

# Olimpíada Brasileira Online de Astronomia

2ª Fase - 18 e 19 de Outubro de 2025

Nome: \_\_\_\_\_

Série: \_\_\_\_\_

Nível Rubens de  
Azevedo  
Ensino Médio

## Instruções de Prova

- I. Esta prova contém **8** questões. Cada questão vale 10 pontos, totalizando 80 pontos.
- II. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na próxima página.
- III. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
- IV. A prova tem duração de 3 horas. Todos os estudantes devem realizar a prova enquanto em uma das chamadas do Google Meet com a câmera ligada. Qualquer atividade suspeita poderá levar a eliminação do candidato.

Apoio:



## Tabela de Constantes

|                                                      |                                                                        |                                  |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Massa ( $M_{\oplus}$ )                               | $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$                                        | <b>Terra</b>                     |
| Raio ( $R_{\oplus}$ )                                | $6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$                                            |                                  |
| Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ ) | $9,8 \text{ m/s}^2$                                                    |                                  |
| Obliquidade da Eclíptica                             | $23^{\circ}27'$                                                        |                                  |
| Ano Tropical                                         | 365,2422 dias solares médios                                           |                                  |
| Ano Sideral                                          | 365,2564 dias solares médios                                           |                                  |
| Albedo                                               | 0,39                                                                   |                                  |
| Dia sideral                                          | $23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$                                 |                                  |
| Massa                                                | $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$                                        | <b>Lua</b>                       |
| Raio                                                 | $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$                                            |                                  |
| Inclinação Orbital com relação à Eclíptica           | $5,14^{\circ}$                                                         |                                  |
| Albedo                                               | 0,14                                                                   |                                  |
| Magnitude aparente (lua cheia média)                 | $-12,74 \text{ mag}$                                                   |                                  |
| Massa ( $M_{\odot}$ )                                | $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$                                        | <b>Sol</b>                       |
| Raio ( $R_{\odot}$ )                                 | $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$                                            |                                  |
| Luminosidade ( $L_{\odot}$ )                         | $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$                                         |                                  |
| Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )                   | $4,80 \text{ mag}$                                                     |                                  |
| Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )                   | $-26,7 \text{ mag}$                                                    |                                  |
| Velocidade de Rotação na Galáxia                     | $220 \text{ km s}^{-1}$                                                |                                  |
| Distância ao Centro Galático                         | $8,5 \text{ kpc}$                                                      |                                  |
| Diâmetro da pupila humana                            | $6 \text{ mm}$                                                         | <b>Distâncias<br/>e tamanhos</b> |
| Magnitude limite do olho humano nu                   | $+6 \text{ mag}$                                                       |                                  |
| 1 UA                                                 | $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$                                        |                                  |
| 1 pc                                                 | 206.265 UA                                                             |                                  |
| Constante Gravitacional ( $G$ )                      | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  | <b>Constantes<br/>Físicas</b>    |
| Constante de Planck ( $h$ )                          | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$                         |                                  |
| Constante de Boltzmann ( $k_B$ )                     | $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$                    |                                  |
| Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )           | $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ |                                  |
| Constante de Wien ( $b$ )                            | $2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$                         |                                  |
| Constante de Hubble ( $H_0$ )                        | $67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$            |                                  |
| Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )                   | $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$                                           |                                  |

**Curiosidades:**

Rubens de Azevedo (1921-2008) foi um proeminente astrônomo brasileiro, notório pela fundação da Sociedade Brasileira dos Amigos da Astronomia (SBAA) e do Observatório Popular Flamarion. Suas realizações incluem a criação do primeiro mapa lunar brasileiro e uma significativa contribuição para a popularização da astronomia no Brasil, influenciando a formação de inúmeras instituições astronômicas. Seu legado perdura com o Planetário Rubens de Azevedo em Fortaleza-CE e a homenagem do asteroide 84342, renomeado em seu centenário como "Asteroide Rubensdeazevedo".



**Questão 1.** Em um universo paralelo a força gravitacional tem forma

$$\vec{F}(r) = -kr^n \hat{r}$$

Onde  $k > 0$  é uma constante de proporcionalidade e  $r$  a distância entre os corpos. Para esse problema, vamos considerar dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  onde  $m_1 \gg m_2$  e  $m_1^2 \gg k$ .

- a) **(2 pontos)** Considerando que os objetos orbitam em órbitas circulares ao redor do centro de massa, encontre os raios  $a_1$  e  $a_2$  das órbitas dos corpos 1 e 2.
- b) **(3 pontos)** Qual seria o equivalente a Terceira Lei de Kepler (relação entre  $a_1 + a_2$  e o período  $P$  do sistema) para esse universo? Deixe sua resposta em função de  $k$ ,  $n$  e  $m_2$
- c) **(5 pontos)** Qual é a Energia Mecânica total desse sistema? Deixe sua resposta em função de  $k$ ,  $n$  e  $a_2$

**Dica:** a energia potencial pode ser escrita como

$$U(r) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

E

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

**Questão 2. (10 pontos)** Dois astrônomos, um localizado em Alexandria (latitude  $\phi = 31,2^\circ$  N) e outro em Nicósia (latitude  $\phi = 35,2^\circ$  N), observam a Lua no mesmo instante. Ambos estão sobre o mesmo meridiano. Assim que a Lua atinge seu ponto mais alto no céu, o astrônomo em Alexandria mede que a Lua está a uma distância zenital de  $25,8^\circ$ , enquanto o de Rodas registra uma distância zenital de  $29,9^\circ$ . Estime qual a declinação da Lua no momento da observação e a razão entre a distância da Lua e o raio da Terra. Se necessário use que  $\sin \theta \approx \theta$  e  $\cos \theta \approx 1$  para  $\theta \ll 1$ .

**Questão 3.** Um dos principais métodos que medimos, com precisão, o brilho de uma estrela é contando o número de fótons que recebemos dela. Atualmente, os dispositivos responsáveis por essa tarefa, são chamados CCDs. Nessa questão, vamos fazer um modelo simples para estudar os CCDs acoplados ao telescópio Perkin-Elmer, que é o maior telescópio em solo brasileiro, possuindo 1,6 m de diâmetro e localizado no Pico dos dias.

- a) Sabendo que o Perkin-Elmer é um telescópio  $f/10$  e está acoplado a um CCD de 2048x2048, formados por pixels de  $10 \mu\text{m}$  de lado, calcule a escala de placa do CCD (isto é, quando " de arco são compreendidos por um pixel).
- b) Qual a Magnitude limite do Perkin-Elmer?

- c) Agora que já sabemos esses dois fatores, podemos começar a modelar a contagem de fótons do CCD. Durante uma noite de observações, Paulinago deseja observar o sistema binário HD 131218, mas antes disso, decide obter dados importantes sobre ele. Após checar o almanaque astronômico de seu superior, Klafk Júlio, Paulinago descobriu que o sistema possui magnitude aparente  $m = 8,74$  mag e magnitude absoluta no visível  $V = 4,04$  mag. Calcule a distância de nós até o sistema.
- d) Em um cenário ideal, em que o CCD captasse todos os fótons vindo do sistema e não captasse nenhum fóton vindo de ruídos externos, qual seria a contagem  $\eta$  de fótons por segundo?
- e) Considerando que na noite da observação, o céu de fundo possuía um brilho superficial de  $\mu = 0,77$  mag/''<sup>2</sup>, que a eficiência dos CCDs é de 80% e que cada pixel possui um ruído aleatório que obedece a fórmula  $\sigma_a = 10t^2 e^{-0,01t}$  contagens/s/pixel encontre a razão sinal ruído dessa observação após 10 minutos.
- f) O modelo apresentado é um bom modelo? Por que?

**Questão 4.** Nas encostas do vulcão Acatenango, na Guatemala, durante à OLAA 32. Um grupo internacional de jovens astrônomos prepara uma estação de observação em altitude. O local oferece noites muito escuras e condições estáveis para observações de alta resolução.

Foram instalados três telescópios refletivos:

- Telescópio A: 0.28m de diâmetro
  - Telescópio B: 0.52m de diâmetro
  - Telescópio Quetzal-1: 2.50m de diâmetro
- a) **(3 pontos)** Se os astrônomos apontarem o Quetzal-1 para uma estrela pontual muito distante, como a imagem se compararia com a obtida pelo telescópio A? Qual propriedade do telescópio determina essa diferença de nitidez? Estime o poder de resolução angular do Quetzal-1 em segundos de arco, considerando  $\lambda = 550$  nm.
- b) **(2 pontos)** Comparando o telescópio A com o Quetzal-1, quantas vezes a separação angular mínima que o Quetzal-1 consegue distinguir é menor que a do telescópio A? O que isso significa na prática para a observação de sistemas estelares próximos?
- c) **(3 pontos)** Durante a observação, os jovens astrônomos percebem que alguns telescópios conseguem detectar estrelas que não seriam visíveis a olho nu. Considerando que a quantidade de luz coletada aumenta com o tamanho do espelho, explique como o diâmetro do telescópio influencia a capacidade de enxergar estrelas mais fracas. Em seguida, estime numericamente qual seria a magnitude limite para os telescópios A, B e Quetzal-1.
- d) **(2 pontos)** Se um filtro especial reduzir o fluxo recebido pelo Quetzal-1 a 40% do original, como a magnitude limite do telescópio seria afetada? Indique numericamente a nova  $m_{\text{lim}}$ .

**Questão 5.** A equipe IOAA 2025, passou pelo grande desafio de confeccionar um poster informativo sobre marcações de tempo. Entretidos com relógios de Sol, os cinco alunos resolveram criar um e comparar o tempo com seu relógio de pulso. Considerando que o entusiasta está no centro do fuso indiano, e sua latitude é a de Mumbai ( $\phi = 19^\circ N$ ), ajude-o a associar a diferença entre os relógios de Sol e seu conhecimento astronômico.

- a) **(3 pontos)** Determine a diferença entre o tempo demarcado pelo relógio de Sol e o relógio de pulso. Considere que se passaram  $n$  dias desde o equinócio de áries e que a translação da Terra pode ser considerada como aproximadamente um MCU. Denote a excentricidade da eclíptica como  $\epsilon$ .
- b) **(2,5 pontos)** Faça uma tabela simples com os resultados numéricos dos erros  $\Delta t$  associados a diferentes  $n$ 's na latitude do observador.

- c) **(2,5 pontos)** Faça um gráfico simples apenas com alguns pontos (no mínimo 8) relevantes do erro obtido anteriormente no decorrer de um ano. Onde os eixos das ordenadas deve ser o erro em minutos e o das abscissas os dias do ano a partir do equinócio de áries.
- d) **(2 pontos)** A expressão que você encontrou nos dois itens anteriores tem uma grande importância na astronomia de tempo. Este "erro" apresenta uma famosa denominação, como é o nome usual desse erro associado a diferença dentre esses dois tempos?

**Questão 6.** Observações em comprimento de onda de rádio da nuvem de gás que orbita um buraco negro no centro da nossa galáxia revelam radiação da transição spin-flip do hidrogênio (cuja frequência de repouso é 1420,41 MHz), detectando uma frequência de 1421,23 MHz. As medições nos dizem que essa nuvem de gás está localizada a uma distância de 0,2 pc do buraco negro e orbita em um círculo:

- a) **(2 pontos)** Determine a velocidade da nuvem.
- b) **(1 ponto)** Ela está se aproximando ou se afastando de nós?
- c) **(4 pontos)** Calcule a massa do buraco negro.
- d) **(3 pontos)** Calcule o raio do buraco negro

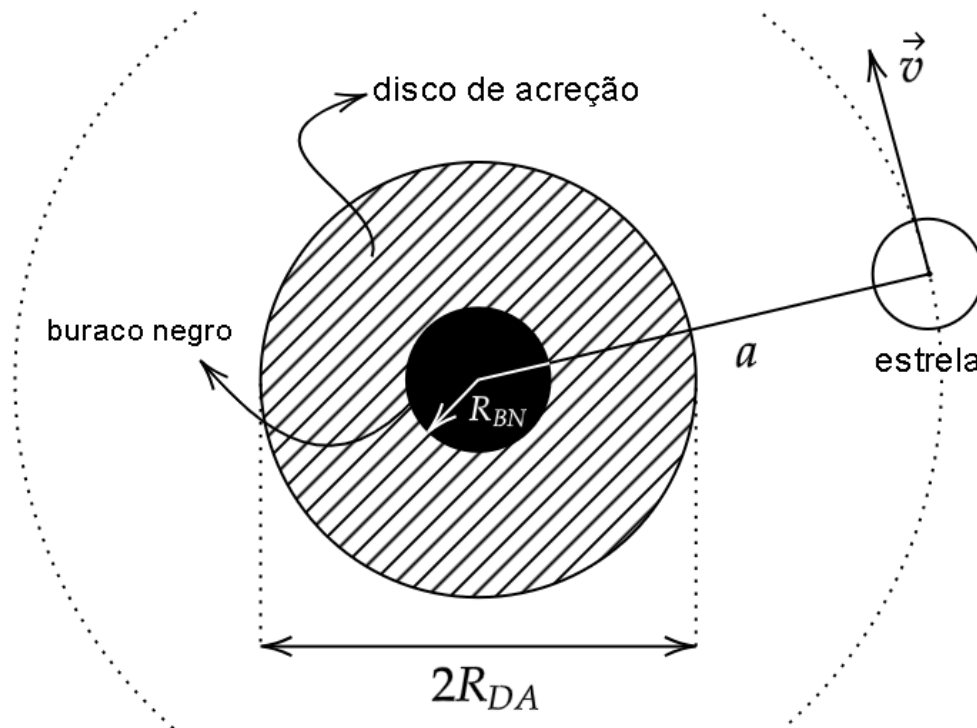
**Questão 7. (10 pontos)** Maui é um personagem do filme *Moana* que deseja viajar da cidade de Aracaju ( $\phi_S = 10.9095^\circ\text{S}$ ,  $\lambda_S = 37.0748^\circ\text{O}$ ) até a cidade de New Haven ( $\phi_A = 41.3083^\circ\text{N}$ ,  $\lambda_A = 72.9279^\circ\text{O}$ ). Diferentemente dos carros, cuja velocidade é medida em km/h, Maui é extremamente rápido e viaja a  $^\circ/\text{s}$ , sendo  $^\circ$  a quantidade de graus na superfície terrestre que ele deve percorrer.

Sabendo que a distância angular entre dois pontos na superfície da Terra pode ser determinada a partir de suas coordenadas geográficas, determine a velocidade que Maui deve manter para chegar ao seu destino em apenas 3 horas.

**Questão 8.** A acreção de massa em objetos compactos — como anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros — constitui um dos mecanismos mais eficientes de conversão de energia gravitacional em radiação. Quando matéria é capturada pela intensa gravidade desses corpos, ela não cai de forma radial diretamente sobre a superfície (ou horizonte de eventos, no caso de buracos negros). Em vez disso, devido à conservação do momento angular, o material forma um disco de acreção em torno do objeto central.

Nesse disco, a matéria orbita em trajetórias quase keplerianas, perdendo energia e momento angular por meio de diferentes processos físicos. À medida que o gás espirala para órbitas internas, parte significativa da energia potencial gravitacional é dissipada em forma de calor. Esse aquecimento eleva a temperatura do disco a níveis extremos, produzindo radiação que pode variar do ultravioleta ao raio-X, dependendo da massa do objeto compacto e da taxa de acreção.

Nesta questão, estudaremos um modelo simplificado para a acreção de matéria, e trabalharemos com base em uma sistema binário hipotético formado por um buraco negro de massa  $M_{BN} = 2,6 \cdot 10^3 M_\odot$  e por uma estrela de massa  $M_\star = 1,4 M_\odot$  que o orbita em uma trajetória circular de raio  $a$ . Ademais, é importante mencionar que a estrela possui fortes ventos estelares, de modo a perder uma massa  $\Delta M_\star$  a cada ano.



### Parte I: Perda de Massa por Vento Estelar (4 pontos)

Durante o período de um ano, pode-se observar que raio orbital da estrela aumentou em  $\Delta a = 2 \cdot 10^{-4}$  UA. Isso é consequência da conservação de momento angular, em que, para "remediar" o efeito da perda de massa por parte da estrela, o semi-eixo maior deve aumentar, de modo a manter a quantidade de movimento angular constante.

- a) (3 pontos) Demonstre que o produto entre o quadrado da massa da estrela ( $M_*$ ) e o raio de sua órbita ( $a$ ) é uma constante:

$$M_*^2 \cdot a = \text{constante}$$

Lembre-se que  $M_{BN} \gg M_*$  e considere que, por simplificação, a massa do buraco negro seja constante.

- b) (1 pontos) Com base no resultado do item acima, calcule a perda anual de massa da estrela (em  $M_\odot/\text{ano}$ ).

### Parte II: Modelando a Acreção de Massa (6 pontos)

Agora, partiremos para o objetivo da questão. Em consonância com o que foi dito anteriormente, a energia perdida por parte da massa acretada pelo buraco negro é dissipada em forma de energia luminosa, dando origem à luminosidade do disco de acreção.

- c) (2 pontos) Considere uma massa  $m$  em uma órbita circular de raio  $r$  em torno do buraco negro. Demonstre que, para uma diminuição  $\Delta r$  no raio da órbita, haverá uma variação  $\Delta E$  na energia mecânica da massa conforme a expressão:

$$\Delta E = \frac{GM_{BN}m}{2r^2} \Delta r$$

**Dica:** Utilize que, para  $\Delta x \ll x$ , é válida a aproximação:

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n \left( 1 + \frac{n\Delta x}{x} \right)$$

Dividindo a equação acima por um intervalo de tempo  $\Delta t$ , teremos a energia dissipada por unidade de tempo, a qual estará em função de  $\frac{\Delta M_{\star}}{\Delta t}$ . Integrando essa equação, isto é, somando as contribuições de todas as partes do disco de acreção para a luminosidade do mesmo, obtemos a seguinte expressão:

$$L_{DA} = \frac{GM_{BN}}{2} \left( \frac{1}{R_{BN}} - \frac{1}{R_{DA}} \right) \frac{\Delta M_{\star}}{\Delta t}$$

Para o sistema estudado, foi constatado que a luminosidade do disco de acreção vale  $L = 6,8 \cdot 10^{35} \text{ W}$

- d) (3 pontos)** Com base na equação supracitada, calcule o raio do disco de acreção (em km).
- e) (1 ponto)** Analisando o espectro de emissão do disco de acreção, observa-se um pico em  $\lambda_{\text{pico}} = 0,68 \text{ nm}$ . Com base nisso, calcule a temperatura do disco (em K).