

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, com os 5 primeiros valendo 10 pontos e o último valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente **individual**.

Prazo: 19/04/2025 23h59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	−12,74 mag	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	−26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ^{−1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ^{−2}	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ^{−1} · K ^{−1}	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ^{−1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ^{−2} · K ^{−4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ^{−1} · Mpc ^{−1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

- Segue uma tabela com as estrelas nos polos celestes de cada planeta:

Planeta	Estrela Polar Norte	Estrela Polar Sul
Mercúrio	α -Dra	α -Pic
Vênus	η^1 -Dor	42-Dra
Marte	Prolongamento de 1 vez da linha que liga γ -Cyg e α -Cyg	κ -Vel
Júpiter	ζ -Dra	δ -Dor
Saturno	Forma um triângulo retângulo com α -UMi e γ -Cep	δ -Oct
Urano	η -Oph	15-Ori / Prolongamento de 1 vez a linha que liga γ -Ori e ϵ -Ori
Netuno	Metade da linha que liga γ -Cyg e δ -Cyg	γ -Vel

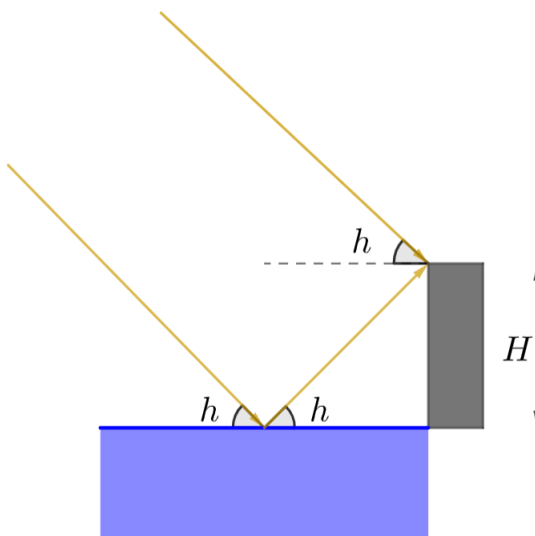
- Alguns dados que podem ser importantes:

Estrela	Declinação (δ)	Ascensão Reta (α)
Antares	$-26^\circ 29' 08''$	16h 30m 57s
Rigil Kent	$-60^\circ 56' 34''$	14h 41m 32s
Sírius	$-16^\circ 44' 38''$	06h 46m 16s

1. **Observador marítimo (10 pontos)** Tung Tung Sahur decidiu ir para o topo de um interferômetro marítimo para conseguir localizar Tralalero Tralala, o seu maior rival. Sabe-se que o interferômetro tem altura $H = 2$ m e está localizado na costa litorânea de San Diego, Califórnia ($\varphi = 33^\circ$). Subitamente, para surpresa de Tung Tung Sahur, não Tralalero Tralala, mas sim Bombardiro Crocodilo é avistado com um brilho muito forte, sendo seus sinais luminosos captados pelo interferômetro. A intensidade dos sinais luminosos de Bombardiro Crocodilo varia com o tempo, mas é sabido que o primeiro máximo de intensidade ocorre quando o azimute de Bombardiro Crocodilo é $A = 160^\circ$. Sabendo que Bombardiro Crocodilo está extremamente distante, de modo que seus raios cheguem paralelos como os de uma estrela, e considerando que sua declinação δ não varia, determine o valor de δ em graus. Considere que o comprimento de onda dos sinais emitidos por Bombardiro Crocodilo é $\lambda = 21$ cm.

Solução:

É preciso compreender que há luz vindo diretamente de Bombardiro Crocodilo e luz que se reflete no mar antes de chegar ao interferômetro. Acompanhe o esquema:



A diferença de fase entre os dois caminhos distintos percorridos pela luz será dada por:

$$\Delta = \frac{H}{\sin h} + \frac{\lambda}{2} - \frac{H \cos 2h}{\sin h}$$

simplificando:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} + 2H \sin h$$

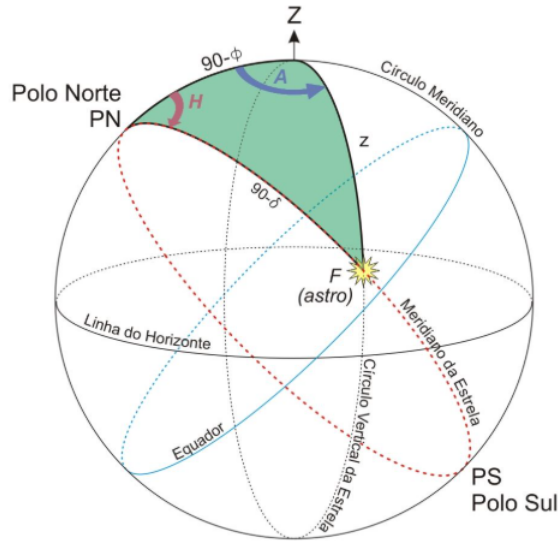
No primeiro máximo de intensidade:

$$\frac{\lambda}{2} + 2H \sin h = \lambda$$

ou seja:

$$h = \arcsin \left(\frac{\lambda}{4H} \right) = 1,50^\circ$$

Com o valor de h , basta utilizar do seguinte triângulo esférico para calcular a declinação de Bombardiro Crocodilo:



Onde $z = 90^\circ - h$. Desse modo:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos A$$

Substituindo os valores, obtemos que:

$$\delta = -50,67^\circ$$

2. Observações Noturnas (10 pontos) Bruno estava de férias no hemisfério norte e decidiu passar horas observando o céu noturno. Ao longo da noite, ele marcou a altura e o azimute de uma determinada estrela em diferentes momentos. A tabela abaixo contém os dados anotados por Bruno:

Altura (h)	Azimute (A)
$15^\circ 57' 15,5''$	$79^\circ 00' 41,2''$
$28^\circ 27' 54,9''$	$92^\circ 45' 43,7''$
$34^\circ 42' 48,5''$	$100^\circ 14' 13,5''$
$47^\circ 59' 35,4''$	$120^\circ 31' 44,6''$
$57^\circ 15' 56,7''$	$146^\circ 13' 44,1''$
$60^\circ 03' 21,7''$	$163^\circ 10' 15,5''$
$57^\circ 44' 10,2''$	$211^\circ 38' 58,4''$
$52^\circ 16' 32,7''$	$229^\circ 59' 02,2''$
$40^\circ 15' 09,0''$	$252^\circ 19' 26,5''$

- (3 pontos)** Qual é o número mínimo necessário de pontos da tabela acima para determinar a latitude de Bruno? Justifique a sua resposta.
- (6 pontos)** Selecione apenas os primeiros N pontos da tabela, sendo que N representa a sua resposta no item anterior. Com base exclusivamente nesses pontos, determine a latitude de Bruno.
- (1 ponto)** Determine a declinação da estrela observada por Bruno.

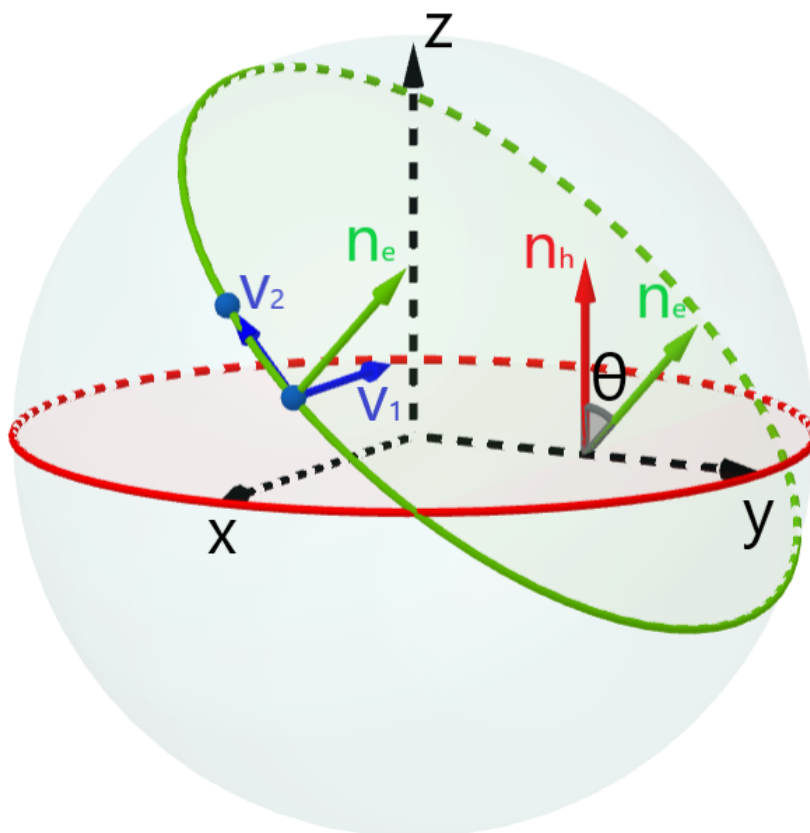
Solução:

- (a) O ângulo entre o plano definido pelo movimento diurno e o horizonte corresponde ao complemento da latitude do local. Três pontos são necessários para definir um plano, mas é importante considerar que a trajetória diurna das estrelas é simétrica em relação ao meridiano local. Portanto, para cada ponto conhecido da trajetória da estrela, é possível deduzir um segundo ponto por meio dessa simetria. Dessa forma, apenas dois pontos da trajetória precisam ser conhecidos para determinar o plano do movimento diurno da estrela e portanto calcular a latitude do local.

É importante observar que os dois pontos conhecidos não podem ser simétricos em relação ao meridiano local, mas esse não é o caso para nenhum par de pontos na tabela fornecida.

- (b) • **Método 1:**

Considere a figura a seguir:



O sistema de coordenadas dessa figura é definido da seguinte maneira:

- Centro: posição do observador.
- Eixo- x positivo: aponta para a direção leste.
- Eixo- y positivo: aponta para a direção norte.
- Eixo- z positivo: aponta para o zênite.

Os elementos presentes na figura são os seguintes:

- Plano vermelho: horizonte.

- Plano verde: plano do movimento diurno da estrela.
- $\mathbf{v}_1$: vetor que corresponde à direção que conecta o primeiro ponto na tabela ao seu ponto simétrico em relação ao meridiano local. No sistema de coordenadas em questão, o vetor unitário nessa direção corresponde a $\langle -1; 0; 0 \rangle$.
- $\mathbf{v}_2$: vetor que conecta as duas primeiras posições da estrela na tabela.
- $\mathbf{n}_h$: vetor normal ao horizonte. No sistema de coordenadas em questão, o vetor unitário nessa direção corresponde a $\langle 0; 0; 1 \rangle$.
- $\mathbf{n}_e$: vetor normal ao plano do movimento diurno da estrela. Esse vetor corresponde ao produto vetorial $\mathbf{n}_e = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.
- θ : ângulo entre $\mathbf{n}_h$ e $\mathbf{n}_e$. Esse vetor corresponde ao complemento da latitude ($\theta = 90^\circ - \phi$).

Dessa forma, o objetivo final desse item é encontrar o ângulo θ e consequentemente determinar a latitude de Bruno. Para isso, o primeiro passo é encontrar as coordenadas cartesianas de cada um dos dois primeiros pontos da tabela. Como o raio da esfera celeste é arbitrário, é possível utilizar um raio unitário nessa conversão de coordenadas. Dessa forma, é possível utilizar as seguintes expressões:

$$x = \cos(h) \sin(A)$$

$$y = \cos(h) \cos(A)$$

$$z = \sin(h)$$

Isso resulta nos seguintes vetores correspondentes às duas primeiras posições da estrela:

$$\mathbf{P}_1 = \langle 0,94385272; 0,18327074; 0,27487064 \rangle$$

$$\mathbf{P}_2 = \langle 0,878085; -0,04236391; 0,47662567 \rangle$$

O vetor $\mathbf{v}_2$ corresponde à diferença entre $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \langle -0,06576772; -0,22563465; 0,20175502 \rangle$$

O vetor $\mathbf{n}_e$ pode ser determinado por meio do seguinte produto vetorial:

$$\mathbf{n}_e = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{n}_e = \langle v_{1,y}v_{2,z} - v_{1,z}v_{2,y}, v_{1,z}v_{2,x} - v_{1,x}v_{2,z}, v_{1,x}v_{2,y} - v_{1,y}v_{2,x} \rangle$$

$$\mathbf{n}_e = \langle 0; 0,20175502; 0,22563465 \rangle$$

O ângulo entre os vetores $\mathbf{n}_h$ e $\mathbf{n}_e$ pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_e}{\|\mathbf{n}_h\| \|\mathbf{n}_e\|}\right)$$

$$\theta = 41^\circ 48' 07,3''$$

Dessa forma, a latitude de Bruno é a seguinte:

$$\phi = 90^\circ - \theta$$

$$\boxed{\phi = 48^\circ 11' 52,7''}$$

• **Método 2:**

Outra alternativa para determinar a latitude de Bruno é usar a seguinte fórmula:

$$\sin(\delta) = \sin(\phi) \sin(h) + \cos(\phi) \cos(h) \cos(A)$$

Dividindo os dois lados da equação por $\cos(\phi)$:

$$\frac{\sin(\delta)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi) \sin(h) + \cos(h) \cos(A)$$

Note que o lado direito dessa expressão independe da posição da estrela. Dessa forma, utilizando os dois primeiros pontos da tabela:

$$\tan(\phi) \sin(h_1) + \cos(h_1) \cos(A_1) = \tan(\phi) \sin(h_2) + \cos(h_2) \cos(A_2)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\cos(h_2) \cos(A_2) - \cos(h_1) \cos(A_1)}{\sin(h_1) - \sin(h_2)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{\cos(28^\circ 27' 54,9'') \cos(92^\circ 45' 43,7'') - \cos(15^\circ 57' 15,5'') \cos(79^\circ 00' 41,2'')}{\sin(15^\circ 57' 15,5'') - \sin(28^\circ 27' 54,9'')}$$

$$\tan(\phi) = 1,11836$$

$$\boxed{\phi = 48^\circ 11' 52,7''}$$

(c) Utilizando a latitude obtida no item anterior e o primeiro ponto da tabela:

$$\sin(\delta) = \sin(\phi) \sin(h) + \cos(\phi) \cos(h) \cos(A)$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta) &= \sin(48^\circ 11' 52,7'') \sin(15^\circ 57' 15,5'') \\ &\quad + \cos(48^\circ 11' 52,7'') \cos(15^\circ 57' 15,5'') \cos(79^\circ 00' 41,2'') \end{aligned}$$

$$\sin(\delta) = 0,32706$$

$$\delta = 19^\circ 05' 26,3''$$

3. Perturbando o Sr. Analema (10 pontos) A equação do tempo (EQT) é historicamente uma importantíssima ferramenta de astrometria, determinando a diferença entre a hora solar verdadeira e a hora solar média: $EQT = H - H_m$. Nessa questão encontraremos uma primeira aproximação (em termos da excentricidade) para a equação do tempo.

- (a) **(2 pontos)** Seja $t_0 = 0$ o momento em que o Sol cruza o ponto vernal. Encontre EQT como função de t e da longitude eclíptica do astro λ .
- (b) **(5 pontos)** Na aproximação de baixas excentricidades (i.e. e^2 desprezível), encontre a anomalia verdadeira do planeta $E(t)$ considerando que a Terra demora Δt dias para percorrer do periélio até o equinócio de março.
- (c) **(3 pontos)** Assumindo $\Delta t = 87 d$, encontre a EQT como função somente de t .

Solução:

(a) Para qualquer local da Terra, a diferença entre as horas solares verdadeira e média é:

$$EQT = H - H_m = (TSL - \alpha) - (TSL - \alpha_m) = \omega t - \alpha,$$

sendo $\omega = 360^\circ/T_\oplus$.

Tomando agora o triângulo esférico entre o polo celeste norte: P_N , polo celeste da eclíptica: P_E e o Sol $P_\odot$, temos pelo fato do ponto vernal estar contido tanto na eclíptica quanto no equador celeste que:

$$P_\odot \hat{P}_E P_N = 90^\circ - \lambda, \quad P_E \hat{P}_N P_\odot = 90^\circ + \alpha,$$

onde λ e α são respectivamente a longitude eclíptica e a ascensão reta.

Pela lei dos 4 elementos:

$$\begin{aligned} \cot(90^\circ) \sin(\epsilon) &= \cot(90^\circ + \alpha) \sin(90^\circ - \lambda) + \cos(\epsilon) \cos(90^\circ - \lambda) \\ \implies \tan(\alpha) &= \cos(\epsilon) \tan(\lambda) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{EQT = \omega t - \tan^{-1}(\cos(\epsilon) \tan(\lambda))}$$

- (b) Pela equação de Kepler, temos que a anomalia média em termos da anomalia ecêntrica ε é $M = \varepsilon - e \sin(\varepsilon)$, como $|\sin(\varepsilon)| \leq 1$, então $(E - M) \cdot e \approx 0$. Desse modo:

$$M = \varepsilon - e \sin(M + (\varepsilon - M)) = \varepsilon - e \sin(M) \cos(\varepsilon - M) - e \cos(M) \sin(\varepsilon - M)$$

Tomando $\cos(\varepsilon - M) \approx 1$ e $\sin(\varepsilon - M) \cdot e \sim e^2 \approx 0$

$$M \approx \varepsilon - e \sin(M).$$

Como M é medido a partir do periélio, podemos tomar que $M = \omega(t + \Delta t)$, de modo que:

$$\varepsilon(t) = \omega(t + \Delta t) + e \sin(\omega(t + \Delta t)).$$

Relacionando com a anomalia verdadeira:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right) &= 1 - e \cos(\varepsilon) = \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos(E)} \implies 1 + e \cos(E) = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos(\varepsilon)} \\ \cos(E) &= \frac{\cos(\varepsilon) - e}{1 - e \cos(\varepsilon)} \approx \cos(\varepsilon) - e(1 - \cos(\varepsilon)) \approx \cos\left(\varepsilon + e \frac{1 - \cos(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}\right) \\ E(t) &= \varepsilon(t) + e \frac{1 - \cos(\varepsilon(t))}{\sin(\varepsilon(t))} \end{aligned}$$

como $\varepsilon - M \sim e$, podemos aproximar mais uma vez:

$$E(t) = \varepsilon(t) + e \frac{1 - \cos(\omega(t + \Delta t))}{\sin(\omega(t + \Delta t))}$$

$$\therefore \boxed{E(t) = \omega(t + \Delta t) + e \sin(\omega(t + \Delta t)) + e \frac{1 - \cos(\omega(t + \Delta t))}{\sin(\omega(t + \Delta t))}}$$

- (c) Como fazemos uso frequente de unidades angulares em radianos, será utilizada a conversão $85^\circ 45' = 1,497$. Nessas condições, podemos encontrar uma fórmula explícita para λ , pois como o Sol sempre se encontra na eclíptica:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= E(t) - E(0) = \omega t + e \sin(\omega t + 1,497) + e \frac{1 - \cos(\omega t + 1,497)}{\sin(\omega t + 1,497)} \\ &\quad - e \left(\sin(1,497) + \frac{1 - \cos(1,497)}{\sin(1,497)} \right) \\ \lambda(t) &= \omega t + e \left(\sin(\omega t + 1,497) + \frac{1 - \cos(\omega t + 1,497)}{\sin(\omega t + 1,497)} - 1,926 \right) \end{aligned}$$

substituindo na equação do tempo:

$$EQT(t) = \omega t - \tan^{-1} \left\{ \cos(\epsilon) \tan \left[\omega t + e \left(\sin(\omega t + 1,497) + \frac{1 - \cos(\omega t + 1,497)}{\sin(\omega t + 1,497)} - 1,926 \right) \right] \right\}$$

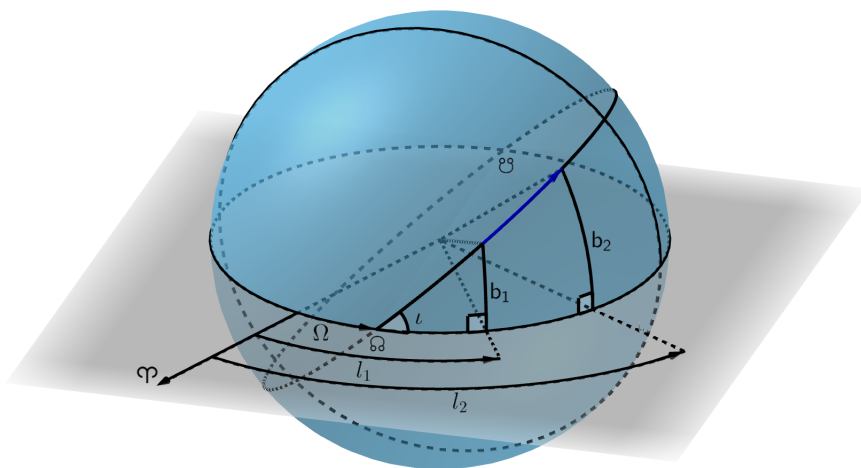
4. O Império Contra-Ataca (10 pontos) Darth Métrio é o comandante supremo de um poderoso império de uma galáxia muito, muito distante. Certo dia, seus generais interceptam uma mensagem de rádio da Terra, a qual é erroneamente interpretada pelos generais do império como uma declaração de guerra. Ao ser informado disso, Métrio prontamente ordena um ataque à Terra utilizando um MBI (Míssil Balístico Intergaláctico). Durante uma de suas observações, o astrônomo terráqueo Elchym, de forma sagaz, identifica o MBI quando ele ainda estava a uma distância muito grande de nosso planeta. Intrigado, ele resolve medir suas coordenadas equatoriais no momento da detecção:

- Declinação: $\delta_1 = -47^\circ 45' 50''$
- Ascensão reta: $\alpha_1 = 5^h 50^m 25^s$

Ela nota também que, nesse momento, a distância do objeto à Terra é suficiente para que apenas a interação gravitacional entre ele e a Terra seja relevante para a análise do seu movimento. Desta forma, Elchym resolve simular computacionalmente a trajetória subsequente do objeto no referencial da Terra. O astrônomo percebe, para a infelicidade de Métrio, que o corpo estranho não chegará a atingir nosso planeta. Ele também nota, usando como referência o plano do Equador Celeste, que o argumento do perigeu da órbita do objeto vale $\omega = 30^\circ$, que sua inclinação orbital é menor que 90° e obtém sua excentricidade $e = 3,00$. Por estar muito ocupado, Elchym resolve, por meio deste problema, pedir a sua ajuda para realizar seus cálculos! Por favor ajude-o, a partir dos dados fornecidos, a determinar as coordenadas equatoriais (α_2, δ_2) do míssil um longo tempo após a passagem pelo seu perigeu.

Solução:

Primeiramente, vamos esquematizar a trajetória do objeto na esfera celeste:



A notação utilizada é:

- | | |
|---|---|
| { | ι : inclinação orbital |
| | Ω : longitude do nodo ascendente |
| | $\mathfrak{O}$: nodo ascendente |
| | $\mathfrak{U}$: nodo descendente |
| | b : declinação |
| | l : ascensão reta |
- θ : ângulo percorrido pelo objeto no plano de sua órbita a partir do nodo ascendente

OBS.: Por abuso de linguagem, tomaremos $b \rightarrow \delta$ e $l \rightarrow \alpha$.

Utilizamos a lei dos cossenos para obter:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\delta) \cos(\alpha - \Omega) + \sin(\delta) \sin(\alpha - \Omega) \cos(90^\circ) \implies \\ \cos(\theta) &= \cos(\delta) \cos(\alpha - \Omega)\end{aligned}$$

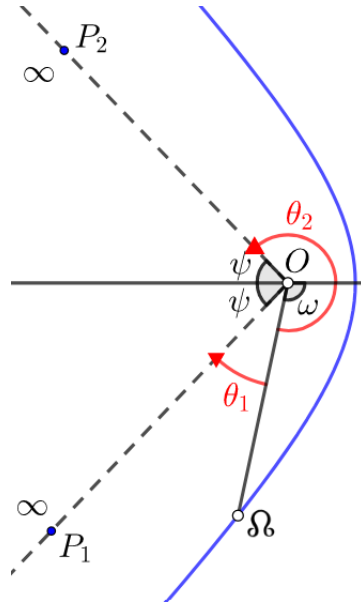
E, com a lei dos senos:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\delta)}{\sin(\iota)} &= \frac{\sin(\theta)}{\sin(90^\circ)} \implies \\ \sin(\delta) &= \sin(\theta) \sin(\iota)\end{aligned}$$

Ademais, aplicando a lei dos quatro elementos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \Omega) \cos(\iota) &= \cot(\theta) \sin(\alpha - \Omega) - \cot(90^\circ) \sin(\iota) \implies \\ \tan(\alpha - \Omega) &= \tan(\theta) \cos(\iota)\end{aligned}$$

Utilizando as equações acima, seremos capazes de determinar a declinação e ascensão reta final do objeto, mas antes é necessário encontrar os valores dos ângulos θ_1 e θ_2 , que estão atrelados às coordenadas (α_1, δ_1) e (α_2, δ_2) , respectivamente. Observe a geometria da órbita do míssil abaixo (a imagem está no plano da órbita):



O é o centro da Terra, e Ω o nodo ascendente. Como $e > 1$, a órbita é hiperbólica. Sendo assim, podemos encontrar o ângulo de inclinação (ψ) das assíntotas:

$$\tan(\psi) = \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \Rightarrow \psi = \arctan(\sqrt{8})$$

Sabemos que, quando o objeto foi detectado, ele estava a uma distância muito grande da Terra, em P_1 . Com isso, podemos assumir que P_1 está praticamente no infinito. Como θ é

positivo no sentido horário (segundo a nossa convenção) e medido a partir do nodo ascendente, temos

$$\theta_1 = -(180^\circ - \psi - \omega) = -79,47122063^\circ$$

Lembre-se que desejamos determinar as coordenadas do míssil passado um tempo muito longo. Veja que, após a detecção, o míssil eventualmente passará pelo seu perigeu, e a partir daí sua distância até a Terra será estritamente crescente. Depois de muito tempo, a distância será grande o suficiente de forma que o ponto P_2 no qual o míssil estará localizado encontra-se praticamente no infinito, e portanto vale que

$$\theta_2 = 180^\circ - \psi + \omega = 139,4712206^\circ$$

Com θ_1 e θ_2 em mãos, usamos a lei dos senos para os pontos P_1 e P_2 e dividimos as equações para obter a declinação δ_2 :

$$\begin{cases} \sin(\delta_2) = \sin(\theta_2) \sin(\iota) \\ \sin(\delta_1) = \sin(\theta_1) \sin(\iota) \end{cases} \implies \sin(\delta_2) = \frac{\sin(\theta_2) \sin(\delta_1)}{\sin(\theta_1)}$$

$$\boxed{\delta_2 = 29^\circ 17' 5''}$$

Agora, aplicaremos conjuntamente a lei dos cossenos e dos quatro elementos para determinar Ω . Primeiramente, com a lei dos cossenos, vale que:

$$\cos(\alpha_1 - \Omega) = \frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\delta_1)} \implies \cos(\alpha_1 - \Omega) = 0,271842939$$

Resta agora determinar o quadrante deste ângulo, e para tanto vamos utilizar a lei dos quatro elementos.

$$\begin{aligned} \cot \theta_1 \sin(\alpha_1 - \Omega) &= \cot 90^\circ \sin \iota + \cos \iota \cos(\alpha_1 - \Omega) \\ \cot \theta_1 \sin(\alpha_1 - \Omega) &= \cos \iota \cos(\alpha_1 - \Omega) \\ \tan(\alpha_1 - \Omega) &= \tan \theta_1 \cos \iota \end{aligned}$$

Essa equação nos diz que $\tan(\alpha_1 - \Omega) \propto \tan(\theta_1)$ ($\cos(\iota) > 0$). Logo, como $\tan(\theta_1)$ é negativo, $\tan(\alpha_1 - \Omega)$ também é, o que implica - utilizando o resultado anteriormente obtido - em $\sin(\alpha_1 - \Omega) < 0$. Como $\cos(\alpha_1 - \Omega) > 0$ e $\sin(\alpha_1 - \Omega) < 0$, deduzimos que $\alpha_1 - \Omega$ está localizado no quarto quadrante. Logo:

$$\alpha_1 - \Omega = 360^\circ - 74,22603807^\circ \implies \Omega = -198^\circ 10' 11,2''$$

Ou, segundo a convenção mais utilizada:

$$\Omega = 360^\circ - 198^\circ 10' 11,2'' = 161^\circ 49' 48,7'' = 10^h 47^m 19,25^s$$

Em posse de Ω , basta repetir o mesmo processo, mas agora para as coordenadas do ponto P_2 . Pela lei dos cossenos:

$$\cos(\alpha_2 - \Omega) = \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\delta_2)} \implies \cos(\alpha_2 - \Omega) = -0,871451372$$

Pela lei dos quatro elementos, $\tan(\alpha_2 - \Omega) \propto \tan(\theta_2)$. Como $\tan(\theta_2) < 0$, $\tan(\alpha_2 - \Omega) < 0$ e portanto - utilizando o resultado previamente obtido - $\sin(\alpha_2 - \Omega) > 0$. Uma vez que $\sin(\alpha_2 - \Omega) > 0$ e $\cos(\alpha_2 - \Omega) < 0$, deduz-se que $\alpha_2 - \Omega$ pertence ao segundo quadrante. Logo:

$$\alpha_2 - \Omega = 150,6277388^\circ = 10^h 2^m 30,66^s \implies$$

$$\boxed{\alpha_2 = 20^h 49^m 50^s}$$

5. Sugou (10 pontos) O Glossário de gírias iteanas, disponível na WikITA, apresenta a seguinte definição para o verbete “sugar”:

“Ato de extrair todas as energias, dinheiro, força vital ou qualquer coisa que seja de uma pessoa, seja de seu intelecto, seu tempo, corpo ou bolso.”

Em uma projeção estereográfica, Plo desenhou Sirius, Antares, Rigil Kent... sugou. Também sugou de calcular tamanho de ponto. A Carta abaixo representa o resultado.

- (a) **(2.5 pontos)** Identifique qual estrela corresponde a cada número.
- (b) **(5 pontos)** Trace o polo celeste visível. Por meio dele, determine a latitude do local de observação.
- (c) **(2.5 pontos)** Na carta, trace o Equador.

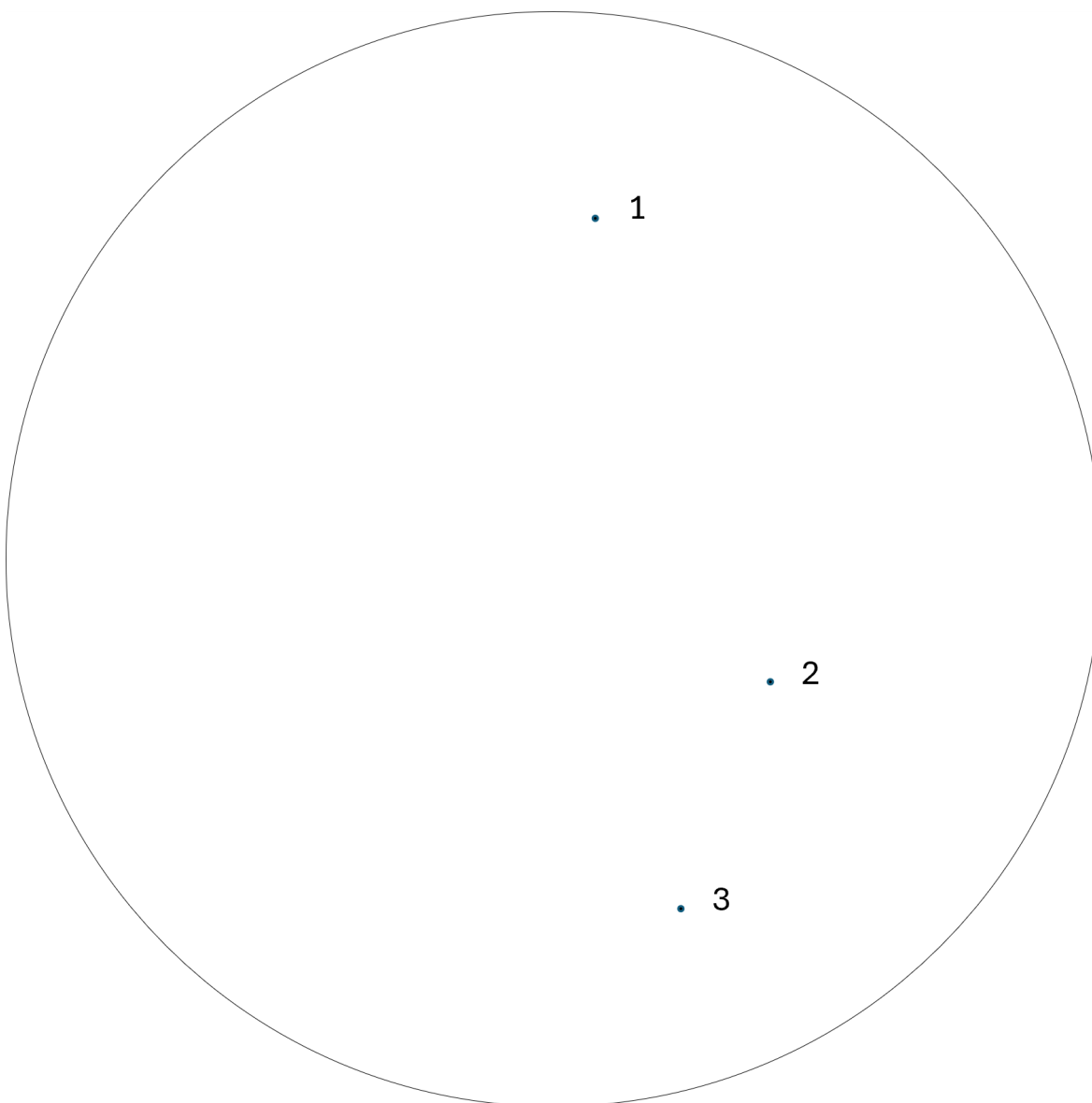


Figura 1: Carta Celeste feita por Plo.

Solução:

- (a) O raio da carta é medido em $(0,75 \pm 0,05)$ cm. As distâncias r_i , do ponto i ao centro, são estimadas em $r_1 = (4,55 \pm 0,10)$ cm, $r_2 = (3,30 \pm 0,10)$ cm e $r_3 = (4,90 \pm 0,10)$ cm. Cada valor z_i pode ser encontrado por $z_i = 2 \cdot \tan^{-1}(r_i/R)$. Já as diferenças de azimuth são estimadas em $(A_1 - A_2) = (113 \pm 2)^\circ$, $(A_2 - A_3) = (40 \pm 2)^\circ$ e $(A_3 - A_1) = (206 \pm 2)^\circ$.

Grandeza	Medição (cm ou graus)
R	$7,15 \pm 0,05$ cm
r_1	$4,55 \pm 0,10$ cm
r_2	$3,30 \pm 0,10$ cm
r_3	$4,90 \pm 0,10$ cm
z_1	$64,4^\circ \pm 0,9^\circ$
z_2	$49,6^\circ \pm 1,6^\circ$
z_3	$68,8^\circ \pm 1,5^\circ$
$A_1 - A_2$	$113^\circ \pm 2^\circ$
$A_2 - A_3$	$40^\circ \pm 2^\circ$
$A_3 - A_1$	$206^\circ \pm 2^\circ$

A distância angular entre i e k pode ser encontrada por aplicação direta da lei dos cossenos. Em coordenadas alto-azimutais:

$$d_{i,k} = \cos^{-1} (\cos(z_i) \cdot \cos(z_k) + \sin(z_i) \cdot \sin(z_k) \cdot \cos(A_i - A_k))$$

Já em coordenadas uranográficas:

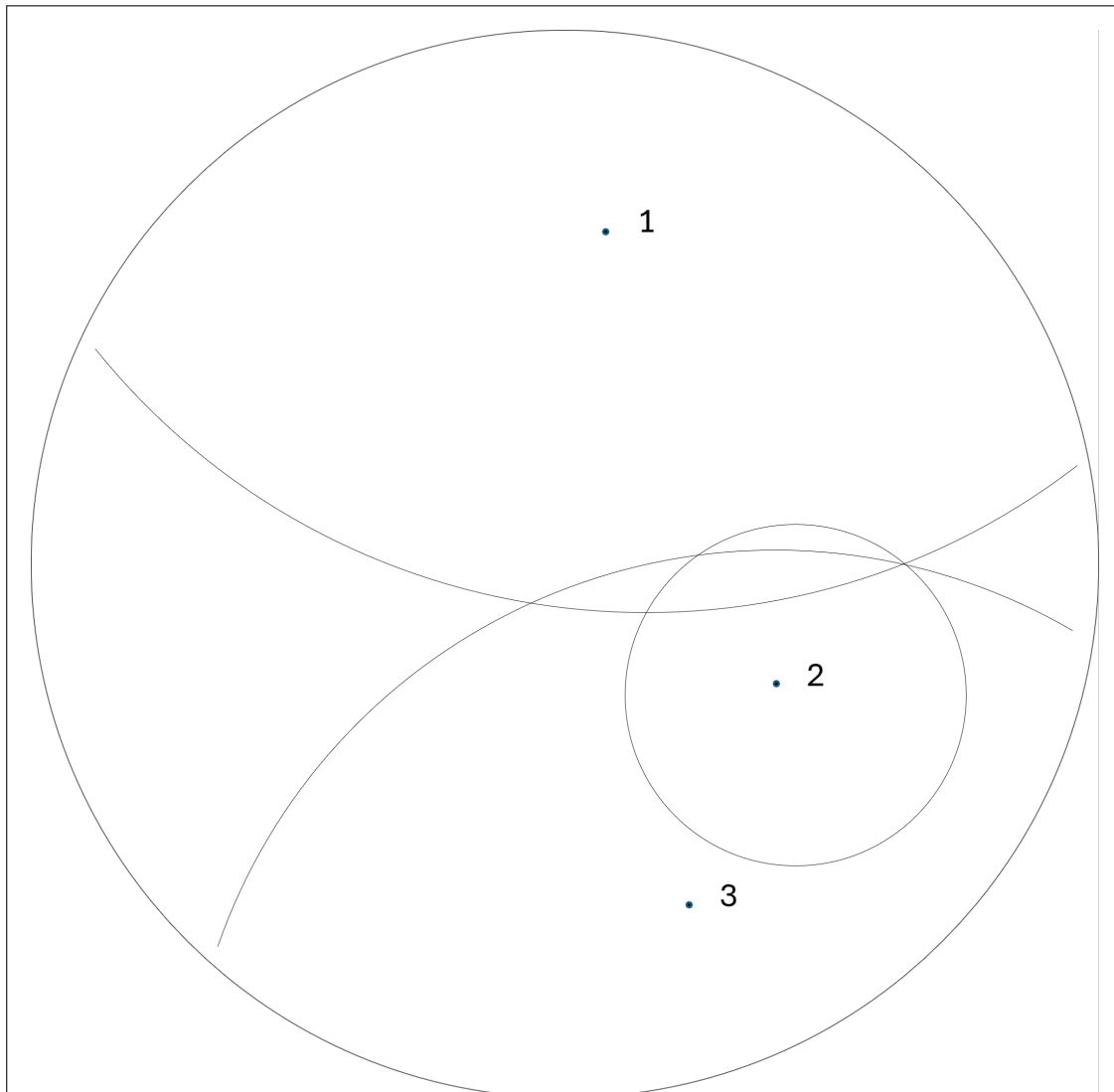
$$d_{i,k} = \cos^{-1} (\sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_k) + \cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_k) \cdot \cos(\alpha_i - \alpha_k))$$

Desse modo, temos a tabela:

Par de estrelas	d (graus)	Par de estrelas	d (graus)
1 e 2	$89,0 \pm 2,5$	Antares e Rigil Kent	39,1
2 e 3	$39,0 \pm 1,9$	Antares e Sirius	125,7
3 e 1	$126,8 \pm 3,0$	Rigil Kent e Sirius	88,4

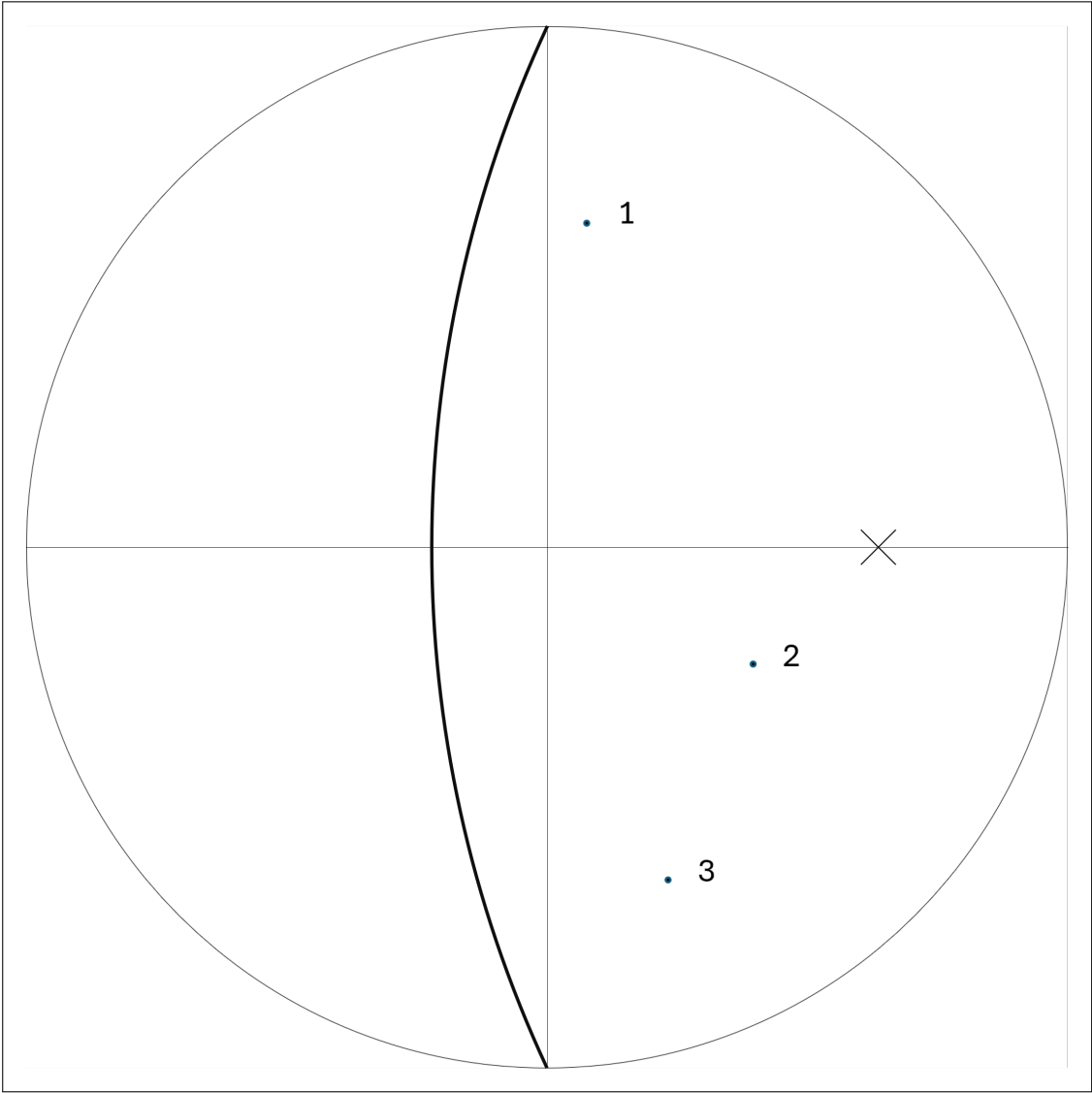
Assim, percebemos que a estrela 1 é Sirius, a estrela 2 é Rigil Kent e a estrela 3 é Antares.

- (b) O resultado almejado pode ser obtido por uma construção simples. Vamos determinar a posição do PSC observando sua distância a cada um dos pontos graficamente representados. O lugar geométrico que equidista de um determinado ponto é chamado de círculo menor, e na projeção estereográfica, esse lugar é uma circunferência com centro deslocado. Segue o desenho com todos os círculos menores traçados.



Estimando a altura do zênite, cuja precisão é limitada pelos traçados de compasso, estimamos $\varphi = (25 \pm 2)^\circ$ S

- (c) Para traçar o Equador, podemos traçar a reta que liga o Polo Celeste e o zênite. Esse é um eixo de simetria do círculo máximo. A perpendicular ao eixo de simetria, passando pelo zênite, cruza o horizonte nos mesmos pontos onde o Equador cruza o horizonte. Outro ponto notório é o de menor distância zenital, encontrado forçando a distância angular de 90° entre o Equador e o Polo Celeste. Por fim, por culpa das dimensões da folha, não é possível traçar o Equador com compasso, então temos que utilizar os pontos conhecidos para estimá-lo à mão.



6. Prisão Desconhecida (20 pontos) Em meio à pressa para voltar para casa após um dia complicado, Gurjinho acabou se descuidando durante o trajeto: tropeçou, caiu e desmaiou. Quando recobrou a consciência, encontrou-se em uma situação inesperada — estava preso em um planeta desconhecido, confinado em uma gaiola que lhe permitia ver apenas o céu acima de sua cabeça.

Logo descobriu que havia sido raptado por uma civilização extraterrestre. Esses seres, ao aterrissarem na Terra, encontraram Gurjinho e o levaram para seu planeta de origem. No entanto, Gurjinho, que domina Física como poucos, decidiu usar seus conhecimentos para emitir um sinal luminoso em direção à Terra, escolhendo cuidadosamente um horário em que Hermético pudesse observá-lo.

Apesar de suspeitar que ainda estivesse em algum ponto do Sistema Solar, Gurjinho sabia que precisava determinar exatamente em qual planeta havia sido deixado antes de colocar seu plano em prática. Como astronomia de posição e reconhecimento do céu sempre foram suas maiores dificuldades, ele resolveu pedir a sua ajuda.

Para isso, disponibilizamos duas cartas celestes (**Carta 1.1** e **Carta 1.2**) que mostram o céu observado por Gurjinho em dois momentos distintos. As cartas não possuem rotação entre si, ou seja, representam o céu visto da mesma posição, apenas em horários diferentes. Em uma delas, é possível identificar a Terra, representada como o ponto mais brilhante do céu (com magnitude propositalmente exagerada para facilitar a visualização).

- (a) **(1 pontos)** Para começarmos, faça um reconhecimento geral do céu. Identifique e marque com um **X** os objetos M30 e M35, e as estrelas Hadar (β -Cen) e Procyon (α -CMi).
- (b) **(4 pontos)** Com o céu já reconhecido, localize o polo celeste visível no planeta em que Gurjinho se encontra. Com base nessa observação, identifique em qual planeta ele está e indique se o polo visível é o Polo Celeste Norte (PCN) ou o Polo Celeste Sul (PCS).
- (c) **(6 pontos)** Agora, para começar a encontrar a posição do planeta em que Gurjinho está, precisamos encontrar as coordenadas da Terra, vistas por ele. Para isso, considere um sistema de coordenadas dextrógiro que possui o polo norte do planeta como polo fundamental e que o meridiano de referência para o início da coordenada azimutal desse sistema é o meridiano superior que passa pelo polo norte eclíptico. Encontre as coordenadas Δ (coordenada polar, sendo medida a partir do equador do planeta) e L (coordenada azimutal, medida a partir do meridiano que possui o polo norte eclíptico) e trace o equador do planeta em ambas as cartas.
- (d) **(9 pontos)** Sabendo agora onde Gurjinho está, resta determinar o melhor horário para que ele envie o sinal luminoso. Sabemos que, no instante representado na **Carta 1.1**, Hermético está em Campinas ($\phi = -22,9^\circ$; $\lambda = -47,1^\circ$) e vê o planeta em que seu amigo está a uma altura $27,5^\circ$ e azimute 103° . Sabendo que era dia 12 de outubro, determine o horário civil de Hermético e as coordenadas equatoriais do planeta de Gurjinho (δ_G, α_G). Despreze a excentricidade da órbita da Terra.

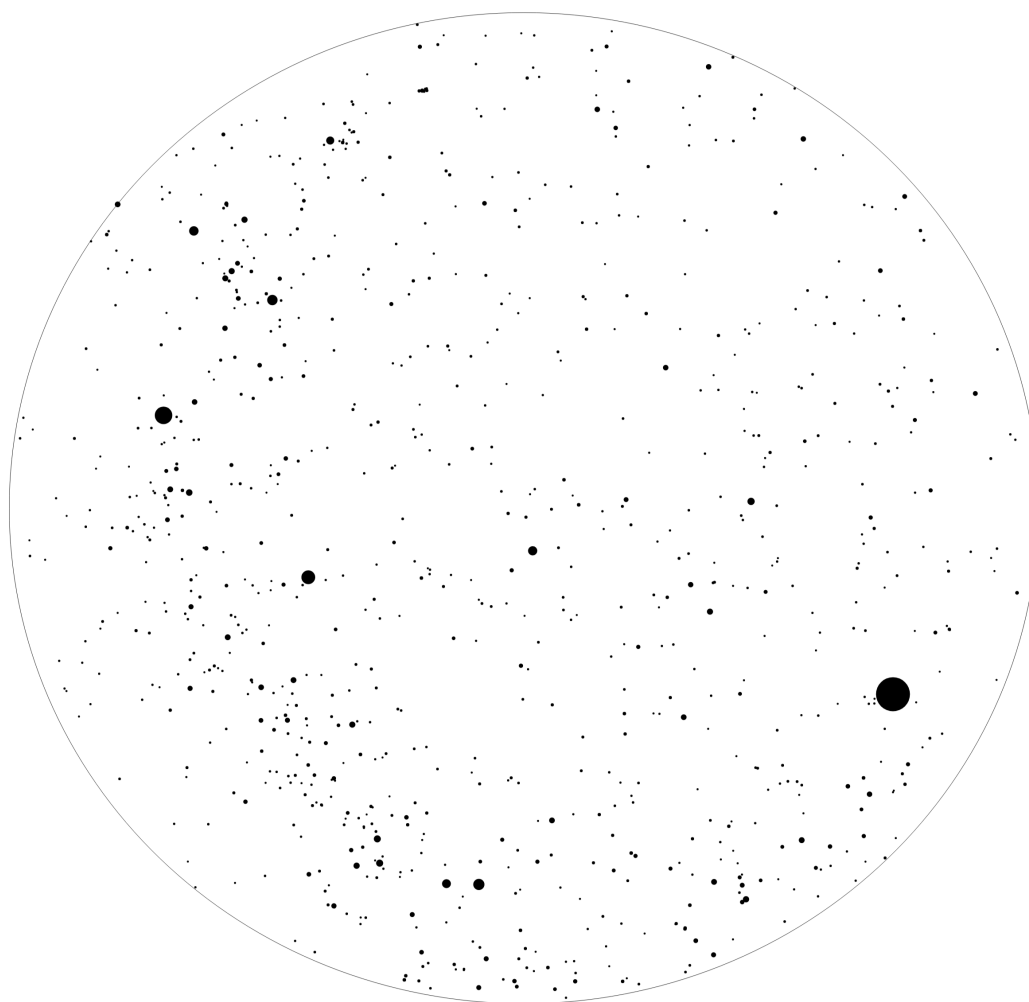


Figura 2: Carta 1.1

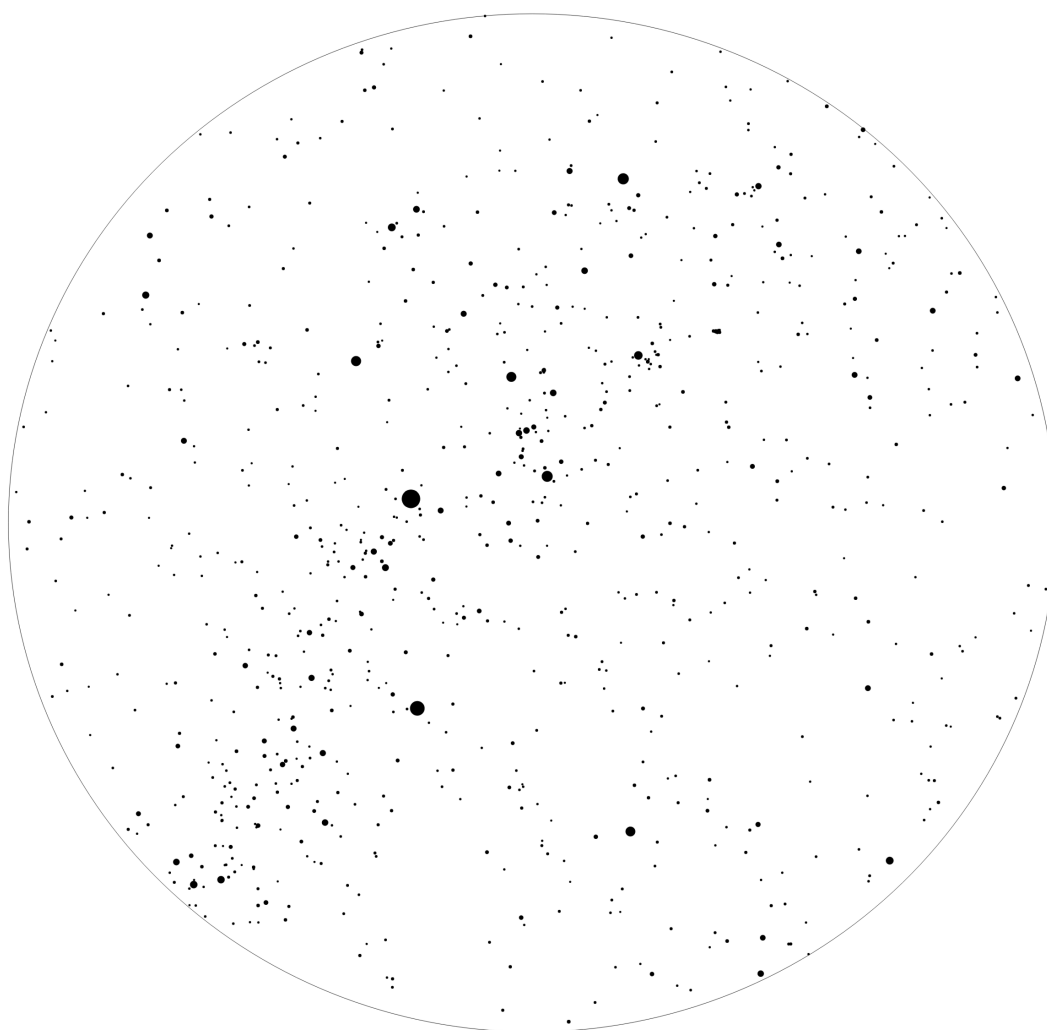
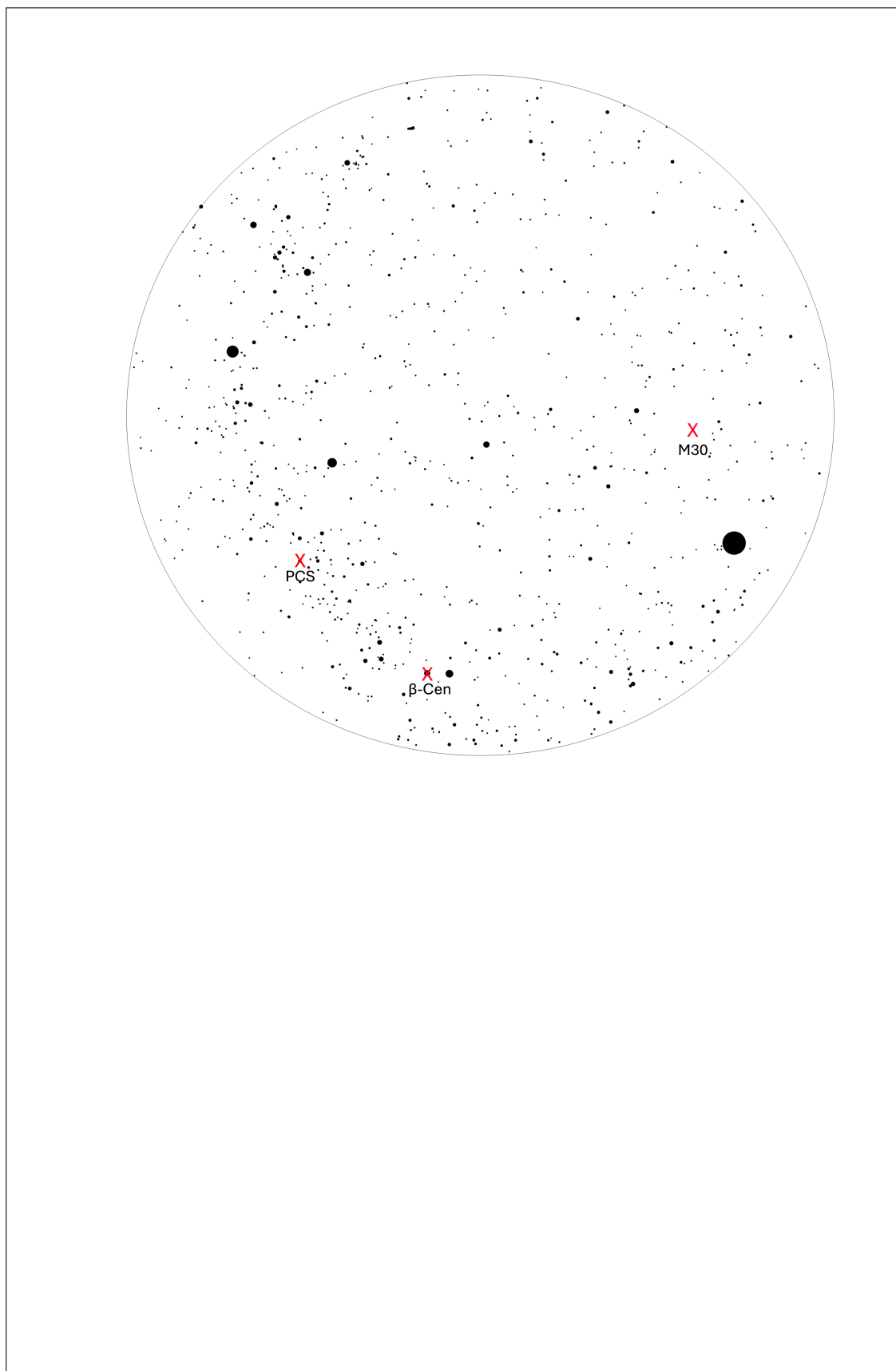
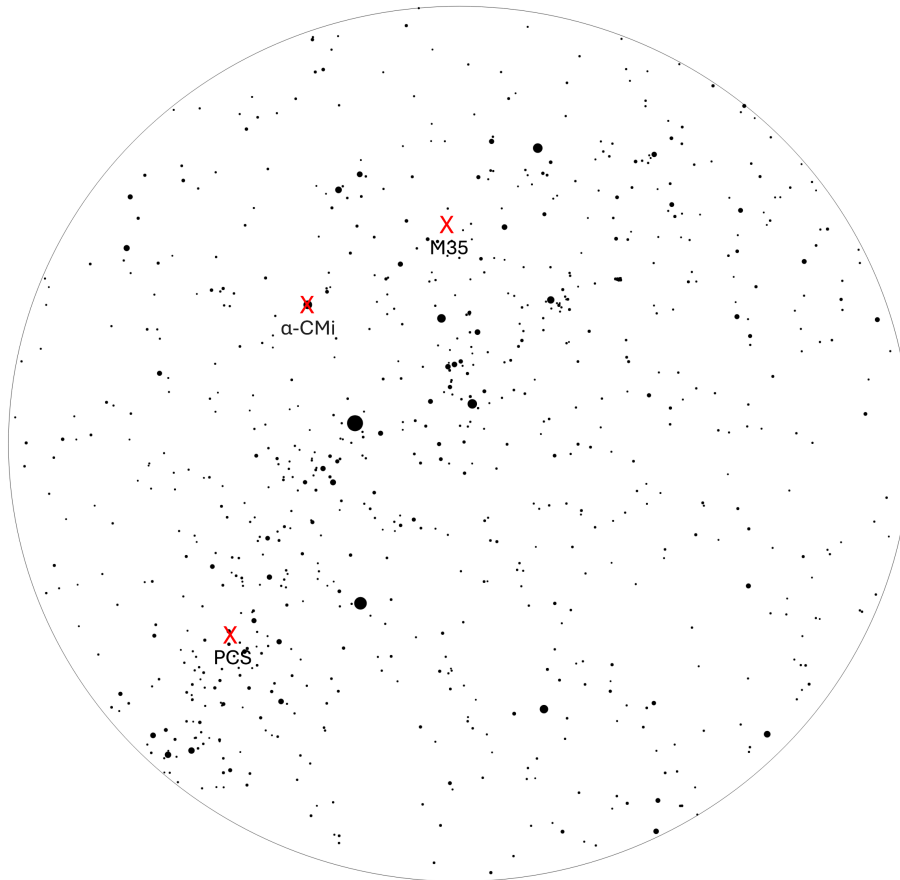


Figura 3: Carta 1.2

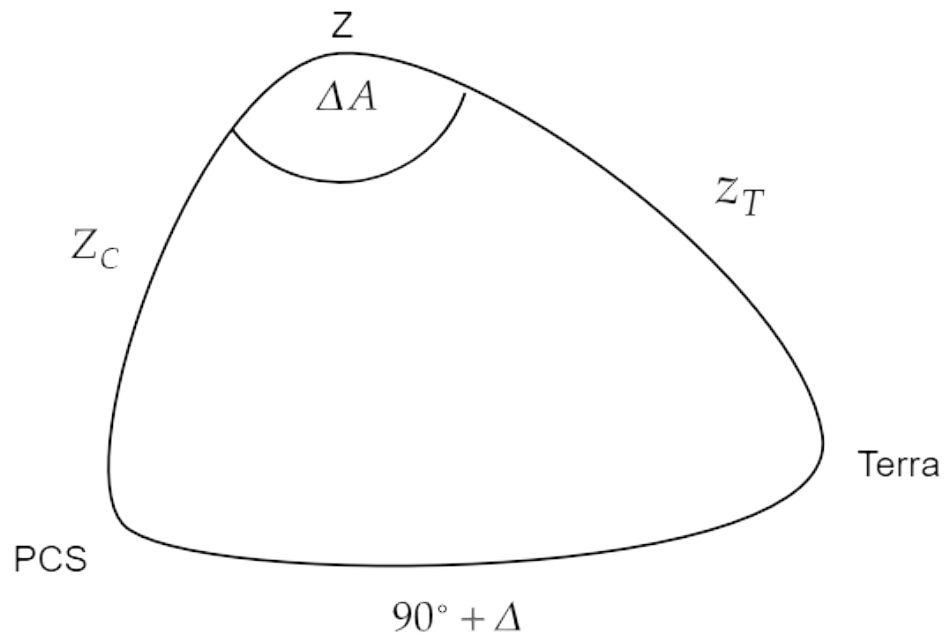
Solução:

- (a) As marcações para os itens **(a)**, **(b)** e **(c)** estão representadas nas imagens a seguir, as devidas explicações estarão no gabarito para cada item:





- (b) Para encontrar o polo visível representado nas cartas, pode-se pensar em encontrar o ponto ou a região do céu que não se moveu entre as cartas, pois o céu gira em torno dos polos, que são os pontos que estamos procurando. Uma forma mais fácil de perceber o ponto invariante é sobrepondo as imagens em um site ou software de geometria ou desenho, como o geogebra, que é gratuito e pode ser utilizado acessando o site, e compará-las. Dessa forma, percebe-se que o polo visível do planeta é **Markeb** (κ -Vel). Portanto, o planeta representado é **Marte**, e podemos ver o **polo celeste sul** do planeta, como escrito na tabela de constantes.
- (c) Para encontrar as coordenadas da Terra na **Carta 1.1** no sistema definido no item, devemos desenhar os seguintes triângulos esféricos: zênite, PCS e Terra; zênite, PES e PCS; zênite, PES, Terra; e, por fim, PES, PCS e Terra. Em que PES, é o polo eclíptico sul, e PCS é o polo celeste sul do planeta. Para encontrar alguns dos lados desses triângulos, será preciso tirar algumas medidas das cartas, principalmente para termos as distâncias zenitais e diferenças de azimuth entre esses pontos. Então, representando esses triângulos, temos:

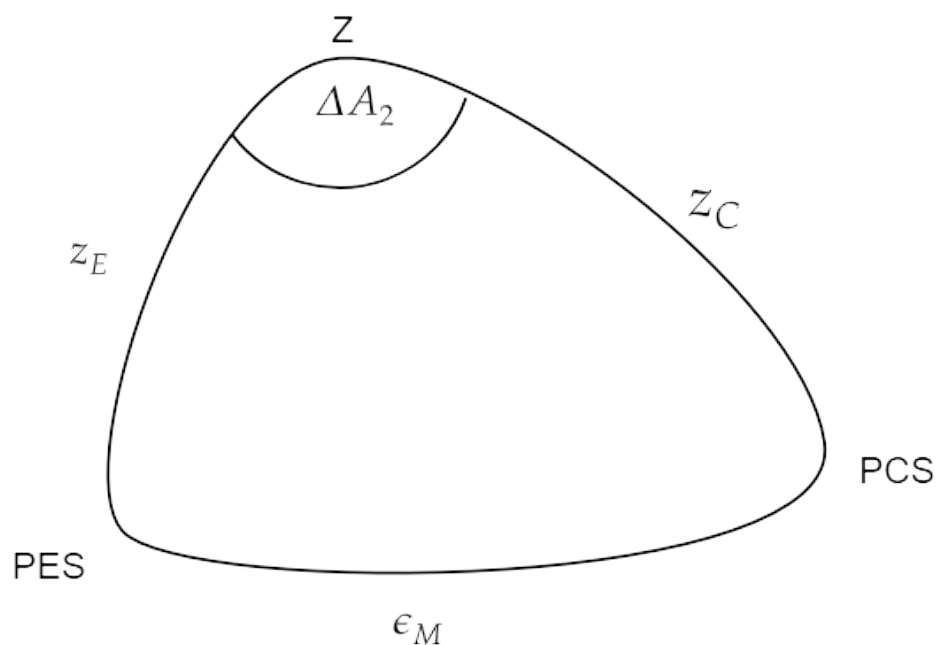


Que ao utilizarmos a lei dos cossenos, temos:

$$\cos(90^\circ + \Delta) = \cos Z_C \cos Z_T + \sin Z_C \sin Z_T \cos \Delta A$$

$$\Delta \approx 10,6^\circ$$

O segundo desenho fica:

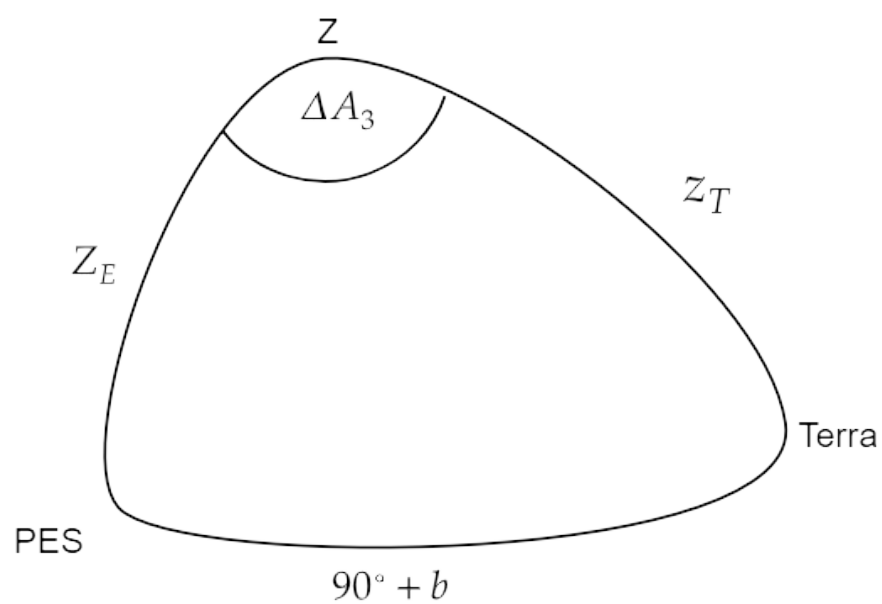


Também utilizando a lei dos cossenos:

$$\cos \epsilon_M = \cos Z_c \cos Z_E + \sin Z_c \sin Z_E \cos \Delta A_2$$

$$\epsilon_M \approx 26,4^\circ$$

Ainda temos:

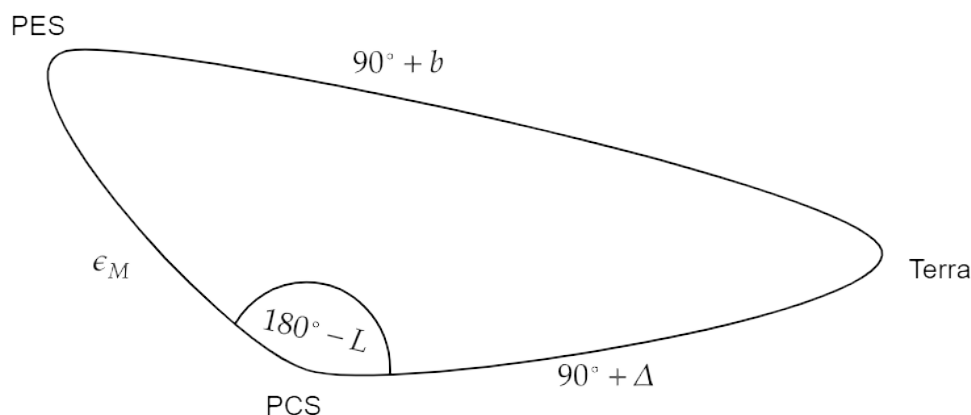


Que a partir da lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ + b) = \cos Z_T \cos Z_E + \sin Z_T \sin Z_E \cos \Delta A_3$$

$$b \approx -1,9^\circ$$

Por fim, o triângulo que relaciona nosso meridiano de referência e a Terra é:



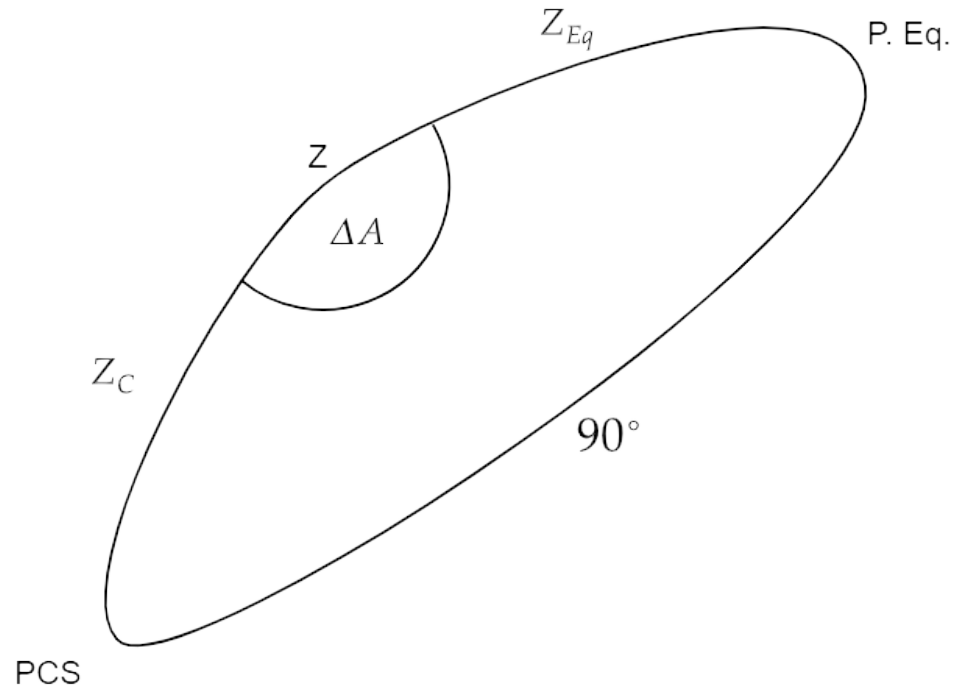
Que com a lei dos cossenos fica:

$$\cos(90^\circ + b) = \cos \epsilon_M \cos(90^\circ + \Delta) + \sin \epsilon_M \sin(90^\circ + \Delta) \cos(L - 180^\circ)$$

$$L \approx 116,9^\circ$$

Portanto, as coordenadas da Terra no sistema definido são: $\Delta = 10,6^\circ$ e $L = 116,9^\circ$.

Agora, para encontrar o equador, deve-se perceber que todos os pontos dele distam 90° de um dos polos celestes. Dessa forma, já é possível marcar o ponto que passa sobre o prolongamento da linha que liga o equador e o zênite, o ponto que pertence ao equador terá a mesma distância ao polo que o raio da carta. Agora, precisamos encontrar mais um ponto pelo menos. Para isso, pode-se desenhar o triângulo esférico formado pelo zênite, polo e um ponto do equador, e encontrar uma expressão que relaciona a distância zenital e a diferença de azimuth:

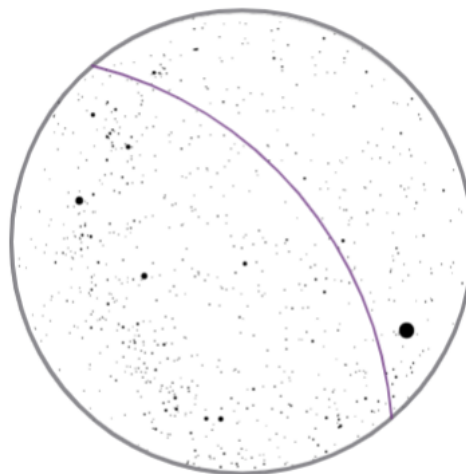


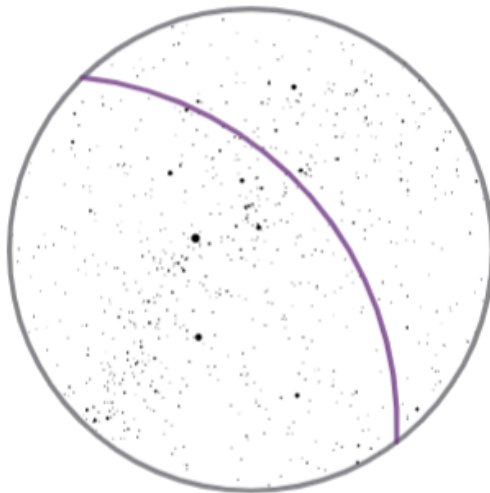
Com a lei dos cossenos:

$$\cos 90^\circ = \cos Z_C \cos Z_{Eq} + \sin Z_C \sin Z_{Eq} \cos \Delta A$$

$$\tan Z_{Eq} = -\frac{1}{\tan Z_C \cos \Delta A}$$

Que, aplicando para um valor qualquer de ΔA , podemos marcar seu simétrico em relação ao meridiano utilizado para marcar o primeiro ponto do equador. E assim, traçar esse círculo máximo. As marcações estão representadas nas imagens a seguir.

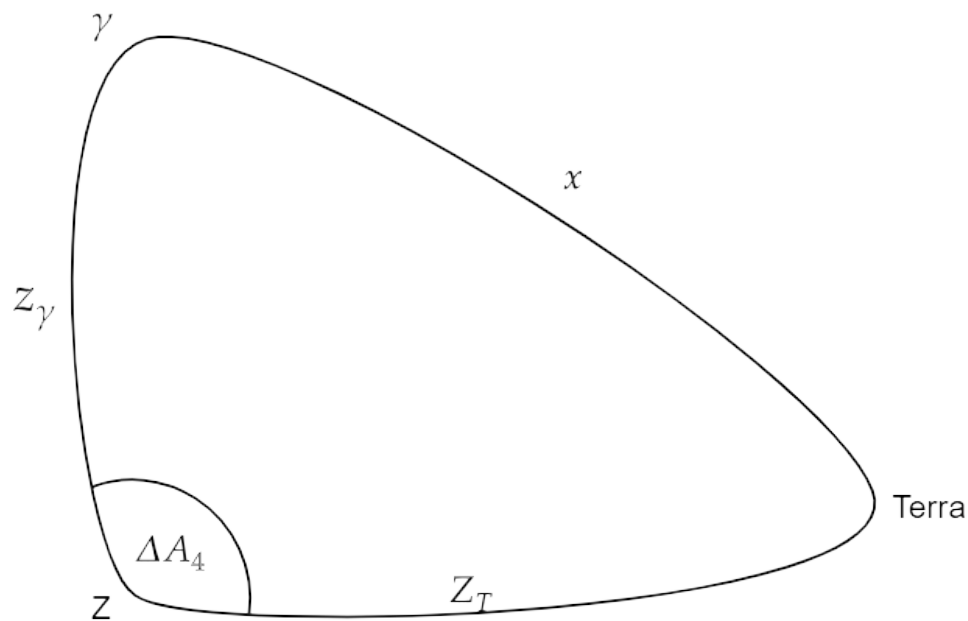




- (d) **OBS:** Por causa de um equívoco no enunciado, foram informados mais dados que o necessário para a resolução, ocasionando uma incoerência nos dados, o que permite mais de uma resposta correta para as coordenadas do planeta e seu ângulo horário. Na correção serão consideradas todas as possíveis soluções caso sejam devidamente explicadas.

Solução padrão (caso não houvesse equívoco):

Para encontrar as coordenadas equatoriais de Gurjinho, primeiro devemos relacionar as coordenadas eclípticas da Terra vistas por Marte com as coordenadas eclípticas de Marte vistas pela Terra. No entanto, como temos apenas a latitude eclíptica da Terra, precisamos desenhar mais dois triângulos esféricos para encontrar a longitude. Eles são o triângulo formado pelo zênite, ponto vernal e Terra; e o PEN, ponto vernal e Terra:

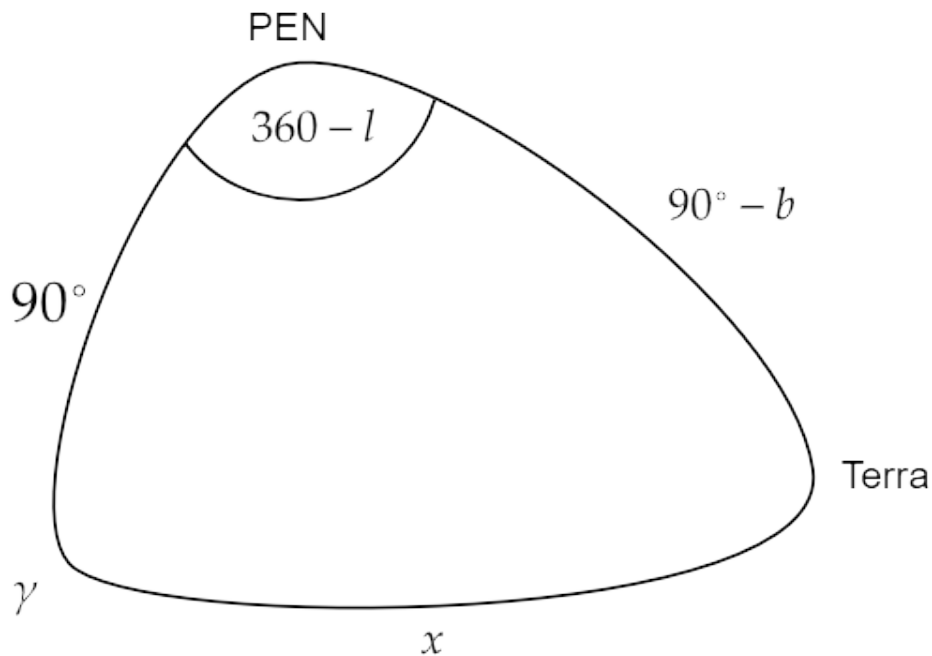


Com a lei dos cossenos, tem-se que:

$$\cos x = \cos Z_T \cos Z_\gamma + \sin Z_T \sin Z_\gamma \cos \Delta A_4$$

$$x \approx 62,9^\circ$$

E o triângulo esférico que relaciona o PEN, ponto vernal e Terra é:

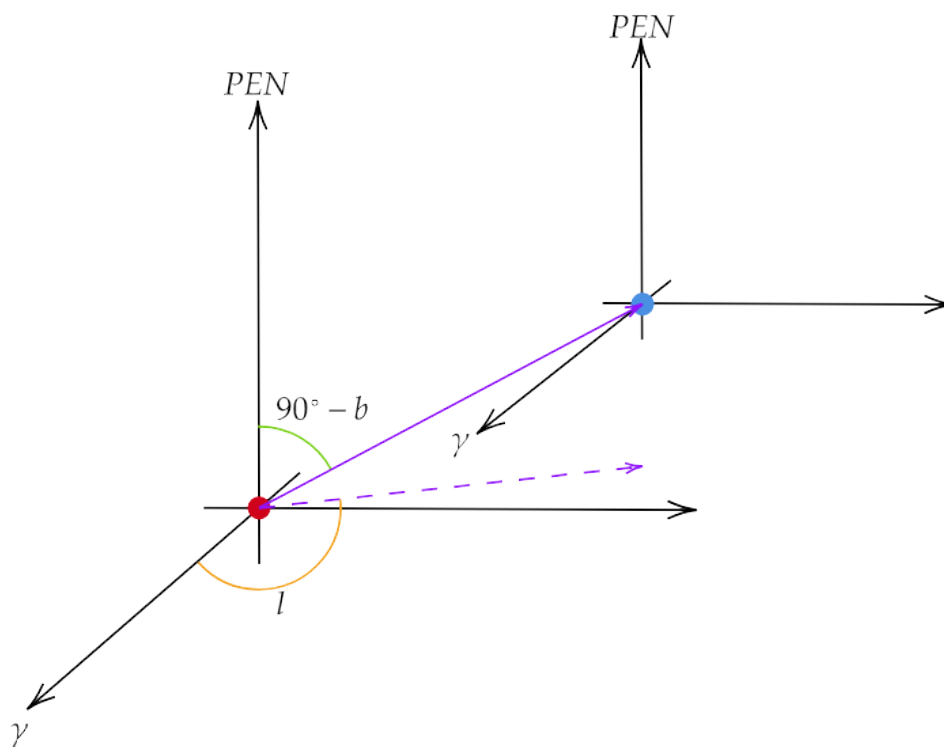


Que a lei dos cossenos se torna:

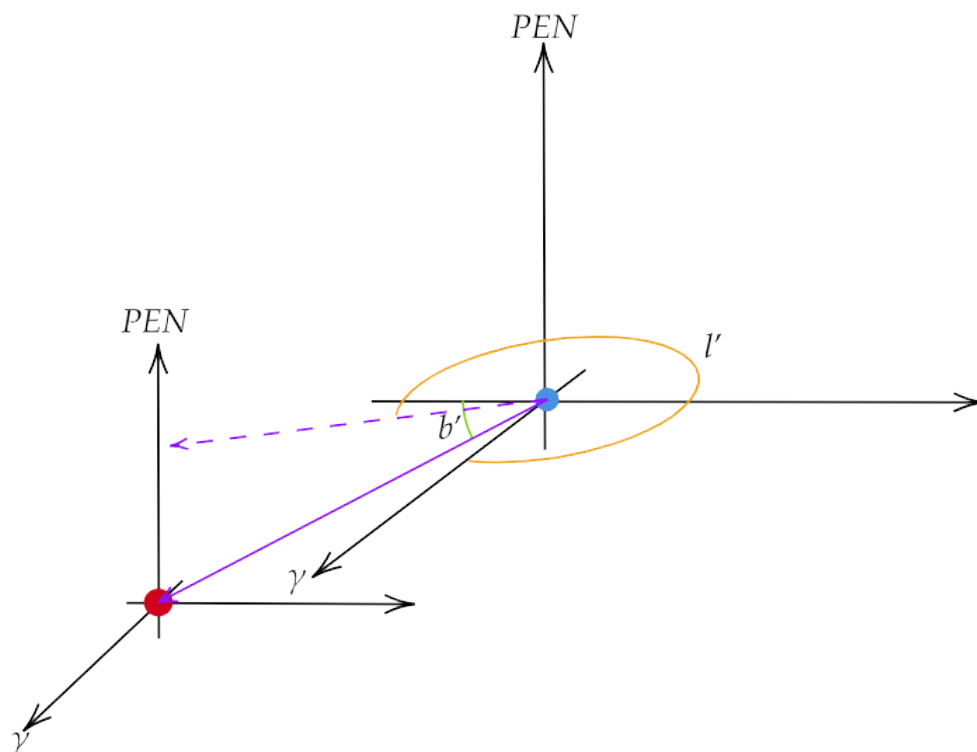
$$\cos x = \cos 90^\circ \cos(90^\circ - b) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - b) \cos l$$

$$l \approx 297,1^\circ$$

Agora, com todas as coordenadas eclípticas da Terra, deve-se relacionar elas com as de Marte vistas da Terra. Para isso, pode-se desenhar dois planos cartesianos com x sendo a direção do ponto vernal e z o polo fundamental, polo eclíptico norte, sendo um com centro em Marte e outro com centro na Terra:



Agora, fazendo a representação considerando apenas as coordenadas vistas da Terra:



Relacionando geometricamente ambas as coordenadas temos que:

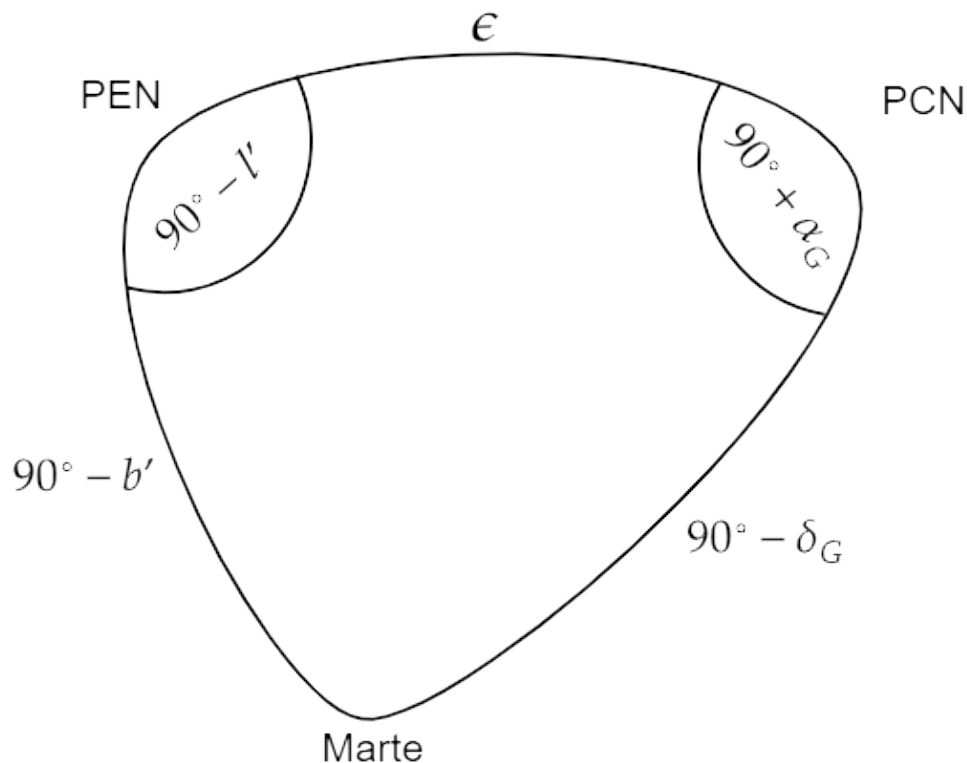
$$b' = -b$$

$$b' \approx 1,9^\circ$$

$$l' = l + 180^\circ$$

$$l' \approx 117,1^\circ$$

Por fim, com as coordenadas eclípticas de Marte, pode-se converter entre o sistema eclíptico e o equatorial a partir do triângulo esférico:



Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - \delta_G) = \cos \epsilon \cos(90^\circ - b') + \sin \epsilon \sin(90^\circ - b') \cos(90^\circ - l')$$

$$\boxed{\delta_G \approx +22,7^\circ}$$

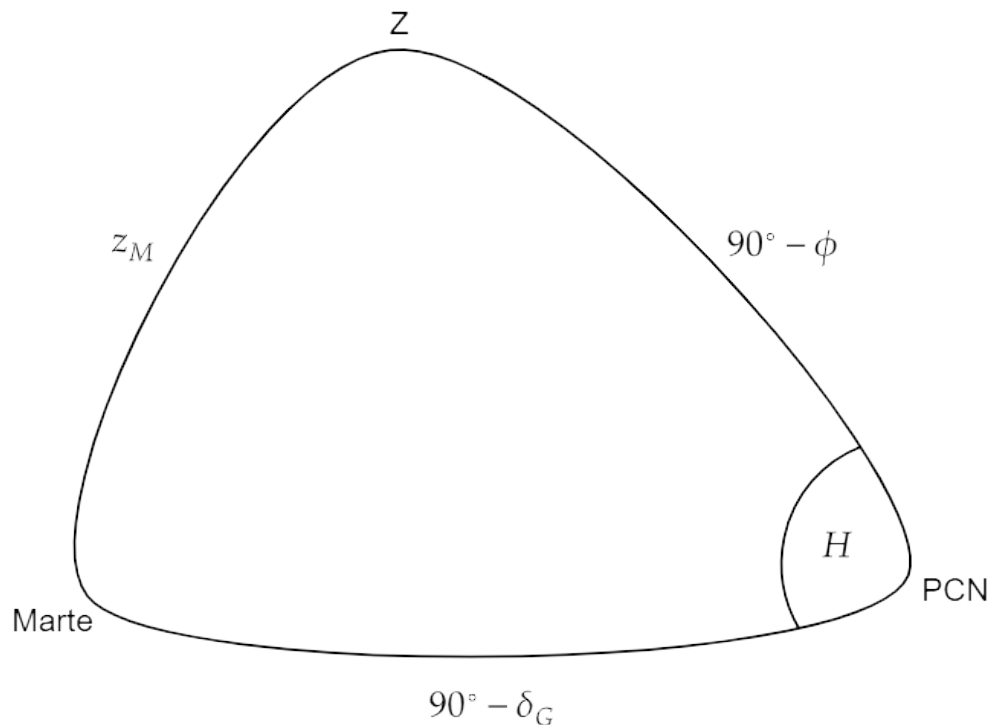
Agora, para encontrar o valor de alpha, será preciso fazer uma lei dos senos e uma lei dos cossenos:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta_G)}{\sin(90^\circ - l')} = \frac{\sin(90^\circ - b')}{\sin(90^\circ + \alpha_G)}$$

$$\cos(90^\circ - b') = \cos \epsilon \cos(90^\circ - \delta_G) + \sin \epsilon \sin(90^\circ - \delta_G) \cos(90^\circ + \alpha_G)$$

$$\alpha_G \approx 119,3^\circ$$

Por fim, para encontrar a hora da observação, precisamos encontrar o ângulo horário de Marte durante sua observação, o qual pode ser encontrado pelo triângulo esférico:



Com a lei dos cossenos e sabendo que o astro está a oeste, pois seu azimute é $< 180^\circ$, temos:

$$\cos z_M = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta_G) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - \delta_G) \cos H$$

$$H_G \approx 2,9h$$

Agora, com o ângulo horário, pode-se encontrar o TSL no horário da observação e compará-lo com o do Sol médio. Dessa forma, encontraremos o ângulo horário do Sol médio, que pode ser relacionado com o tempo civil. Para encontrar a ascensão reta, devemos utilizar que durante 365,25 dias o Sol médio percorrerá 360° no equador com uma velocidade constante, por desprezarmos a excentricidade da órbita terrestre. Então, o ângulo horário do Sol médio será:

$$TSL = H_{\odot M} + \alpha_{\odot M}$$

$$H_G + \alpha_G = H_{\odot M} + \omega \Delta t$$

$$H_{\odot M} \approx -2,6h$$

Por fim, relacionando o ângulo horário do Sol médio com o tempo civil, temos:

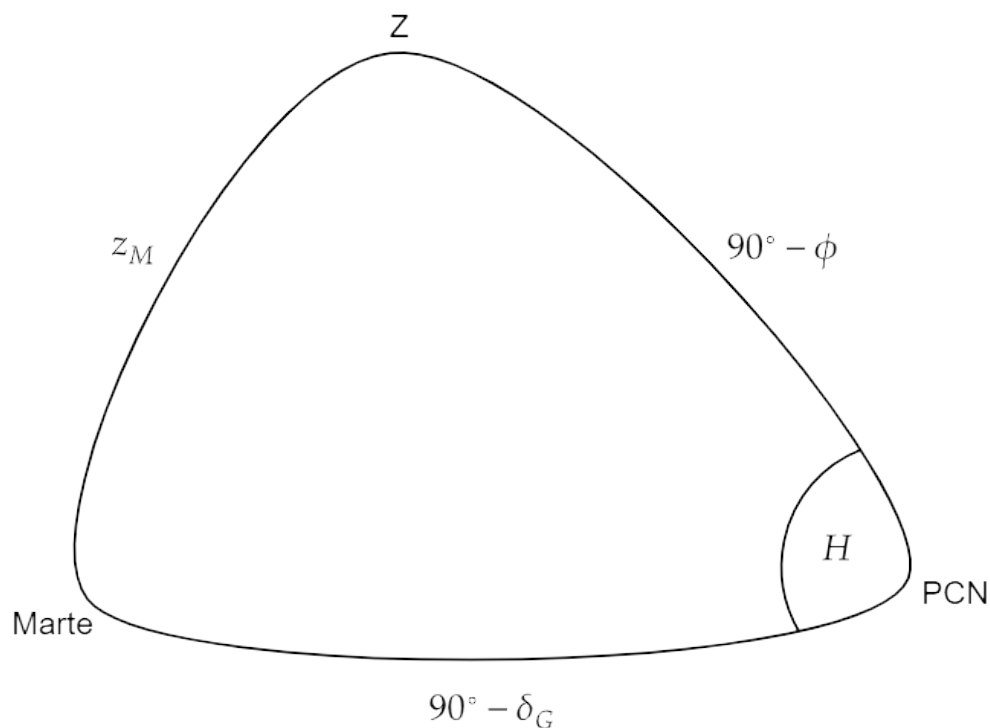
$$T_{\odot}ML = TC - \frac{|\lambda| - 45^{\circ}}{15^{\circ}}$$

$$H_{\odot M} + 12h = TC - \frac{|\lambda| - 45^{\circ}}{15^{\circ}}$$

$$TC \approx 9,5h$$

Solução possibilitada pelo equívoco:

Outra forma de encontrar as coordenadas do planeta seria utilizando trigonometria esférica no triângulo formado pelo Polo-Astro-Zênite, onde, encontraria a declinação pela lei dos cossenos:



$$\cos(90^{\circ} - \delta_G) = \cos Z_M \cos(90^{\circ} - \phi) + \sin Z_M \sin(90^{\circ} - \phi) \cos A$$

$$\delta_G \approx -21,3^{\circ}$$

Também seria possível encontrar o ângulo horário por esse método;

$$\cos Z_M = \cos(90^{\circ} - \delta_G) \cos(90^{\circ} - \phi) + \sin(90^{\circ} - \delta_G) \sin(90^{\circ} - \phi) \cos H$$

$$H \approx 4,5h$$

Agora, para encontrar a ascensão reta do planeta teria que utilizar do método já descrito anteriormente.

Com esses valores, o tempo civil de Hermético é:

$$T_{\odot}ML = TC - \frac{|\lambda| - 45^{\circ}}{15^{\circ}}$$

$$H + \alpha_G - \omega\Delta t + 12h = TC - \frac{|\lambda| - 45^{\circ}}{15^{\circ}}$$

$$TC \approx 11,1h$$