{1/3} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{z_{12} = \frac{5}{4}}$$