

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, 4 valendo 10 pontos e 2 valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente **individual**.

Prazo: 26/04/2025 23h59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	−12,74 mag	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	−26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ^{−1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ^{−2}	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ^{−1} · K ^{−1}	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ^{−1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ^{−2} · K ^{−4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ^{−1} · Mpc ^{−1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

- 1. Aglomerado (10 pontos)** Considere um aglomerado aberto formado por $N = 7 \times 10^{10}$ estrelas de massa entre $0.5M_{\odot}$ e $5M_{\odot}$. Sabe-se que a densidade de probabilidade de formação de estrela nesse aglomerado é proporcional à M^{-2} . Sabendo que para estrelas da Sequência Principal a relação massa-luminosidade é do tipo $L \propto M^3$, encontre a magnitude absoluta m_T do aglomerado e calcule o desvio Δm_T que ocorreria caso se considerasse que o aglomerado fosse formado apenas por estrelas do tipo solar.

DADO: A idade do aglomerado é menor do que o tempo de vida de qualquer estrela nele presente.

Solução:

Sabemos que:

$$\frac{dN}{dM} = kM^{-2}$$

assim:

$$\int_0^{7 \times 10^{10}} dN = k \int_{0.5}^5 M^{-2} dM$$

Realizando as manipulações algébricas necessárias, obtemos que:

$$k = 3,89 \times 10^{10}$$

Desse modo:

$$dL_T = L_i dN_i$$

ou seja:

$$L_T = \int_{0.5}^5 k L_{\odot} M dM$$

logo:

$$L_T = 4,81 \times 10^{11} L_{\odot}$$

Por fim:

$$m_T - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_T}{L_{\odot}} \right)$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$m_T = -24,38$$

e o desvio:

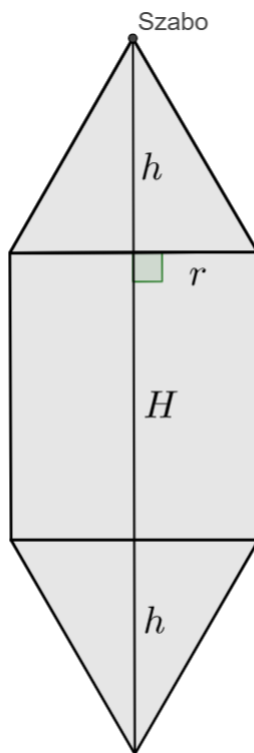
$$\Delta m = -2,5 \log \left(\frac{L_T}{N L_{\odot}} \right)$$

ou seja:

$$\Delta m = -2,09$$

- 2. Szabo e o Dado Transcendental (10 pontos)** Szabo é o maior fã de Dungeons & Dragons no mundo. Já jogou em todos os papéis possíveis, foi Dungeon Master centenas de vezes e tem o costume de colecionar dados de variadas cores, materiais e número de faces. Recentemente, ele comprou um D20 (dado em formato de icosaedro) de um camelô em uma van preta muito duvidosa. O dado tinha faces com símbolos estranhos que mudavam com o tempo. Quando Szabo usou o dado em uma de suas jogatinas, ele foi teletransportado para outra dimensão!

Ele repentinamente apareceu em um planeta de formato estranho, formado por dois cones, cada um com sua base colada em uma das bases circulares de um cilindro entre eles. Eis uma ilustração planificada do planeta:



Szabo está bem no vértice de um dos cones. O planeta tem uma massa M , cada um dos cones tem altura h , o cilindro tem altura H e as bases dos cones têm raio r (bem como as faces circulares do cilindro).

Qual é a força sentida por Szabo, se ele tem massa m e a massa do planeta é distribuída uniformemente? Considere que $H \gg h$.

Solução: É fato conhecido, segundo a Apostila Magna, que, se há um plano finito com densidade de massa superficial σ , podemos calcular a componente perpendicular a ele do campo gravitacional gerado por ele em um ponto P arbitrário:

$$g_{\perp} = G\sigma\Omega$$

Em que Ω é o ângulo sólido que o plano compreende do ponto de vista de P.

No nosso problema, podemos imaginar que o planeta em que Szabo está é formado de infinitos planos finitos com espessura infinitesimal dx (se necessário, leia esta frase novamente) e densidade de massa superficial $d\sigma = \rho dx$ (em que ρ é a densidade volumétrica de massa). Devido à simetria do planeta ao pegarmos qualquer plano que contenha o eixo do cilindro, fica claro que a componente do campo gravitacional paralela a cada um desses planos finitos será zero.

Para segmentar o nosso raciocínio, podemos calcular o campo gravitacional gerada por cada uma das "partes" do planeta e depois somar:

- i) O cone em que Szabo está;
- ii) O cilindro entre os cones;
- iii) O outro cone.

Porém, antes disso, definamos ρ . Sendo a massa distribuída uniformemente:

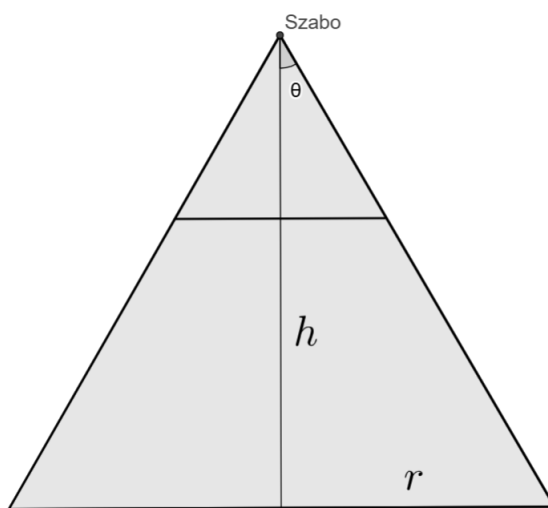
$$V = 2\pi r^2 h \cdot \frac{1}{3} + \pi r^2 H$$

$$\wedge \quad \rho = \frac{M}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{3M}{2\pi r^2 h + 3\pi r^2 H}$$

Começemos, então:

- i) Sabe-se que o ângulo sólido de um círculo é o mesmo de uma secção esférica que é compreendida pelo mesmo ângulo θ . Além disso, perceba que, para qualquer corte seccional do cone que selecionarmos, o ângulo θ será o mesmo:



Dáí, temos que, para qualquer um dos planos finitos circulares de espessura infinitesimal que selecionemos no primeiro cone, teremos:

$$\cos \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\Omega_i = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

$$\Omega_i = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) = \text{cte}$$

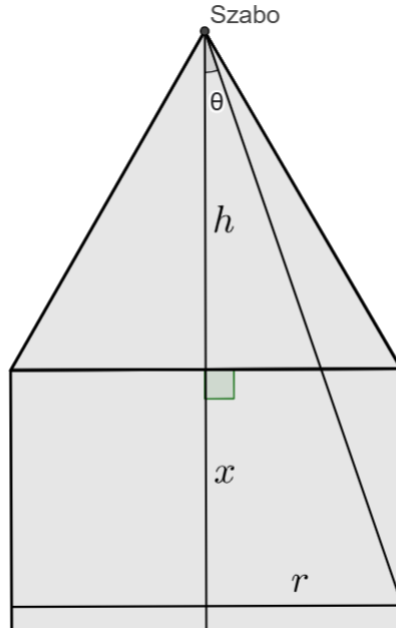
Portanto:

$$dg_{i\perp} = G\rho\Omega_i dx$$

$$g_{i\perp} = \int_0^h G\rho\Omega_i dx$$

$$|g_{i\perp}| = 2\pi G\rho h \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right)$$

- ii) Para o cilindro, temos planos finitos circulares de espessura infinitesimal com mesma área, porém distâncias diferentes, o que resulta em um ângulo θ variável. Selecionemos um corte seccional qualquer:



$$\cos \theta = \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + r^2}}$$

$$\Omega_{ii} = 2\pi \left(1 - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + r^2}} \right)$$

Com isso, podemos calcular $g_{ii\perp}$:

$$dg_{ii\perp} = G\rho\Omega_{ii}dx$$

$$g_{ii\perp} = 2\pi G\rho \int_0^H \left(1 - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + r^2}} \right) dx$$

$$g_{ii\perp} = 2\pi G\rho \left(H - \int_0^H \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2 + r^2}} dx \right)$$

Perceba que, se fizermos a substituição $(h+x)^2 + r^2 = t^2$, temos imediatamente que $dt = (h+x)dx$. Por causa dessa maravilhosa consequência, nossa integral é simplificada consideravelmente:

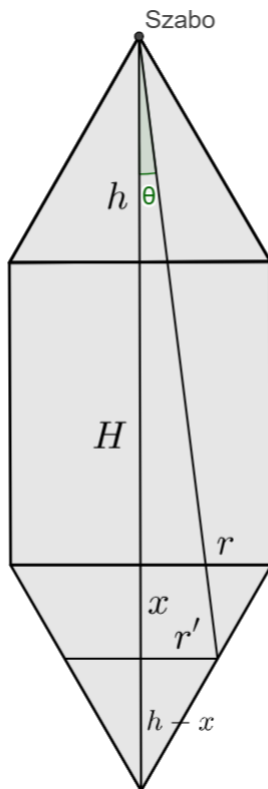
$$g_{ii\perp} = 2\pi G\rho \left(H - \int_{\sqrt{h^2+r^2}}^{\sqrt{(h+H)^2+r^2}} \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt \right)$$

$$|g_{ii\perp}| = 2\pi G\rho \left(H + \sqrt{h^2+r^2} - \sqrt{(h+H)^2+r^2} \right)$$

Podemos ainda utilizar a aproximação $h+H \approx H$, já que $H \gg h$. É ainda razoável aproximar $h \ll r$, já que r será desprezado de qualquer forma se $r \ll H$. Daí:

$$|g_{ii\perp}| = 2\pi G\rho \left(H + \sqrt{h^2+r^2} - \sqrt{H^2+r^2} \right)$$

- iii) O terceiro cone será a parte mais difícil do problema. Veja a geometria de quando pegamos um círculo qualquer que tem distância $h - x$ ao vértice do cone e raio r' :



Por semelhança de triângulos, sabemos que:

$$\frac{h - x}{r'} = \frac{h}{r}$$

$$r' = r \left(1 - \frac{x}{h} \right)$$

Como consequência, usando o fato de que $H \gg h$ temos θ e o ângulo sólido deste círculo:

$$\cos \theta = \frac{h + H + x}{\sqrt{(h + H + x)^2 + r^2 \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2}}$$

$$\cos \theta \approx \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2 \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2}}$$

$$\Omega_{\text{iii}} = 2\pi \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2 \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2}} \right)$$

Com isso, podemos calcular $g_{\text{iii}\perp}$:

$$dg_{\text{iii}\perp} = G\rho\Omega_{\text{iii}}dx$$

$$g_{\text{iii}\perp} = 2\pi G\rho \int_0^h \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2}} \right) dx$$

$$g_{\text{iii}\perp} = 2\pi G\rho \left(h - \int_0^h \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{H^2} \left(\frac{x}{h} - 1\right)^2}} dx \right)$$

Para utilizarmos a integral dada no enunciado, basta utilizarmos a substituição $u = \frac{r}{H} \left(\frac{x}{h} - 1 \right)$, que implica em $du = \frac{r}{hH} dx \implies dx = \frac{hH}{r} du$. Com isso:

$$g_{\text{iii}\perp} = 2\pi G\rho h \left(1 - \frac{H}{r} \int_{-\frac{r}{H}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du \right)$$

$$\boxed{|g_{\text{iii}\perp}| = 2\pi G\rho h \left(1 - \frac{H}{r} \ln \left| \sqrt{1 + \frac{r^2}{H^2}} - \frac{r}{H} \right| \right)}$$

Por fim, lembrando que $\rho = \frac{3M}{2\pi r^2 h + 3\pi r^2 H}$, temos o campo gravitacional sentido por Szabo, sendo este apenas $g = g_{\text{i}\perp} + g_{\text{ii}\perp} + g_{\text{iii}\perp}$:

$$|g| = 2\pi G\rho h \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) + 2\pi G\rho \left(H + \sqrt{h^2 + r^2} - \sqrt{H^2 + r^2} \right)$$

$$+ 2\pi G\rho h \left(1 - \frac{H}{r} \ln \left| \sqrt{1 + \frac{r^2}{H^2}} - \frac{r}{H} \right| \right)$$

Perceba que é possível desprezar $g_{\text{i}\perp}$ e $g_{\text{iii}\perp}$:

$$\boxed{|g| = 2\pi G\rho \left(H + r - \sqrt{H^2 + r^2} \right)}$$

Por fim:

$$\boxed{F = \frac{2GMm}{r^2 H} \left(H + r - \sqrt{H^2 + r^2} \right)}$$

3. Extração de Trabalho de uma Atmosfera Estelar (10 pontos)

Parte I

Para a parte principal dessa questão, precisaremos do resultado obtido no item a seguir:

- (a) **(1,5 pontos)** Encontre a energia potencial Ω armazenada em uma casca esférica homogênea de massa total M , raio interno R_i e raio externo R_e .

Parte II

Imagine que uma civilização muito avançada está planejando a construção de uma estrutura ao redor de uma estrela com objetivo de extrair energia elétrica. A estrutura tem a intenção de isolar a atmosfera estelar do resto da estrela e do espaço exterior. Além disso, planeja-se separar a atmosfera em um compartimento contendo apenas matéria e outro contendo apenas radiação, conforme a ilustração a seguir

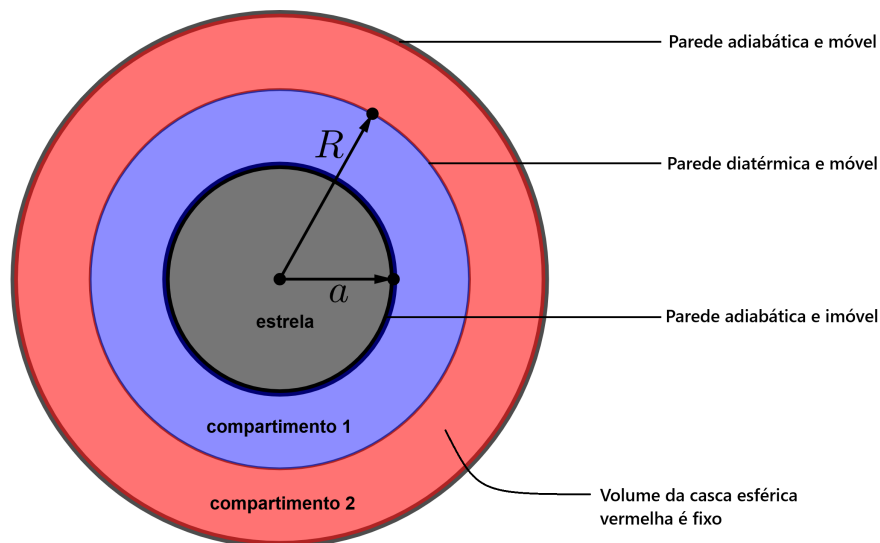


Figura 1: Esquema das três paredes construídas ao redor da estrela. Todas as paredes são impermeáveis. O volume na casca vermelha é fixo e igual a V , mesmo as paredes limitantes sendo móveis. As paredes móveis são sempre esféricas e com centro fixo, apenas alteram o raio.

O compartimento 1 contém N partículas de um gás ideal monoatômico totalizando uma massa M e o compartimento 2 contém um volume fixo V de gás de fótons. A estrela (tirando sua atmosfera) está contida dentro da parede mais interna de raio a . A mobilidade das duas paredes mais externas ocorre unicamente pela variação de seus raios. Elas estão conectadas de forma que o volume V no compartimento 2 é sempre constante. Suponha que todas as três paredes possuem massa desprezível.

Planeja-se submeter o compartimento 1 a uma queda de sua energia interna a fim de transformar calor em trabalho útil por meio de mecanismos envolvendo pistões e fluidos auxiliares (os mecanismos não são relevantes para a solução do problema - tanto a energia quanto a entropia dos mecanismos são desprezíveis). Entretanto, é conhecido que tal conversão não pode ser feita com 100% de eficiência pela 2ª lei da termodinâmica, de forma que parte desta energia interna se transformará em calor transferido para o compartimento 2.

Assuma que os processos são todos quasi-estáticos. Assuma também que em cada instante a distribuição de cada gás em seu respectivo compartimento é homogênea, com pressão e temperatura constantes ao longo do compartimento.

- (b) **(1,5 pontos)** Qual é a variação de entropia total do sistema (sistema=compartimento 1+compartimento 2) se R varia de R_i a R_f , a temperatura do gás no compartimento 1 varia de T_{1i} a T_{1f} e do gás no compartimento 2 varia de T_{2i} a T_{2f} ?
- (c) **(4 pontos)** Suponha que as temperaturas iniciais de cada compartimento é T_{1i} e T_{2i} e o raio inicial é R_i . Qual é a temperatura T_{2f} final do compartimento 2 que resultará no maior valor

possível de trabalho útil extraído a partir da queda da energia interna do compartimento 1 quando este sai do estado inicial para um com temperatura T_{1f} e raio R_f ?

Dica: Use a primeira e segunda lei da termodinâmica.

- (d) **(3 pontos)** Explique sucintamente como obtemos a expressão do trabalho máximo que pode ser extraído neste processo. Não é necessário escrevê-la explicitamente, visto que ela será um pouco grande.

Dados:

Entropia de um gás ideal monoatômico:

$$S = Ns_0 + Nk_B \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-5/2} \right], \quad (1)$$

em que s_0, U_0, V_0 e N_0 são constantes, k_B é a constante de Boltzmann, U energia térmica do gás, V volume e N número de partículas.

Entropia de um gás de fótons:

$$S = \frac{16\sigma}{3c} VT^3, \quad (2)$$

em que σ é a constante de Stefan-Boltzmann, c velocidade da luz, V volume e T temperatura do gás.

Solução:

- (a) (Usarei Ω para a energia potencial para não confundir com a energia térmica U utilizada nos itens a seguir). A contribuição infinitesimal pro potencial de uma casca esférica infinitesimal de massa dm englobando uma massa $m(r)$ é

$$d\Omega = -\frac{Gm(r)dm}{r} \quad (3)$$

em que $m(r) = \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_i^3)\rho$ e então $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Integrando,

$$\Omega = -\frac{(4\pi\rho)^2 G}{3} \int_{R_i}^{R_e} (r^4 - rR_i^3) dr = -\frac{8\pi^2 \rho^2 G}{15} [2R_e^5 + 3R_i^5 - 5R_i^3 R_e^2] \quad (4)$$

Usando $M = \frac{4}{3}\pi(R_e^3 - R_i^3)\rho$ para deixar a resposta em função de M :

$$\Omega = -\frac{3GM^2}{10} \frac{[2R_e^5 + 3R_i^5 - 5R_i^3 R_e^2]}{(R_e^3 - R_i^3)^2} \quad (5)$$

- (b) A variação da entropia total é a soma das variações das entropias de cada compartimento:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_1 + \Delta S_2 \quad (6)$$

A variação da entropia do gás no compartimento 1 é, usando a fórmula para o gás ideal monoatômico que está no enunciado juntamente com $U = \frac{3}{2}Nk_b T$,

$$\Delta S_1 = S_{1f} - S_{1i} = Nk_B \ln \left[\left(\frac{T_{1f}}{T_{1i}} \right)^{3/2} \left(\frac{R_f^3 - a^3}{R_i^3 - a^3} \right) \right]. \quad (7)$$

Enquanto que para o compartimento 2, usando a fórmula para gás de fótons que está no enunciado,

$$\Delta S_2 = S_{2f} - S_{2i} = \frac{16\sigma V}{3c} [T_{2f}^3 - T_{2i}^3]. \quad (8)$$

Portanto, obtemos

$$\Delta S_{total} = Nk_B \ln \left[\left(\frac{T_{1f}}{T_{1i}} \right)^{3/2} \left(\frac{R_f^3 - a^3}{R_i^3 - a^3} \right) \right] + \frac{16\sigma V}{3c} [T_{2f}^3 - T_{2i}^3] \quad (9)$$

- (c) Sendo E_1 a energia do gás no compartimento 1, Q_2 o calor inserido no compartimento 2 e W_{ext} o trabalho extraído do sistema, temos pela primeira lei da termodinâmica,

$$dE_1 + dQ_2 + dW_{ext} = 0. \quad (10)$$

Como dE_1 é fixado, temos que dW_{ext} é máximo quando dQ_2 é mínimo. Pela segunda lei da termodinâmica, a variação da entropia total de um sistema isolado é não-negativa:

$$dS_{tot} = dS_1 + dS_2 = dS_1 + \frac{dQ_2}{T_2} \geq 0. \quad (11)$$

Isto implica que

$$dQ_2 \geq -T_2 dS_1, \quad (12)$$

impondo um valor mínimo para dQ_2 . Este valor mínimo ocorre quando temos a igualdade acima, que equivale à igualdade na equação (11), isto é, equivale a $dS_{tot} = 0$. Ou seja, concluímos que o trabalho máximo ocorrerá quando o processo for reversível. Essencialmente o que fizemos aqui foi provar o Princípio do Trabalho Máximo (veja https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_maximum_work). O valor de T_{2f} é determinado impondo a condição de reversibilidade:

$$\Delta S_{tot} = 0. \quad (13)$$

Pelo resultado do item anterior, isto implica que

$$T_{2f} = \left(T_{2i}^3 - \frac{3cNk_B}{16\sigma V} \ln \left[\left(\frac{T_{1f}}{T_{1i}} \right)^{3/2} \left(\frac{R_f^3 - a^3}{R_i^3 - a^3} \right) \right] \right)^{1/3} \quad (14)$$

- (d) Para calcular o trabalho máximo, notemos que

$$W_{max} = -\Delta E_1 - Q_2, \quad (15)$$

em que a variação da energia do gás no compartimento 1 é dado pela soma da variação da energia térmica com a variação da energia potencial:

$$\Delta E_1 = \Delta U_1 + \Delta \Omega_1. \quad (16)$$

Como a energia térmica de um gás ideal monoatômico é $U = \frac{3}{2}Nk_B T$ e a variação de energia potencial pode ser obtida com auxílio do resultado calculado no item a), temos

$$\Delta E_1 = \frac{3}{2}Nk_B(T_{1f} - T_{1i}) + \Delta \Omega_1 \quad (17)$$

Agora, como $dQ_2 = T_2 dS_2$ e usando a entropia de um gás de fótons dada no enunciado $dS_2 = \frac{16\sigma}{c} V T_2^2 dT_2$, temos:

$$Q_2 = \frac{16\sigma V}{c} \int_{T_{2i}}^{T_{2f}} T^3 dT = \frac{4\sigma V}{c} (T_{2f}^4 - T_{2i}^4) \Rightarrow Q_2 = \frac{4\sigma V}{c} (T_{2f}^4 - T_{2i}^4) \quad (18)$$

em que T_{2f} é dado pela equação (14). Com isso, basta substituímos as expressões obtidas para ΔE_1 e Q_2 em (15) para obtermos W_{max} .

OBS.: a ideia inicial era para $\Delta\Omega_1$ ser calculado diretamente do resultado do item a), mas acabei esquecendo de mencionar no item a) para incluir a presença de uma estrela de massa M_e e raio R_i preenchendo o vazio do interior ($r < R_i$) da casca esférica. Felizmente, no item d) não precisava calcular isso explicitamente. Visto que o enunciado induziu a esse erro, pontuação total foi atribuída a quem considerou a energia gravitacional na conservação de energia mesmo que a expressão utilizada seja a incompleta oriunda do item a). Aqui, vou comentar como poderíamos aproveitar o resultado do item a) para obter a expressão correta de $\Delta\Omega_1$. A energia potencial gravitacional de um sistema gerando um campo $\vec{g}$ pode ser calculada por

$$\Omega = \frac{-1}{8\pi G} \int g^2 dV, \quad (19)$$

em que a integral é feita no espaço inteiro. Sendo $\vec{g}_0$ o campo gerado pela casca esférica sozinha e $\vec{g}_e$ o campo gerado pela estrela sozinha, temos que adicionando a estrela dentro da casca esférica, o campo deste novo sistema será simplesmente a soma $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_e$. Então a energia será

$$\Omega = \frac{-1}{8\pi G} \int g_0^2 dV + \frac{-1}{8\pi G} \int g_e^2 dV + \frac{-1}{8\pi G} \int 2\vec{g}_0 \cdot \vec{g}_e dV = \Omega_0 + \Omega_e - \frac{1}{4\pi G} \int \vec{g}_0 \cdot \vec{g}_e dV. \quad (20)$$

Note que, diferentemente do campo, a energia não satisfaz o princípio da superposição: há um termo de interferência envolvendo $\vec{g}_0 \cdot \vec{g}_e$. Como a variação de R_f não afeta a energia da estrela sozinha, temos que $\Delta\Omega_e = 0$. Por simetria, $\vec{g}_0 \cdot \vec{g}_e = g_0 g_e$ e então

$$\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_0 - \frac{1}{4\pi G} \Delta \left(\int g_0 g_e dV \right), \quad (21)$$

em que o termo $\Delta\Omega_0$ segue diretamente do item a). É interessante notar que para calcular o termo adicional, não precisamos calcular a integral na região $r < R_i$ pois nesta região $g_0 = 0$ (fisicamente isso significa que a distribuição (esfericamente simétrica) de massa da estrela não importa, apenas a massa total).

Grade de Correção

Item a) (1,5 ponto):

+0,5 Usar $d\Omega = -\frac{Gm(r)dm}{r^2}$.

+0,5 Usar $m(r) = \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_i^3)\rho$.

+0,5 Integrar corretamente e obter a expressão final correta (em termos de M , R_i e R_e).

-0,25 Fórmula final correta, mas não está em termos de M , R_i e R_e .

Item b) (1,5 ponto):

+0,5 Usar $\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2$.

+0,2 Usar $U = \frac{3}{2}Nk_B T$ (ou simplesmente $U \propto T$).

+0,3 Expressão de ΔS_1 correta.

+0,2 Expressão de ΔS_2 correta.

+0,3 Expressão final correta.

Item c) (4 pontos):

+3,0 Utilizar a segunda lei da termodinâmica para justificar que o trabalho máximo ocorre quando $\Delta S_{tot} = 0$.

-2,0 Usar a condição de reversibilidade $\Delta S_{tot} = 0$ mas sem justificativa detalhada ou com justificativa incorreta.

+1,0 Fórmula correta para T_{2f} .

Item d) (3 pontos):

+1,0 Mencionar e explicar $W_{max} = -\Delta E_1 - Q_2$ com base na 1ª lei da termodinâmica.

+1,0 Mencionar e explicar $\Delta E_1 = \Delta U_1 + \Delta \Omega_1$.

+1,0 Explicar como calcular Q_2 .

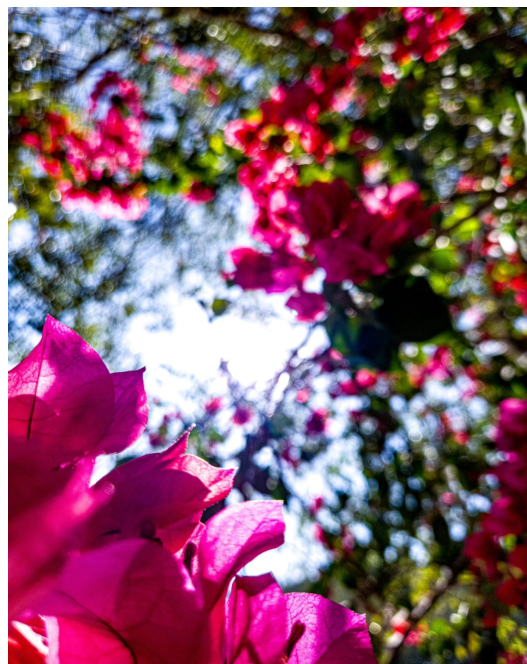
-1,5 Explicou os três itens acima mas muito vagamente.

4. He takEs Images of Telescopes Or... floweRs? (10 pontos)

Treinando para se tornar um astrofotógrafo, Heitor tem registrado imagens de diversos temas, com destaque para paisagens e fenômenos astronômicos. A seguir, são apresentadas duas fotografias capturadas por ele: uma do eclipse lunar ocorrido em 14 de março de 2025, e outra de uma paisagem com flores e árvores. (No arquivo enviado juntamente com esta lista, essas mesmas imagens estão disponíveis em maior resolução e com tamanhos iguais).

A imagem à esquerda foi registrada com um telescópio kepleriano de distância focal 127 mm, utilizando uma ocular de 25 mm de distância focal. Considere que o objeto captado pela lente do celular é o mesmo que formaria a imagem vista em um CCD acoplado ao telescópio. Já a imagem à direita foi feita com o mesmo celular, porém sem o uso de lentes adicionais. Admita que todos os dispositivos ópticos envolvidos funcionam como lentes finas ideais.

- (4 pontos)** Determine o diâmetro real do Mar da Fecundidade e o diâmetro da lente da câmera do celular.
- (2 pontos)** Calcule a distância focal da lente da câmera do celular e a distância entre essa lente e o sensor da câmera. Sabendo que sua razão focal é $f/20$.
- (4 pontos)** Agora, trocou-se a ocular por uma de 15 mm, a câmera do celular foi afastada da ocular, de modo que a nova distância entre elas corresponde ao comprimento do tubo do telescópio e o tubo do telescópio não foi alter. Determine a distância focal de uma lente equivalente ao sistema óptico resultante, bem como a posição dessa lente equivalente em relação à objetiva do telescópio.



Solução:

- (a) Como a câmera do celular está focalizada para a lua e, conseqüentemente, o Mar da Fecundidade, isso quer dizer que a imagem dela formada pela lente da câmera está localizada sobre o sensor da câmera. Portanto, pode-se relacionar o tamanho na foto com o tamanho real, que seria a separação física da Lua no telescópio, a partir da expressão para o aumento de uma lente:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{\delta_L}{s_L} = \frac{\delta_L}{f_{obj}\theta_0}$$

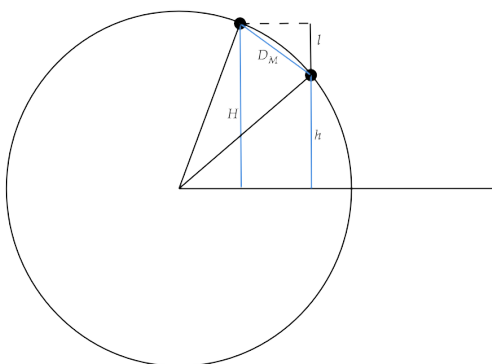
Onde δ_L é o tamanho da Lua na imagem. Que igualando com a expressão para o mar fica:

$$\frac{\delta_L}{f_{obj}\theta_{0,L}} = \frac{\delta_M}{f_{obj}\theta_{0,M}}$$

$$\frac{\delta_L}{D_L} = \frac{\delta_M}{l}$$

$$l \approx 4,96 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Em que esse l seria a diferença de altura entre o ponto mais afastado e o ponto mais próximo ao equador da lua que pertencem ao Mar da Fecundidade. Como representado na imagem a seguir:



Para encontrar o diâmetro desse mar, também é necessário medir a distância de cada um desses pontos ao centro da lua, o diâmetro que é perpendicular a linha que liga o ponto mais baixo e mais alto medidos anteriormente. Desse modo, encontra-se as alturas:

$$H = 1,05 \cdot 10^6 \text{ m}$$

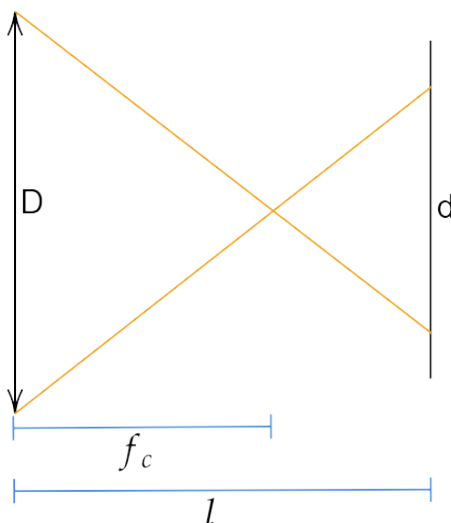
$$h = 1,48 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Pela geometria dessa situação temos que o diâmetro do mar é:

$$D_M^2 = l^2 + \left(\sqrt{R_L^2 - h^2} - \sqrt{R_L^2 - H^2} \right)^2$$

$$D_M \approx 6,85 \cdot 10^5 \text{ m}$$

Agora, para encontrar o diâmetro da lente da câmera do celular, primeiro deve-se notar a existência de vários círculos luminosos mais presentes na parte direita da imagem com tamanhos regulares e bem definido. Esse padrão deriva de fontes luminosas no infinito, que se relacionam com o diâmetro da lente a partir do seguinte esquema:



Onde d é o diâmetro dos pontos luminosos e D é o diâmetro da lente. A partir desse esquema, pode-se tirar a semelhança de triângulos:

$$\frac{D}{f_c} = \frac{d}{l - f_c}$$

Para encontrar a expressão $l - f$, pode-se utilizar a equação dos pontos conjugados com a imagem da Lua e a expressão para o aumento da câmera:

$$\frac{1}{f_{ocu}} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f_c}$$

$$\frac{1}{f_{ocu}} = \frac{1}{f_c} - \frac{1}{l}$$

$$\frac{\delta_L}{ls_L} = \frac{1}{f_c} - \frac{1}{l}$$

$$l - f_c = \frac{\delta_L}{s_L} f_c$$

Substituindo esse resultado na expressão anterior:

$$D = \frac{d}{\delta_L} s_L$$

$$D = \frac{d}{\delta_L} \frac{D_L}{d_L} f_{obj}$$

$$D \approx 0,07 \text{ mm}$$

- (b) Para encontrar a distância focal da lente, deve-se utilizar a razão focal com o diâmetro encontrado anteriormente:

$$R = \frac{f_C}{D}$$

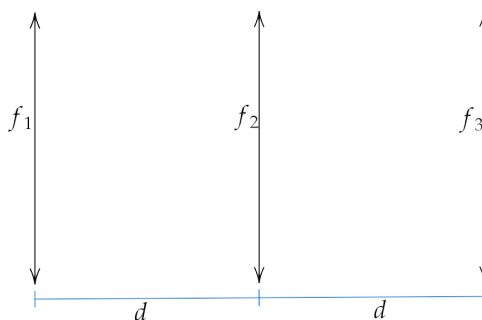
$$f_C \approx 1,4 \text{ mm}$$

Então, para achar a distância entre a lente e o sensor da câmera, pode-se utilizar a equação dos pontos conjugados para a lua:

$$\frac{1}{f_{ocu}} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f_c}$$

$$l \approx 1,48 \text{ mm}$$

- (c) Então, o novo sistema ótico pode ser representado pelo seguinte esquema:



Para encontrar a posição da lente equivalente e sua distância focal, podemos utilizar dois raios luminosos, um que vem do infinito e passa por nosso sistema e outro que sai pro infinito, pois o ponto de contato desses raios com o eixo principal é a posição de cada foco do nosso sistema equivalente. Portanto, aplicando a equação dos pontos conjugados para o raio que vem do infinito na segunda lente, sabendo que o comprimento do tubo é $d = f_{obj} + f_{ocu,1} = 152 \text{ mm}$:

$$\frac{1}{d - f_{obj}} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f_{ocu}}$$

$$d_1 = \frac{f_{ocu}(d - f_{obj})}{d - f_{obj} - f_{ocu}} \approx 37,5 \text{ mm}$$

Agora, utilizando essa imagem como objeto para a terceira lente:

$$\frac{1}{d - d_1} + \frac{1}{d_{f,1}} = \frac{1}{f_c}$$

$$d_{f,1} = \frac{f_c(d - d_1)}{d - d_1 - f_c} \approx 1,42 \text{ mm}$$

Então, realizando o mesmo processo para o raio que sai paralelo ao sistema:

$$\frac{1}{d_{f,2}} + \frac{1}{d_{i,1}} = \frac{1}{f_{obj}}$$

$$d_{i,1} = \frac{f_{obj}d_{f,2}}{d_{f,2} - f_{obj}}$$

Como essa imagem será utilizada como objeto para a segunda lente:

$$\frac{1}{d_{i,1}} + \frac{1}{d_{i,2}} = \frac{1}{f_{ocu}}$$

$$d_{i,2} = \frac{f_{ocu}d_{i,1}}{d_{i,1} - f_{ocu}}$$

$$d_{i,2} = \frac{f_{ocu}f_{obj}d_{f,2}}{(f_{obj} - f_{ocu})d_{f,2} + f_{obj}f_{ocu}}$$

Por fim, essa imagem será o objeto para a última lente, que terá a imagem formada no infinito:

$$\frac{1}{d - d_{i,2}} = \frac{1}{f_c}$$

$$f_c = d - \frac{f_{ocu} f_{obj} d_{f,2}}{(f_{obj} - f_{ocu}) d_{f,2} + f_{obj} f_{ocu}}$$

$$d_{f,2} = \frac{f_{obj} f_{ocu} (d - f_c)}{f_{ocu} f_{obj} - (d - f_c)(f_{obj} - f_{ocu})} \approx -19,17 \text{ mm}$$

O sinal negativo indica que o foco está após a primeira lente, em vez de ser antes dela. Com a posição de ambos os focos, podemos encontrar sua distância focal e posição, pois a distância focal será metade da distância entre os focos, e a posição será no ponto médio entre os focos.

$$f_{eq} = \frac{d_{f,2} + 2d + d_{f,1}}{2}$$

$$f_{eq} \approx 143,13 \text{ mm}$$

$$x_l = \frac{2d + d_{f,1} - d_{f,2}}{2}$$

$$x_l \approx 162,30 \text{ mm}$$

Grade de Correção

Item a) (4 ponto):

- + 0,5 Expressão para o aumento de uma lente
- + 0,5 Expressão para a altura do objeto
- + 0,5 Encontrar a expressão para o diâmetro do Mar da Fecundidade
- + 1 Perceber que os pontos luminosos são formados por fontes do infinito
- + 0,5 Expressão que relaciona o diâmetro do ponto luminoso e o diâmetro da lente
- + 0,5 Expressão para o diâmetro da lente
- + 0,5 Valor numérico

Item b) (2 pontos):

- + 0,5 Expressão para a distância focal do celular
- + 0,5 Expressão para a distância entre a lente e o sensor da câmera
- + 1 Valor numérico

Item c) (4 pontos):

- + 0,5 Comprimento do tubo do telescópio
- + 0,5 Ponto focal de raio vindo do infinito pela esquerda
- + 0,5 Ponto focal de raio vindo do infinito pela direita
- + 0,5 Expressão para o foco equivalente
- + 0,5 Perceber que a posição da lente equivalente é no ponto médio entre os pontos focais
- + 0,5 Expressão para a posição da lente equivalente
- + 1 Valor numérico (necessário justificativa da possibilidade de se utilizar regra de 3)

- 5. As Estrelas do Maui (20 pontos)** Maui se cansou de se transformar em vários animais usando seu anzol depois de milênios protegendo os povos da Oceania. Repentinamente, ele decidiu se tornar um astrônomo em Harvard University enquanto a humanidade não precisa da sua ajuda para não se destruir. No momento, está fazendo seu pós-pós-pós-doutorado, onde tem explorado sua paixão por sistemas binários.

Nas últimas décadas, Maui ficou fascinado pelo sistema edge-on HLu-Ug-CoAS-1232, fazendo diversas medições para entender a dinâmica e o futuro de suas estrelas: a anã branca pLO-28 e a jovem LRSA-29, que está na sequência principal, mas é estranhamente quente. HLu-Ug-CoAS-1232 tem período orbital $P = 25,08$ anos e as estrelas têm órbitas de excentricidade $e = 0,83$.

Nesta questão, considere:

- O modelo atômico de Dalton é verdadeiro;
- LRSA-29 é praticamente feita apenas de hidrogênio;
- A velocidade angular de LRSA-29 em torno de seu eixo é muito pequena para ser considerada de qualquer forma.

Parte A - Entendendo o Presente

- (a) **(3 pontos)** Maui fez uma tabela com a velocidade radial de pLO-28 e LRSA-29 em alguns momentos, além do tempo medido a partir do momento em que pLO-28 estava em seu apoastro em anos terrestres. Veja um segmento da tabela:

$v_{r,p}$ (m/s)	$v_{r,L}$ (m/s)	t (anos)
-8.921	4.110	12,40
-10.893	4.556	12,44
-13.167	5.391	12,49
-17.200	6.103	12,52
-13.037	5.112	12,60

Encontre a razão entre as massas $k = \frac{M_p}{M_L}$.

- (b) **(3 pontos)** Determine os semieixos das órbitas das estrelas em unidades astronômicas, bem como suas massas individuais em massas solares. Em outras palavras, determine a_p , a_L , M_p , e M_L .

Parte B - Entendendo o Futuro

O grande objetivo da tese de doutorado de Maui é prever por quanto tempo o sistema HLu-Ug-CoAS-1232 durará. Maui percebeu, após alguns anos, que a massa de LSAR-29 parece estar diminuindo, não apenas por conta da sua luminosidade. LSAR-29 está ejetando massa, sendo que 46% da massa ejetada por LSAR-29 é capturada por pLO-28. Usando instrumentação do Smithsonian Astrophysical Observatory, em Cambridge, Massachusetts, Maui traçou o gráfico da radiancia espectral de LSAR-29, encontrando o pico no comprimento de onda $\lambda = 14,58$ nm.

- (c) **(2 pontos)** Maui está considerando, como boas aproximações para LSAR-29:

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{P}{R}$$

$$\frac{dT}{dr} \approx -\frac{T}{R}$$

Prove que, então, a densidade da estrela é aproximadamente uniforme.

- (d) **(2 pontos)** Encontre o raio R de LSAR-29 em raios solares.
- (e) **(2 pontos)** Determine a mínima luminosidade que LSAR-29 deve ter para que as camadas mais externas sejam ejetadas.
- (f) **(3 pontos)** Determine o fluxo F na superfície de LSAR-29 e também a perda de massa por ano $\dot{M}_L$ neste momento. Maui está considerando algumas pequenas coisas:
- A mudança de raio de LRSA-29 é desprezível em um ano.
 - A massa é dita ejetada apenas quando recebe energia suficiente para se locomover ao infinito, caso não houvesse influência gravitacional de outros corpos. Apenas a camada mais externa, por estar em contato com o quase-vácuo, recebe trabalho não nulo

- A camada mais externa tem refletividade nula e transmissividade $\tau = 0,9999999999$ igual para todos os comprimentos de onda.
- (g) **(5 pontos)** Considerando que $T(r)$ não varia com o tempo, diga em quanto tempo LSAR-29 será completamente desintegrada. Em seguida, justifique o porquê do modelo de Maui ser (ou não ser) aceitável.

Solução:

- (a) Perceba que a máxima velocidade radial (em módulo) tanto de pLO-28 e LRSA-29 ocorre quando $t \approx \frac{p}{2}$. Daí, fica claro que a linha de visada está paralela aos semieixos menores de cada uma das órbitas. Com isso, quando $t \approx \frac{p}{2}$, $|v_{r,p}| \approx |v_p|$ e $|v_{r,L}| \approx |v_L|$.

Para continuarmos o raciocínio neste item, seria necessário termos a velocidade do centro de massa, que não foi fornecida. O jeito mais sagaz de estimar uma velocidade para o centro de massa é perceber que o intervalo de tempo da tabela é bem pequeno. Daí, pode-se aproximar a velocidade radial como sendo total neste intervalo **apenas** para fins de estimativa da velocidade do centro de massa. Veja:

$$\begin{aligned}(M_p + M_L)v_{CM} &= M_p v_p + M_L v_L \\ v_p &= -\frac{M_L}{M_p} v_L + \left(1 + \frac{M_L}{M_p}\right) v_{CM} \\ v_p &= -\alpha v_L + \beta\end{aligned}$$

Fazendo regressão linear, encontramos $r = -0,988$, $\alpha = -3,974$ e $\beta = 7.442$. Logo, $v_{CM} = 1.496$ m/s. Porém, perceba que é mais preciso utilizar a ideia da disposição espacial da órbita para encontrar k ao invés de utilizar $k \approx \frac{1}{\alpha} = 0,252$. Então, quando $t \approx \frac{p}{2}$:

$$\begin{aligned}M_p v_{CM,p} &= -M_L v_{CM,L} \\ k &= -\frac{v_{r,L} - v_{CM}}{v_{r,p} - v_{CM}} \\ \boxed{k \approx 0,246}\end{aligned}$$

- (b) Vamos por partes:

- i) Primeiramente, utilizemos o período para encontrar algo útil. Lembre-se que $M_p a_p = M_L a_L$:

$$\begin{aligned}P^2 &= \frac{4\pi^2}{G(M_p + M_L)} (a_p + a_L)^3 \\ P^2 &= \frac{4\pi^2}{GM_p(1 + \frac{1}{k})} a_p^3 (1 + k)^3 \\ \frac{a_p^3}{M_p} &= \frac{P^2 G (1 + \frac{1}{k})}{4\pi^2 (1 + k)^3}\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\frac{a_L^3}{M_L} = \frac{P^2 G (1 + k)}{4\pi^2 (1 + \frac{1}{k})^3}$$

Daí, temos imediatamente que:

$$\frac{a_p^3}{M_p} \approx 2.769.003 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\frac{a_L^3}{M_L} \approx 10.140 \text{ m}^3/\text{kg}$$

- ii) Agora, lidemos com a órbita relativa do sistema HLu-Ug-CoAS-1232. Para começar, calculemos a o módulo da velocidade da massa reduzida em seu periastro:

$$v = |v_L - v_p|$$

$$v = 23.303 \text{ m/s}$$

Sabendo disso, este item está perto do fim. Usando a expressão para a energia mecânica da órbita relativa, podemos demonstrar a famosa equação vis-visa. Seja $M = M_p + M_L$:

$$v^2 = MG \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$v^2 = \frac{(M_p + M_L)G}{a_p + a_L} \left(\frac{2}{1 - e} - 1 \right)$$

$$v^2 = \frac{GM_p(1 + \frac{1}{k})}{a_p(1 + k)} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

$$\frac{a_p}{M_p} = \frac{G(1 + \frac{1}{k})}{v^2(1 + k)} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

Analogamente:

$$\frac{a_L}{M_L} = \frac{G(1 + k)}{v^2(1 + \frac{1}{k})} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

Com isso, fica claro que:

$$\frac{M_p}{a_p} = 1,859 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}$$

$$\frac{M_L}{a_L} = 3,073 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}$$

- iii) Perceba, então:

$$\frac{a_p^3}{M_p} \cdot \frac{M_p}{a_p} = a_p^2$$

$$a_p = 7,175 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Analogamente:

$$\frac{a_L^3}{M_L} \cdot \frac{M_L}{a_L} = a_L^2$$

$$a_L = 1,765 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Portanto:

$$M_p = 1,334 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

$$M_L = 5,423 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

Com isso, nas unidades requeridas:

$$a_p = 4,796 \text{ UA}$$

$$a_L = 1,180 \text{ UA}$$

$$M_p = 0,067 M_{\text{Sol}}$$

$$M_L = 0,273 M_{\text{Sol}}$$

- (c) Em um ponto qualquer da estrela, a densidade é $\rho = \frac{\mu P}{R'T}$, em que $\mu = 1 \text{ g/mol}$ é a massa molar do hidrogênio e $R' = 8,31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ é a constante dos gases ideais. Derivando essa expressão em relação a r , usando a regra do produto e a regra da cadeia:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\mu}{R'} \left(\frac{dP}{Tdr} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dr} \right)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\mu}{R'} \left(-\frac{P}{TR} + \frac{P}{T^2} \frac{T}{R} \right)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = 0$$

- (d) Primeiramente, achemos a temperatura da superfície usando a Lei de Wien:

$$\lambda_{\max} T = b$$

$$T_s = 199.000 \text{ K}$$

Estando LSAR-29 em equilíbrio hidrostático e usando a expressão conhecida $\rho = \frac{\mu P}{R'T}$, além de $r = R$:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\frac{P}{R}$$

$$\rho \frac{GM_L}{R^2} = \frac{R'T_s \rho}{\mu R}$$

$$R = \frac{\mu GM_L}{R'T_s}$$

$$R = 2,189 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$R \approx 31,43 R_{\text{Sol}}$$

- (e) No caso-limite em que as camadas mais externas são quase ejetadas, a estrela assume a famosa Luminosidade de Eddington, em que a força devido à pressão de radiação em cada átomo se iguala à força gravitacional sentida por ele. Seja $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ a Constante de Avogrado, r_H , m_H e μ o raio, massa do átomo de hidrogênio e massa molar do hidrogênio. Considerando a absorção total de fótons por parte dos átomos de hidrogênio da camada mais externa, temos: $r_H = 37 \text{ pm}$

$$\frac{\pi r_H^2 F}{c} = \frac{GM_L m_H}{R^2}$$

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \frac{GM_L m_H c}{\pi r_H^2 R^2}$$

$$L = \frac{4GM_L \mu c}{N_A r_H^2}$$

$$L = 5,265 \cdot 10^{22} \text{ W}$$

- (f) De maneira simples, uma vez que a transmissividade da camada mais externa é igual para todos os comprimentos de onda, λ_{max} não foi alterado. Com isso, para calcular o fluxo total de forma simples:

$$F = \sigma T_s^4$$

$$F = 8,892 \cdot 10^{13} \text{ W/m}^2$$

No caso em que R permanece constante, assim como T , a luminosidade L de LSAR-29 também é constante. Primeiramente, calculemos L :

$$L = 4\pi R^2 F$$

$$L = 5,354 \cdot 10^{35} \text{ W}$$

Perceba que L é a luminosidade observada por Maui e a luminosidade real da estrela seria $L_{real} = \frac{\dot{L}}{\tau}$. Porém, $\tau \approx 1$ é uma ótima aproximação neste caso. Podemos ainda calcular o número de átomos de hidrogênio ejetados em um ano n como sendo a quantidade de energia absorvida sobre a quantidade de energia necessária para levar um átomo de hidrogênio ao infinito:

$$n \frac{GM_L m_H}{R} = L(1 - \tau) \Delta t$$

$$\frac{nm_H}{\Delta t} = \frac{LR(1 - \tau)}{GM_L}$$

$$\dot{M}_{L1} = -\frac{nm_H}{\Delta t} = -1,021 \cdot 10^{24} \text{ kg/ano}$$

Perceba também que é necessário considerar a perda de massa devido à famosa equação de Einstein:

$$E = M_L c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -c^2 \dot{M}_{L2}$$

$$\dot{M}_{L2} = -\frac{L}{c^2}$$

$$\dot{M}_{L2} = -1,879 \cdot 10^{26} \text{ kg/ano}$$

Somando, temos a perda de massa por ano:

$$\dot{M}_L = -1,890 \cdot 10^{26} \text{ kg/ano}$$

- (g) Relembre que:

$$\frac{dT}{dr} \approx -\frac{T}{R}$$

$$T = T_c e^{-\frac{r}{R}}$$

Perceba, então, que $T_s = \frac{T_c}{e}$. Então:

$$T = T_s e^{1 - \frac{r}{R}}$$

Dáí, temos a luminosidade de LSAR-29 em função do raio r em determinado instante:

$$L(r) = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

$$L(r) = 4\pi r^2 \sigma T_s^4 e^{4 - \frac{4r}{R}}$$

Além disso, sabendo que a densidade de massa da estrela é uniforme, podemos estimar a o número de átomos de hidrogênio perdidos a cada camada de espessura infinitesimal que é ejetada. Seja $N = \frac{M_L}{m_H}$ o número inicial de átomos de hidrogênio na estrela:

$$\frac{dn}{4\pi r^2 dr} = \frac{N}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$\frac{dn}{N} = - \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$dn = - \frac{3r^2 dr}{R^3} N$$

Além disso, utilizando o mesmo argumento de densidade uniforme e $m_L(r)$ como a massa de LSAR-29 quando ela tem raio r :

$$m_L = \frac{r^3}{R^3} M_L$$

$$dm_L = \frac{3r^2 dr}{R^3} M_L$$

Com a mesma condição do item anterior para uma camada qualquer:

$$- \frac{Gm_L m_H}{r} dn = L(r) dt (1 - \tau)$$

Perceba que $\dot{m}_{L1} = m_H \frac{dn}{dt} = \frac{dm_{L1}}{dt}$ e o sinal negativo vem do fato de que $dn < 0$ sempre.

$$- \frac{dm_L}{dt} = \frac{L(r)(1 - \tau)r}{Gm_L} + \frac{L(r)}{c^2}$$

$$- \frac{dm_L}{dt} \cdot \frac{dr}{dm_L} = \left(\frac{L(r)(1 - \tau)r}{G \frac{r^3}{R^3} M_L} + \frac{L(r)}{c^2} \right) \frac{R^3}{3r^2 M_L}$$

$$- \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi \sigma T_s^4 e^{4 - \frac{4r}{R}} R^3}{3M_L} \left(\frac{(1 - \tau)R^3}{Gr^2 M_L} + \frac{1}{c^2} \right)$$

$$- \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi \sigma T_s^4 e^{4 - \frac{4r}{R}} R^3}{3M_L} \cdot \frac{(1 - \tau)R^3 c^2 + Gr^2 M_L}{Gr^2 M_L c^2}$$

$$\int_0^t dt = \frac{3GM_L^2 c^2}{4\pi \sigma T_s^4 e^4 R^3} \int_0^R \frac{e^{4 \frac{r}{R}} r^2}{(1 - \tau)R^3 c^2 + Gr^2 M_L} dr$$

Daí, chegamos a:

$$t = \frac{3GM_L^2 c^2}{4\pi\sigma T_s^4 e^4 R^3} \int_0^R \frac{e^{4\frac{r}{R}} r^2}{(1-\tau)R^3 c^2 + Gr^2 M_L} dr$$

Substituindo a constante em frente à integral, que vale $8,270 \cdot 10^{18}$ m/s, e a própria integral, que vale $7,938 \cdot 10^{-9}$ s²/m, chegamos ao tempo:

$$t \approx 2.081 \text{ anos}$$

Um tempo de apenas 1.981 anos é absurdo, visto que o Sol tem bilhões de anos pela frente segundo nossa previsão atual. Por isso, o modelo de Maui parece ter aproximações demais. Um dos principais absurdos, se não o principal, é a pressão de radiação no interior da estrela ter sido desprezada ao usarmos a equação comum de equilíbrio hidrostático $\left(\frac{dP}{dr} = \rho g\right)$, já que ela é extremamente quente.

6. Anãs Brancas Passando dos Limites! (20 pontos) De acordo com as melhores previsões até o momento, ao fim de sua fase de gigante vermelha, o Sol irá colapsar em uma anã branca imersa em uma nebulosa planetária. Essas estrelas representam a última fronteira impedindo o núcleo de um corpo celeste de se tornar um objeto compacto, apresentando densidades imensas chegando a saturar os níveis de energia disponíveis para os elétrons do plasma o que da origem a prevalência de um efeito denominado pressão degenerada. Nesse problema, estudaremos como este e outros efeitos decorrem do princípio de exclusão de Pauli, e sua relação com a estabilidade da estrela através da estimativa do limite de massa de Chandrasekhar.

Tornando o linguajar mais preciso, vamos considerar a termodinâmica da estrela como um gás ideal de elétrons livres (i.e. a energia é função somente do momento). Chamamos de densidade de estados, o número de configurações por unidade de volume disponíveis para um único elétron com certo momento: p , sendo denotado por $g(p)$. Ademais, chamamos de fator de ocupação a probabilidade de um elétron possuir energia: ϵ , sendo por isso denotado por $f(\epsilon)$. A densidade (numérica) de elétrons com energia ϵ é desse modo dada pelo produto entre a densidade de estados, e a probabilidade de estar em cada estado: $n(\epsilon) = g(p)f(\epsilon)$. Devido ao princípio de exclusão de Pauli, o fator de ocupação é dado por:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{-\alpha+\epsilon/k_B T} + 1},$$

onde $\alpha \geq 0$ é chamado de fator de degenerescência e é geralmente função da temperatura $\alpha = \alpha(T)$.

- (a) **(2 pontos)** No limite de $k_B T \ll \epsilon$ (gás degenerado), definimos a grandeza $\epsilon_F = \alpha k_B T$ (energia de Fermi). Com isso, esboce o gráfico de do fator de ocupação como função da energia. Seu eixo de abcissas deve conter o valor ϵ_F .

A partir de agora, vamos considerar o limite ultrarrelativístico, onde a energia do elétron é dada por $\epsilon \approx cp$.

Ademais, utilize que para elétrons livres, a densidade de estados é dada por:

$$g(p) = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2$$

- (b) **(3 pontos)** Mostre que no limite de $T \approx 0$, a densidade total de elétrons n_e é dada por:

$$n_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_F}{hc}\right)^3$$

Dica: Integre $n(\epsilon)$, assumindo que $f(\epsilon)$ é constante para $\epsilon < \epsilon_F$ e 0 para $\epsilon > \epsilon_F$.

- (c) **(3 pontos)** A pressão de um gás ideal ultrarrelativístico pode ser obtida através de considerações cinéticas pela fórmula:

$$P = \frac{c}{3} \int_0^\infty p n(p) dp$$

Mostre que esse gás de elétrons é politropo, isto é, que $P = K n_e^{1+\frac{1}{\beta}}$, e encontre os valores das constantes K e β .

Compare o resultado com o gás ideal, onde $K = k_B T$ e $\beta = 0$, e discuta os diferentes comportamentos da pressão quando $T \rightarrow 0$.

- (d) **(3,5 pontos)** Determine agora, na mesma aproximação degenerada, mostre que a densidade de energia dos elétrons nesse gás é dada por:

$$u = \frac{3ch}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

- (e) **(2,5 pontos)** Com isso, você seria capaz de escrever as equações de continuidade e equilíbrio hidrostático e resolver a equação diferencial de Lane-Emden para determinar a equação de estado da estrela. Porém vamos tomar um caminho simplificado :) . Assuma que a estrela é homogênea, e encontre sua energia potencial gravitacional: U_G (auto-energia) em função de sua massa M e raio R .

- (f) **(3,5 pontos)** Considere que a composição atômica da estrela possua número médio de núcleons por elétron igual a $\mu_e \approx 2$ (i.e. $\mu_e = \text{prótons} + \text{nêutrons} / \text{elétrons}$), com sua massa dominada por estes núcleons com massa m_p igual à massa do próton.

Desse modo, sendo U sua energia interna (térmica), podemos equacionar a energia da estrela $U_{tot} = U + U_G$, como função da massa M e do raio R . A estrela é dita em equilíbrio estático sua energia total é mínima, nesse caso, encontre o raio da anã branca em equilíbrio.

- (g) **(2,5 pontos)** Estrelas acima do limite de Chandrasekhar ($M > M_{Ch}$) não possuem um mínimo de energia, e por isso seu raio é comprimido a $R \rightarrow 0$. Encontre a massa crítica M_{Ch} para isso acontecer.

A título de curiosidade, esse valor está apenas $\sim 20\%$ fora daquele encontrado por Chandrasekhar de $M_{Ch} = 1.4M_\odot$.

Solução:

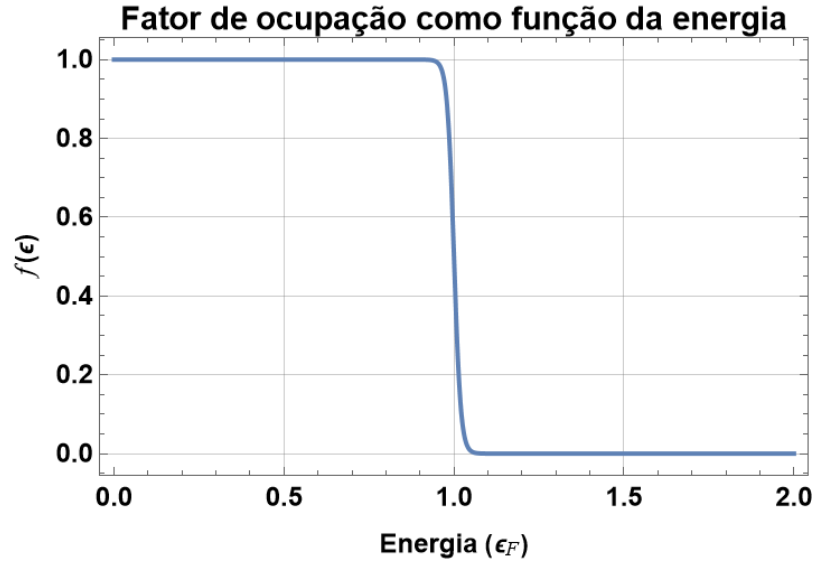


Figura 2: Fator de ocupação em função da energia. Foi tomado $k_B T = 0.01 \epsilon_F$

(a)

(b) Como observamos pelo gráfico, o fator de ocupação se comporta como um limite da integral, fazendo com que a partir de ϵ_F , esta seja 0 no limite $T \rightarrow 0$. Ademais, tomando $\epsilon \approx cp$, temos para a densidade total de elétrons:

$$n_e = \int_0^\infty n(p) dp = \int_0^\infty g(p) f(cp) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{\epsilon_F/c} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} \left(\frac{\epsilon_F}{c} \right)^3$$

$$\therefore \boxed{n_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_F}{hc} \right)^3}$$

(c) De maneira similar, a pressão pode ser calculada truncando a integral em ϵ_F :

$$P = \frac{c}{3} \int_0^\infty p n(p) dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{\epsilon_F/c} p^3 dp = \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{\epsilon_F}{c} \right)^4$$

Substituindo do resultado anterior: $(\epsilon_F/c)^3 = 3h^3 n_e / 8\pi$, temos:

$$P = \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi} \right)^{4/3} = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \frac{hc}{8} n_e^{4/3}$$

Ou seja $K = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \frac{hc}{8}$ e $\beta = 1/3$. Assim, diferente do gás ideal, o gás de Fermi exibe pressão à temperatura nula, pois K não vai a 0 com T . Isso representa a pressão degenerada do gás de elétrons.

(d) A energia pode ser calculada analogamente:

$$u = \int_0^\infty \epsilon n(p) dp = c \int_0^\infty p n(p) dp = 3P = \frac{3ch}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

- (e) A auto-energia da estrela pode ser calculada somando sobre a energia potencial de cada casca esférica, considerando em acordo com a Lei de Gauss, apenas a contribuição da massa interna ao campo gravitacional:

$$U_G = \int_0^R V(r)(4\pi\rho r^2 dr) = -\frac{(4\pi)^2}{3}G\rho^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{(4\pi)^2 G R^5}{3 \cdot 5} = -\frac{3GM^2}{5R}$$

- (f) Equacionando $M = \frac{4\pi}{3}R^3\mu_e m_p n_e$, temos que a energia total é dada por:

$$U_{tot} = \frac{4\pi R^3}{3}u - \frac{3GM^2}{5R} = \frac{\pi R^3 ch}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{3M}{4\pi R^3 m_p \mu_e}\right)^{4/3} - \frac{3GM^2}{5R}$$

$$U_{tot} = \left(\frac{3h^3}{8\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{8}\right)^{4/3} \frac{c(M/m_p)^{4/3}}{R} - \frac{3GM^2}{5R}$$

A esse ponto, notamos que a expressão não possui mínimo de energia, sendo resultado da aproximação ultrarrelativística de ordem 0 ter resultado em uma energia inversamente proporcional ao raio. Como fisicamente, o aumento do raio diminui a densidade, que por sua vez diminui a energia por elétron, eventualmente essa aproximação falha, e temos que tomar a primeira ordem:

$$\epsilon = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \approx cp + \frac{m^2 c^3}{2p}$$

Isso atualiza o resultado da densidade de energia para:

$$u = \frac{8\pi c}{h^3} \int_0^{\epsilon_F/c} \left(p + \frac{m^2 c^4}{2p}\right) p^2 dp = \frac{8\pi c}{h^3} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon_F}{c}\right)^4 + \frac{m^2 c^4}{4} \left(\frac{\epsilon_F}{c}\right)^2 \right]$$

$$U = \frac{32\pi^2 c}{3h^3} R^3 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{9(M/m_p)}{8^2 \pi^2}\right)^{4/3} \frac{h^4}{R^4} + \frac{m^2 c^4}{4} \left(\frac{9(M/m_p)}{8^2 \pi^2}\right)^{2/3} \frac{h^2}{R^2} \right]$$

$$= \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{8}\right)^{4/3} (M/m_p)^{4/3} \frac{hc}{R} + m^2 c^4 \left(\frac{3\pi^2}{8}\right)^{1/3} (M/m_p)^{2/3} \frac{Rc}{h}$$

Assim, a energia é da forma: $U = A/R + BR - C/R$, e será minimizada quando: $-A/R^2 + B + C/R^2 = 0$, ou $R = \sqrt{(A - C)/B}$. Explicitamente:

$$R = \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{8}\right)^{4/3} (M/m_p)^{4/3} hc - \frac{3G}{5} M^2}{m^2 c^4 \left(\frac{3\pi^2}{8}\right)^{1/3} (M/m_p)^{2/3} c/h}}$$

- (g) O limite é estabelecido quando $R = 0$, ou equivalentemente, quando $A = B$, isso leva a:

$$\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{8}\right)^{4/3} (M/m_p)^{4/3} hc = \frac{3GM^2}{5}$$

$$\Rightarrow M^{2/3} = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{8}\right)^{4/3} \frac{hc}{G} \frac{1}{m_p^{4/3}}$$

$$M = \frac{15\sqrt{10}}{256\pi} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_p^2} = 1,7 M_\odot$$