

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente **individual**.

Prazo: 03/05/2025 23h59min

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	−12,74 mag	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	−26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ^{−1}	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ^{−2}	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ^{−1} · K ^{−1}	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ^{−1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ^{−2} · K ^{−4}	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ^{−1} · Mpc ^{−1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. Relatividade um pouco mais geral... (10 pontos)

Gurjinho, após se formar em Engenharia Aeroespacial, decidiu criar um foguete para sair do sistema solar. Seu objetivo era chegar à estrela M1ch3l-W1LL14Ms, que distava D da Terra. Sabe-se que Gurjinho move-se em linha reta e com aceleração constante a , medida em seu referencial. Com base nisso, determine o tempo T que Gurjinho levará para alcançar M1ch3l-W1LL14Ms, conforme medido por um relógio dentro de seu foguete. Assuma que Gurjinho se move em velocidades relativísticas.

Solução:

Método 1:

Sabemos que a força longitudinal é uma invariante relativística, sendo assim:

$$F' = F = ma$$

ou seja:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\gamma mv)}{dt} = ma$$

integrando e manipulando algebricamente, obtemos que:

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2}}$$

Utilizando a transformação de tempo:

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} = \frac{dt}{\sqrt{1 + (at)^2}}$$

integrando, obtemos:

$$T = \frac{c}{a} \sinh^{-1}(at)$$

calculando a distância:

$$D = \int_0^t \frac{atdt}{\sqrt{1 + (at)^2}}$$

ou seja:

$$D = \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + (at)^2} - 1 \right)$$

Manipulando algebricamente, obtemos que:

$$D = \frac{1}{a} (\cosh(aT) - 1)$$

De onde é possível mostrar que:

$$T = \frac{c}{a} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{aD}{c^2} \right)$$

Método 2:

Pela transformação de aceleração, sabemos que no referencial do laboratório:

$$a_L = \frac{a}{\gamma^3}$$

Já pela transformação de tempo, sabemos que:

$$dt' = \frac{dt}{\gamma}$$

ou seja:

$$T = \int_0^{v_f} \frac{dv}{\gamma a_L}$$

Substituindo o valor de a_L e manipulando:

$$T = \int_0^{v_f} \frac{dv}{1 - v^2}$$

logo:

$$T = \frac{c}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{v_f}{c} \right)$$

onde v_f pode ser obtido por:

$$D = \int v dt = \int_0^{v_f} \frac{v dv}{a_L} = \frac{1}{a} \int_0^{v_f} \frac{v dv}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

ou seja:

$$D = \frac{c^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_f^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Por fim, obtemos por manipulação algébrica que:

$$T = \frac{c}{a} \cosh^{-1} \left(1 + \frac{aD}{c^2} \right)$$

Respostas sem dedução não serão aceitas.

2. Medindo o Universo em Expansão (10 pontos)

(a) Constante de Hubble?

Suponha um universo homogêneo e isotrópico. A partir da parametrização da expansão com um fator de escala $a(t)$. **Derive** a lei de Hubble $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = H(t)\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Definimos $H(t) \equiv \dot{a}/a$.

Note que a lei de Hubble é na verdade uma propriedade de um universo homogêneo e isotrópico, e não apenas uma relação deduzida a partir observações.

Podemos obter o valor de H_0 (notação para $H(t_0)$ onde t_0 corresponde ao momento atual) usando uma regressão linear $d_L = cz/H_0$.

(b) Módulo da distância cosmológico:

Na fórmula acima, d_L corresponde à distância de luminosidade.

Demonstre a relação entre o módulo da distância ($\mu = m - M$, onde m e M são magnitude aparente e absoluta, respectivamente) e a distância de luminosidade d_L em Mpc.

(c) Medindo H_0 :

Usando os dados da Tabela 1, determine H_0 e a incerteza na sua medida.

(d) Medidas distintas?

A medida que você encontrou no item anterior pode ser comparada com a medida que obtemos de medições da radiação cósmica de fundo, que prevê uma constante de Hubble nos dias atuais em torno de $67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Compare o resultado obtido no item anterior com o resultado dado neste item. Liste pelo menos 3 motivos que justificariam a diferença observada.

Tabela 1: Tabela de Galáxias com μ e z

Galáxia	μ	z
M101	29.11	0.001574
M66	30.22	0.002739
M96	30.31	0.002763
N1309	32.50	0.007616
N1316	31.46	0.004384
N1316	31.46	0.004260
N1316	31.46	0.003659
N1365	31.36	0.004181
N1380	31.397	0.004576
N1404	31.36	0.004331
N1404	31.36	0.005416
N1448	31.35	0.004926
N1448	31.35	0.003907
N1559	31.51	0.004674
N2442	31.65	0.004878
N2525	31.81	0.006126
N3021	32.22	0.006843
N3370	32.25	0.006750
N3447	31.92	0.006146
N3972	31.75	0.005653
N3982	31.50	0.004918
N4038	31.67	0.005290
N4414	31.24	0.004594
N4424	30.94	0.003456
N4457	31.05	0.004090
N4526	31.00	0.003531
N4536	30.94	0.003559
N4639	31.78	0.005391
N4666	30.90	0.003620
N5584	31.81	0.006341
N5643	30.54	0.003097
N5643	30.54	0.003037
N5861	32.10	0.006773
N7250	31.63	0.004989
N7814	30.86	0.004223

Solução:

(a) **Constante de Hubble?**

A parametrização é $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{r}(t_0)$, onde $a(t_0) = a_0 \equiv 1$. Podemos assim escrever $\mathbf{v}(t) = \dot{a}(t)\mathbf{r}(t_0)$. Note que $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t)/a(t)$, então podemos escrever $\mathbf{v}(t) = H(t)\mathbf{r}(t)$, onde $H(t) = \dot{a}/a$.

(b) **Módulo da distância cosmológico:**

$$\begin{aligned}\mu &= m - M = 5 \log_{10}(d[\text{pc}]) - 5 \\ \mu &= m - M = 5 \log_{10}(d[\text{Mpc}] \cdot 10^6[\text{pc}/\text{Mpc}]) - 5 \\ \mu &= m - M = 5 \log_{10}(d[\text{Mpc}]) + 25\end{aligned}$$

(c) **Medindo H_0 :**

Usando os dados da Tabela 1, determine H_0 e a incerteza na sua medida.

Ao realizar regressão linear, encontramos $H_0 = 75 \pm 4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

(d) **Medidas distintas?**

A medida que você encontrou no item anterior pode ser comparada com a medida que obtemos de medições da radiação cósmica de fundo, que prevê uma constante de Hubble nos dias atuais em torno de $67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Compare o resultado obtido no item anterior com o resultado dado neste item. Liste pelo menos 3 motivos que justificariam a diferença observada.

Justificativas possíveis (lista incompleta):

- O modelo cosmológico usado para propagar o parâmetro de Hubble medido na época da recombinação até os dias atuais é incompleto.
- Amostragem estatística insuficiente
- Velocidades peculiares
- Variância cósmica

3. Trevisinha em Busca do Buraco Negro Primordial I (25 pontos)

Em determinado momento de sua saga em busca de um buraco negro primordial, Trevisinha se deparou com um grande buraco negro. Infelizmente, como estava em uma velocidade altíssima e sem detectores apropriados de radiação Hawking, ela acabou adentrando a Esfera de Fótons. Inevitavelmente, Trevisinha entrou no horizonte de eventos do buraco negro recitando a métrica de Schwarzschild como últimas palavras...

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Considere que o buraco negro que Trevisinha caiu tem massa M , não está carregado e possui momento angular nulo. Usando o sistema de unidades naturais, vamos explorar o que a física nos permite saber sobre o futuro de Trevisinha.

Justifique todos os passos de sua solução e tudo que, se necessário, assumir.

- (a) **(2.5 pontos)** Tomando a singularidade como origem do sistema de coordenadas espaciais, encontre a condição que obriga uma partícula estar dentro do horizonte de eventos. Com esse resultado, explore a simetria da métrica de Schwarzschild dentro do horizonte de eventos e argumente se Trevisinha, mesmo que transcendesse as leis da Biologia (mas não as da física), consegue ou não retornar ao horizonte de eventos. Explique como ela retornaria ou o porquê de não conseguir retornar.
- (b) **(10 pontos)** Informalmente, um importante resultado do cálculo variacional - o Teorema de Noether - nos diz que:

"Para cada simetria contínua do Lagrangiano de um sistema, que pode ser verificada pela Equação de Euler-Lagrange, uma quantidade correspondente é conservada".

Encontre a energia de uma partícula massiva que adentrou o horizonte de eventos em função de $\frac{dt}{d\tau}$. Mostre que a energia se conserva e explique o que é esperado para os valores típicos $E < 0$, $E = 0$ e $E > 0$.

Para esse item, leve em consideração que a generalização relativística do Princípio de Ação é dada por:

$$S = -m \int d\tau$$

- (c) **(10 pontos)** Para modelarmos o que vai acontecer com Trevisinha, considere uma partícula massiva de prova adentrando o horizonte de eventos. Expresse a condição imposta sobre o módulo da velocidade própria radial da partícula; determine seu valor mínimo e a condição necessária para que ele ocorra.
- (d) **(2.5 pontos)** Supondo que Trevisinha, após o resultado dos itens anteriores, aceite seu destino, quanto tempo passará em seu relógio até que atinja o estado terminal (*lifetime*) em relação ao momento em que cruzou o horizonte de eventos?

Solução:

- (a) Inicialmente, observe que para que Trevisinha esteja dentro do horizonte de eventos, é necessário que sua distância radial ao centro do buraco negro seja menor que o raio de Schwarzschild do buraco negro.

$$r < \frac{2GM}{c^2} \quad (1)$$

$$\boxed{\therefore r < 2M}$$

Agora, vamos restringir a métrica aos casos $r < 2M$. Observe que nesse regime

$$r < 2M \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0 \quad \text{e} \quad -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) > 0 \quad (2)$$

Agora, observe que essa inversão de sinal gera uma inversão de papéis no sistema de coordenadas $(-t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, -r, \theta, \phi)$. Por comparação com o comportamento unidirecional do tempo, a variável espaço passa a ter uma direção determinada, rumo a singularidade, uma vez que os comportamentos foram simetricamente invertidos. Portanto, Trevisinha não conseguirá retornar ao horizonte de eventos e sair do buraco negro.

- (b) Pela simetria esférica da situação proposta, podemos escolher $\theta = 0$ constante e eliminar os terceiro termo da métrica.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (3)$$

Agora, pela definição de tempo próprio, temos a relação com o intervalo infinitesimal de espaço tempo $ds^2 = -d\tau^2$.

Escrevendo a equação de Euler Lagrange no referencial da partícula.

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Pelas informações fornecidas no enunciado, podemos assumir que não há nenhum potencial externo atuando na partícula e, portanto, podemos escrever o lagrangiano diretamente pelo tempo próprio, sem necessidade de invocar resultados matemáticos muito robustos e avançados.

$$-d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (5)$$

$$-1 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (6)$$

Observe que a normalização da métrica se relaciona com a ação relativística descrita pelo tempo próprio. Observe a comparação com a mecânica lagrangiana clássica com a ação fornecida no enunciado.

$$S = \int L dt \rightarrow S = -m \int d\tau \quad (7)$$

$$S = m \int (-1) d\tau \equiv \int \mathcal{L} d\tau \quad (8)$$

Pela relação, pode-se inferir que o Lagrangiano específico da partícula massiva está normalizado, equivalente a -1 , coincidindo com o desenvolvimento da métrica feito anteriormente. Logo,

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (9)$$

Observe que a parcial no tempo do lagrangiano é nula, revelando uma quantidade conservada por simetria tempo-translacional, que pelo Teorema de Noether corresponde a energia generalizada do problema. Vamos, então, descobrir a forma dessa energia:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \text{cnt} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \rightarrow E \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (11)$$

A rigor, o Teorema de Noether já garantia na simetria tempo-translacional observada no início da solução que uma quantidade seria conservada, a energia.

Demonstrada a conservação e encontrada sua forma, podemos analisar o que é esperado para os valores típicos de energia.

(I) $\mathbf{E=0}$

Observe que nesse caso,

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \rightarrow r = 2M \quad , \quad (12)$$

ou seja, nesse extremo de energia a partícula está no horizonte de eventos.

(II) $\mathbf{E < 0}$

Observe que nesse caso,

$$0 > \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \rightarrow r < 2M \quad , \quad (13)$$

a partícula adentrou o horizonte de eventos.

(III) $\mathbf{E > 0}$

Observe que nesse caso,

$$0 < \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \rightarrow r > 2M \quad , \quad (14)$$

a partícula está fora do horizonte de eventos.

Perceba que estamos na suposição que a partícula está sujeita a métrica de Schwarzschild, portanto sujeita a variações temporais em relação ao tempo de laboratório t devido a geometria do espaço-tempo local. Contudo, pode-se também considerar o caso em que a partícula está infinitamente distante do buraco negro, onde a métrica de Minkowski é a melhor descrição para a geometria do espaço-tempo local.

- (c) Trevisinha está adentrando o horizonte de eventos com uma velocidade não nula. Devido a inversão spacelike and timelike dentro do horizonte de eventos, é interessante verificarmos o comportamento da velocidade radial própria da partícula, uma vez que essa componente métrica assume direção unicamente definida. Para encontrarmos essa restrição, vamos usar o resultado desenvolvido no item anterior.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (15)$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (16)$$

Invocando os resultados para energia desenvolvidos no item anterior.

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (17)$$

Substituindo na equação 17.

$$\begin{aligned} -1 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\ - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= -E^2 + \dot{r}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (19)$$

$$\therefore \left| \frac{dr}{d\tau} \right| = \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (20)$$

Como o ponto crítico da energia está no horizonte de eventos, podemos tomá-lo como referência e obter a restrição desejada.

$$\left| \frac{dr}{d\tau} \right| \geq \sqrt{\frac{2M}{r} - 1} \quad (21)$$

Onde pela própria premissa da restrição o valor o mínimo ocorre em $E = 0$.

- (d) Com os resultados desenvolvidos até aqui, sabemos que Trevisinha inevitavelmente irá seguir em direção à singularidade. Vamos encontrar o intervalo de tempo em seu referencial (*lifetime*) para que chegue na singularidade, partindo do horizonte de eventos.

$$\left| \frac{dr}{d\tau} \right| = \sqrt{\frac{2M}{r} - 1} \quad (22)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \quad (23)$$

$$\int_0^\tau d\tau' = - \int_{2M}^0 dr \left(\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1 \right)^{-1} \quad (24)$$

Resolvendo a integral, concluímos.

$$\therefore \tau = \pi M \quad (25)$$

Observação: o método de solução desenvolvido nessa questão tem por objetivo o desenvolvimento do raciocínio frente a novas ideias. Portanto, a solução aqui apresentada não corresponde a todo rigor físico e matemático necessário para descrever com precisão a situação.

4. Sinuca Ultrarrelativística (25 pontos)

ϕ neas e Férmião, entediados em uma tarde de verão, resolvem aprender a jogar sinuca disparando fótons em elétrons através do espalhamento Compton. Estudaremos nessa questão, tanto a cinemática de sistemas de colisão relativística, quanto um fundamental aspecto de sua dinâmica, a sessão de choque; estratégias fortemente implementadas pelos irmãos para aumentar sua probabilidade de vitória.

- (a) Quando nos referimos à cinemática de um processo, buscamos entender tudo que é possível sobre o estado assintótico de um sistema, sem necessariamente conhecer as interações que ocorreram no meio do caminho. Considere o processo geral a seguir:

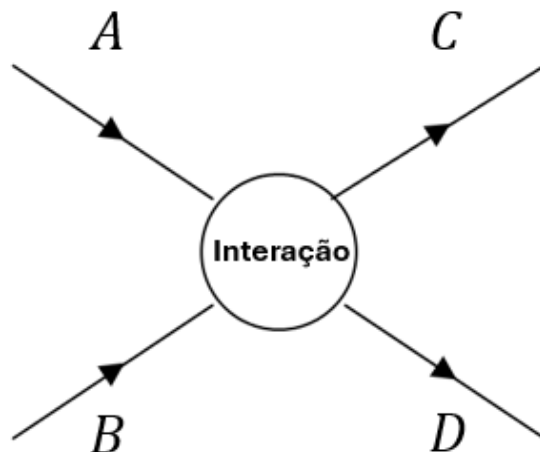


Figura 1: Colisão na forma: $A + B \rightarrow C + D$, onde cada letra representa uma partícula. O processo ocorre da esquerda para a direita.

Chamando de $\vec{p}_A$ e E_A o momento e energia da partícula A (e assim respectivamente), mostre que as seguintes grandezas:

$$s = (E_A + E_B)^2 - c^2 \|\vec{p}_A + \vec{p}_B\|^2 \quad t = (E_A - E_C)^2 - c^2 \|\vec{p}_A - \vec{p}_C\|^2 \quad u = (E_A - E_D)^2 - c^2 \|\vec{p}_A - \vec{p}_D\|^2.$$

Denominadas variáveis de Mandelstam, são invariantes relativísticas, e mostre que:

$$s + t + u = c^4 (m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2).$$

(b) Considere agora o caso particular do espalhamento Compton:

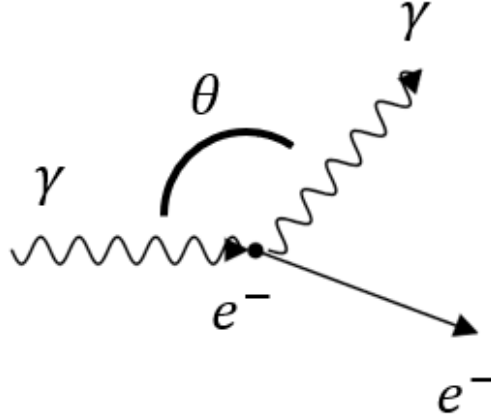


Figura 2: Espalhamento compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, onde γ representa um fóton, e^- um elétron e θ o ângulo entre o fóton incidente e espalhado no referencial do primeiro elétron parado.

Adote como referencial, aquele que o elétron está inicialmente parado (como na figura), e o fóton incide sobre a direção $\hat{x}$ com frequência ν e é espalhado com frequência ν' . Mostre que:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 + \cos(\theta)).$$

Agora vamos entender mais a fundo a dinâmica do problema. Quando falamos de sessão de choque, nos referimos à área efetiva σ que uma partícula tem para certo processo. Isso engloba diversas situações distintas, desde um fóton interagindo com poeira no meio interestelar, até um neutrino difundindo momento em camadas superiores durante o colapso do núcleo de uma supergigante em uma supernova.

Outra grandeza relevante é a sessão de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, que corresponde à área efetiva da partícula para ser espalhada em certa direção, representada pelo ângulo sólido $d\Omega$. Em analogia com a sinuca de ϕ neas e fêrmion, é como estimar a pequena área superficial $d\sigma$ que uma bola pode atingir a outra de modo a seguir na direção desejada $d\Omega$.

Em geral, não escrevemos $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ pois este não é invariante relativístico. Preferindo fazer uso da variável de Mandelstam: t , que carrega a mesma informação de direção. Sendo assim, entendendo seu significado conceitualmente, temos que a sessão de choque diferencial obedece a equação:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c^2 h^2}{64\pi^3 (s - c^4 m^2)^2} \mathcal{M}^2$$

Onde m é a massa do elétron, e $\mathcal{M}$ se denomina amplitude de espalhamento, e geralmente é a coisa mais difícil de calcular. Aqui, a pedido de ϕ neas, será fornecida a fórmula:

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 h c} \right)^2 \left[\left(\frac{2m^2 c^4}{s - m^2 c^4} + \frac{2m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right)^2 + \left(\frac{4m^2 c^4}{s - m^2 c^4} + \frac{4m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right) - \frac{u - m^2 c^4}{s - m^2 c^4} - \frac{s - m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right] \quad (26)$$

(c) Obtenha o limite ultrarrelativístico da sessão de choque diferencial, isto é, encontre $\frac{d\sigma}{dt}$ para $mc^2 \ll h\nu$, em termos das variáveis de Mandelstam.

- (d) Considere o sistema adotado para o item (b), no qual um fóton de frequência ν se espalha em um elétron parado com um ângulo θ saindo com uma frequência ν' . Mostre então que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{h^2}{8\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2(\theta) \right) \quad (\text{Equação de Klein-Nishina})$$

Obs: Como o sistema tem simetria cilíndrica sob o eixo de incidência, estamos tomando $d\Omega = 2\pi |\sin(\theta)| d\theta = 2\pi |d(\cos(\theta))|$.

- (e) Encontre a seção de choque total σ , no limite clássico $mc^2 \gg h\nu$, e relacione a expressão encontrada com a seção de choque de Thomson:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

para encontrar o que seria o raio efetivo do elétron r_e .

- (f) Enquanto ϕ neas prepara sua jogada, Férmiolha pela janela e fica pensando em qual seria a chance de um fóton ultraenergético vindo do espaço (cosmogênico) entrar na sala e atrapalhar o jogo. Para isso, ele se lembra de ter aprendido sobre a simetria de Crossing, que permite relacionar processos com partículas similares. Em particular, ele se lembra que o processo de colisão elétron fóton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ pode ser relacionado com um análogo $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$, onde e^+ representa um pósitron (anti-elétron).

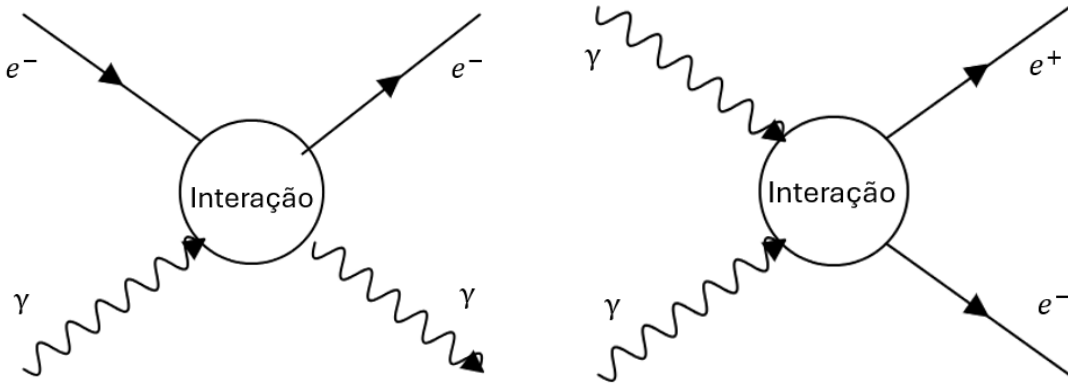


Figura 3: A esquerda, está o diagrama análogo à figura 2, representando $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$; à direita, seu análogo $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

Note que a menos do sentido das setas, os diagramas são uma rotação a 90° um do outro. A simetria de Crossing, permite relacionar as amplitudes $\mathcal{M}_{\gamma+e^- \rightarrow \gamma+e^-}$ com $\mathcal{M}_{\gamma+\gamma \rightarrow e^-+e^+}$, nos dizendo que as amplitudes são **iguais** a menos de uma troca de variáveis de Mandelstam: $s \rightarrow u$, $u \rightarrow s$ e $t \rightarrow t$. Isto é:

$$\text{Trocando em 26 as variáveis: } \begin{cases} s \rightarrow u \\ u \rightarrow s \\ t \rightarrow t \end{cases}, \quad \text{teremos: } \mathcal{M}_{\gamma+e^- \rightarrow \gamma+e^-} \rightarrow \mathcal{M}_{\gamma+\gamma \rightarrow e^-+e^+}.$$

Este processo que Férmiolha está pensando é de interesse para a astronomia de altas energias, pois mostra que para altas energias é possível que dois fótons "colidam" dando origem a um par elétron pósitron. Isso faz com que a radiação cósmica de fundo atue como um meio translúcido ou até opaco para fótons de altíssima energia.

Vamos estimar essa profundidade óptica. Considere um processo simplificado, onde o fóton energético de frequência ν interage frontalmente com um microondas no pico de emissão da radiação cósmica de fundo (2,7 K); produzindo um par $e^+ + e^-$, ambos com a mesma energia. Chamemos a sessão de choque diferencial desse processo de $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{médio}}$, e aproximamos $\sigma = (t_{\text{max}} - t_{\text{min}}) \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{médio}}$. Assuma também para a estimativa que o fundo cósmico é apenas composto por fótons com a frequência de pico. Nessas condições encontre a profundidade óptica τ imposta pela CMB. Para qual frequência de luz a distância entre a Via Láctea e Andrômeda é maior que τ ?.

Solução:

- (a) **Solução 1:** Uma demonstração pode ser encontrada com o uso de 4-vetores. Basta notar que se temos o 4-momento $p = (E/c, \vec{p})$, então $p^2 = E^2 - ||\vec{p}||^2$ é um invariante relativístico. Nesse caso:

$$s = c^2(p_A + p_B)^2 \quad t = c^2(p_A - p_C)^2 \quad u = c^2(p_A - p_D)^2$$

São todas quantidades escritas em termos do quadrado de um quadrivetor, sendo por sua vez invariantes.

A relação de soma também é provada utilizando da conservação de momento e energia: $p_A + p_B = p_C + p_D$:

$$\begin{aligned} s + t + u &= c^2 [(p_A + p_B)^2 + (p_A - p_C)^2 + (p_A - p_D)^2] \\ &= c^2 [3p_A^2 + 2p_A \cdot p_B - 2p_A \cdot p_C - 2p_A \cdot p_D + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2] \\ &= c^2 [p_A^2 + 2p_A \cdot (p_B - p_C - p_D) + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2] \\ &= c^2 [p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2] \end{aligned}$$

Utilizando por fim a relação de dispersão: $p^2 = m^2 c^2$, temos:

$$\therefore \boxed{s + t + u = c^4(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2)}$$

Solução 2:

- (b) O momento e energia iniciais e final do fóton são:

$$\vec{k}_i = \frac{h}{c}(\nu, 0, 0) \quad E_i = h\nu \quad \rightarrow \quad \vec{k}_f = \frac{h}{c}(-\nu' \cos \theta, \nu' \sin \theta, 0) \quad E_f = h\nu'$$

O elétron por sua vez não tem momento inicial (apenas energia de repouso) e termina com um momento final $\vec{p}$ e energia $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 ||\vec{p}||^2}$

Aplicando a conservação do momento e da energia, temos:

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= \vec{k}_f + \vec{p} & E_i + mc^2 &= E_f + E \\ \Rightarrow \quad ||\vec{p}||^2 &= ||\vec{k}_i - \vec{k}_f||^2 & E^2 &= m^2 c^4 + c^2 ||\vec{p}||^2 = (E_i + mc^2 + E_f)^2 \end{aligned}$$

Assim, substituindo:

$$m^2 c^4 + c^2 ||\vec{k}_i - \vec{k}_f||^2 = (E_i + mc^2 + E_f)^2$$

$$m^2c^4 + (h^2\nu^2 + 2h^2\nu\nu' \cos(\theta) + h^2\nu'^2) = (h\nu + mc^2 + h\nu')^2$$

$$2h^2\nu\nu' \cos(\theta) = 2h\nu mc^2 - 2h\nu' mc^2 - 2h^2\nu\nu'$$

$$h\nu\nu'(1 + \cos(\theta)) = \nu mc^2 - \nu' mc^2 \implies \boxed{\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 + \cos(\theta))}$$

- (c) As energias e momento relevantes foram obtidos no item anterior, e podemos utilizá-las para calcular as variáveis de Mandelstam:

$$s = (h\nu + mc^2)^2 - c^2||\vec{k}_i + 0||^2 = h^2\nu^2 + 2mc^2h\nu + m^2c^4 - h^2\nu^2 = 2mc^2h\nu + m^2c^4$$

$$t = (h\nu - h\nu')^2 - h^2||(\nu + \nu' \cos(\theta), -\nu' \sin(\theta), 0)||^2 = -2h^2\nu\nu'(1 + \cos(\theta))$$

$$u = 2m^2c^4 - s - t = m^2c^4 - 2mc^2h\nu + 2h^2\nu\nu' \cos(\theta)$$

Notamos que no limite ultrarrelativístico, podemos descartar todos os termos da forma

$$m^2c^4$$

frente às variáveis de Mandelstam Isso leva ao primeiro e segundo termos da amplitude serem descartáveis e ao terceiro e quarto resultarem:

$$\mathcal{M}^2 \approx 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left\{ -\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right\}$$

Aplicando isso à formula da amplitude e aproximando $s - c^4m^2 \approx s$:

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx \frac{c^2h^2}{32\pi^3s^2} \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left\{ \frac{(-u)}{s} + \frac{s}{(-u)} \right\}$$

- (d) Utilizando o resultado demonstrado no item (b) e as Mandelstam calculadas no item (c), podemos associar:

$$u = m^2c^4 - 2mc^2h\nu + 2h^2\nu\nu' \cos(\theta) = m^2c^4 - 2mc^2h\nu + 2hmc^2(\nu - \nu') = m^2c^4 - 2mc^2h\nu'$$

Isso é um pouco mais conveniente pois agora a expressão para a amplitude é:

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left[\left(\frac{2m^2c^4}{2mc^2h\nu} - \frac{2m^2c^4}{2mc^2h\nu'} \right)^2 + \left(\frac{4m^2c^4}{2mc^2h\nu} - \frac{4m^2c^4}{2mc^2h\nu'} \right) + \frac{2mc^2h\nu'}{2mc^2h\nu} + \frac{2mc^2h\nu}{2mc^2h\nu'} \right]$$

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left[\frac{m^2c^4}{h^2} \left(\frac{1}{h\nu} - \frac{1}{h\nu'} \right)^2 + \frac{2mc}{h} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'} \right) + \frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} \right]$$

Aplicando a fórmula para o espalhamento Compton:

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left[(1 + \cos(\theta))^2 - 2(1 + \cos(\theta)) + \frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} \right]$$

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left[\cos^2(\theta) - 1 + \frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} \right] = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 hc} \right)^2 \left[\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2(\theta) \right]$$

Como: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{dt} \frac{dt}{d\Omega}$, voltamos nossas atenções à derivada de t :

$$t = -2h^2\nu\nu'(1 + \cos(\theta)) = -2mc^2h(\nu - \nu') = -2mc^2h\left(\nu - \frac{1}{\frac{1}{\nu} + \frac{h}{mc^2}(1 + \cos(\theta))}\right)$$

$$\frac{dt}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{d\cos\theta} \left[-2mc^2h\left(\nu - \frac{1}{\frac{1}{\nu} + \frac{h}{mc^2}(1 + \cos(\theta))}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2h^2}{\left(\frac{1}{\nu} + \frac{h}{mc^2}(1 + \cos\theta)\right)^2} = \frac{1}{\pi} h^2\nu'^2$$

Assim, finalmente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} h^2\nu'^2 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\pi} h^2\nu'^2 \frac{c^2 h^2}{64\pi^3 (2mc^2 h\nu)^2} 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 h c} \right)^2 \left[\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2(\theta) \right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{h^2}{8\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} \right) \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 \left[\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2(\theta) \right]$$

(e) No limite clássico, temos:

$$\nu' = \frac{1}{\frac{1}{\nu} + \frac{h}{mc^2}(1 + \cos(\theta))} \approx \nu$$

Assim, a sessão de choque é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{h^2}{8\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 [2 - \sin^2(\theta)] = \frac{h^2}{8\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 [1 + \cos^2(\theta)]$$

Integrando sobre todo valor de Ω :

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta = \frac{h^2}{4\pi m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 \int_{-1}^1 [1 + \cos^2(\theta)] d\cos\theta$$

$$\sigma = \frac{h^2}{4\pi m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 \left[2 + \frac{2}{3} \right] = \frac{8\pi}{3} \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2$$

Comparando com a sessão de choque de Thomson:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}$$

(f) Diversas abordagens são possíveis para essa estimativa, uma direta seguindo o passo a passo proposto segue:

O pico de radiação cósmica de fundo pode ser estimado utilizando a lei de Wien adaptada para a frequência: $\nu_{CMB} = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$

Como a expressão para a amplitude é simétrica pela troca de s e u , só precisamos nos preocupar em calcular as novas variáveis de Mandelstam.

Para a colisão frontal:

$$s = (p_\nu - p_{\nu_{CBM}})^2 = 4h^2\nu\nu_{CBM} \qquad u = (p_\nu - p_{e^-})^2 = m^2 c^4 - \frac{s}{2}$$

Os valores iniciais e finais de t podem ser encontrados pelos seus limites geométricos (interação frontal a 0° e 180°), resultando em

$$\Delta t = m^2 c^4 - \left(m^2 c^4 - \frac{s}{2}\right) = s/2$$

Por fim, como a energia mínima para a reação acontecer é pelo menos da ordem de $\sim 2mc^2$, vamos considerar o limite ultrarrelativístico.

Desse modo:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c^2 h^2}{32\pi^3} \frac{1}{(4h^2 \nu \nu_{CBM})^2} \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 h c}\right)^2 \left\{\frac{1}{2} + 2\right\}$$

Multiplicando pelo intervalo:

$$\sigma \sim \frac{c^2 h^2}{64\pi^3} \frac{1}{4h^2 \nu \nu_{CBM}} \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 h c}\right)^2 \left\{\frac{1}{2} + 2\right\}$$

Para uma densidade de fótons CMB da ordem $n \sim 4 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$, temos que para que o livre caminho médio da luz seja a distância até andrômeda, ou o caminho ótico até lá ser 1, teremos:

$$\frac{1}{n\sigma} = d_{And}$$

Isolando e substituindo:

$$\nu \sim 1,4 \cdot 10^{31} \text{ Hz}$$

verificando $h\nu \sim 600 mc^2$ mais que justificando a aproximação.