



Olimpíada Brasileira Online de Física

2ª Fase - 26 e 27 de outubro de 2025

Nome: _____

Série: _____

César Lattes
Nível Aberto
Português

Instruções de Prova

- I. Esta prova é composta por **3** questões.
- II. A duração máxima desta prova é de **quatro horas**. Além do tempo de prova, serão concedidos **5 minutos** correspondentes ao preenchimento online do gabarito.
- III. A prova deve ser feita individualmente e não é permitido falar sobre a solução das questões durante o período de aplicação da prova **26 e 27 de outubro de 2025**.
- IV. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10 \text{ m/s}^2$; calor específico da água líquida $c_a = 1 \text{ cal/(g } ^\circ\text{C)}$; calor latente de fusão do gelo $L = 80 \text{ cal/g}$; $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ J}$; densidade da água líquida $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$; constante de Wien $b = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$; constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; velocidade da luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$; energia do hidrogênio no estado fundamental $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Apoio:





Curiosidades:

Cesare Mansueto Giulio Lattes, mais conhecido como César Lattes (Curitiba, 11 de julho de 1924 — Campinas, 8 de março de 2005), foi um físico brasileiro, codescobridor do méson- π (méson pi ou pión), descoberta que levou à concessão do Prêmio Nobel de Física de 1950 a Cecil Frank Powell, líder da pesquisa. Lattes é um dos mais ilustres físicos do Brasil e seu trabalho foi fundamental para o desenvolvimento da física atômica no país. Foi também um grande líder no meio científico brasileiro e um dos principais responsáveis pela criação do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).



Questão 1: Escudo Térmico - 10 pontos¹

Uma futura missão a Marte planeja utilizar um novo motor que requer que seu combustível seja mantido a uma temperatura extremamente baixa, abaixo de sua temperatura crítica de ebulição, T_c . Para evitar que o combustível evapore, o tanque esférico que o armazena é envolvido por um sistema de isolamento térmico composto por N escudos esféricos, finos e concêntricos, separados por vácuo. Para simplificar a análise, considere que as áreas de todos os escudos e do tanque são aproximadamente iguais a A . O escudo mais externo está exposto a um fluxo de energia solar constante F_0 .

O próprio tanque gera uma pequena quantidade de calor, P_{int} , devido a equipamentos de monitoramento. A carga térmica total (calor vindo de fora mais o gerado internamente) é removida por um criorefrigerador ativo, que possui uma capacidade máxima de refrigeração de P_{max} . O projeto do isolamento deve ser eficiente o suficiente para que a carga térmica total não exceda essa capacidade. Para toda a análise, considere o sistema em equilíbrio térmico, a temperatura do espaço profundo como nula e a constante de Stefan-Boltzmann como σ .

Parte A: O Modelo Ideal (Corpos Negros) - 4 pontos

Nesta parte, para uma primeira aproximação, vamos modelar o sistema como se todas as superfícies (o tanque e os N escudos) fossem **corpos negros perfeitos**, com emissividade e absorvidade iguais a 1.

- (a) **0.6 pontos** Em equilíbrio, um fluxo de calor líquido constante, Q_{net} , atravessa cada camada de vácuo. Escreva uma expressão para este fluxo entre o escudo i (em temperatura T_i) e o escudo adjacente $i + 1$ (em temperatura T_{i+1}).
- (b) **1.4 pontos** Mostre que a relação entre a temperatura do primeiro escudo (T_1) e a do tanque (T_{tanque}) pode ser escrita como uma função de N e Q_{net} .
- (c) **2 pontos** Utilize o balanço de energia no primeiro escudo (a condição de contorno externa) e a restrição da carga térmica no tanque (a condição de contorno interna) para encontrar uma expressão para o número mínimo de escudos, N_{ideal} , necessário para manter o tanque em $T_{\text{tanque}} \leq T_c$.

Parte B: O Modelo Realista (Superfícies Cinzas - 6 pontos)

Na realidade, os materiais usados para isolamento são altamente reflexivos. Considere agora que todas as superfícies têm uma emissividade ϵ constante e muito menor que 1.

- (d) **3 pontos** Primeiramente, derive uma expressão para o fluxo líquido de energia por unidade de tempo entre duas grandes superfícies paralelas com a mesma área A e emissividade ϵ , mantidas a temperaturas T_1 e T_2 .

¹Feito por Lucas Praça



- (e) **2 pontos** Utilizando o resultado do item anterior, encontre a nova expressão para o número mínimo de escudos, N_{real} , em função de ϵ e das demais variáveis do problema.
- (f) **1 pontos** Compare suas expressões para N_{real} e N_{ideal} . Para um valor de $\epsilon \ll 1$, qual dos dois números de escudos é maior? Justifique fisicamente por que o uso de materiais de baixa emissividade é um fator tão crucial para o projeto de isolamento térmico em missões espaciais.

Parte A: O Modelo Ideal (Corpos Negros)

- (a) Para corpos negros ($\epsilon = 1$), a potência irradiada por uma superfície de área A e temperatura T é dada pela Lei de Stefan-Boltzmann, $P = \sigma AT^4$. O fluxo de calor líquido, Q_{net} , entre o escudo i (temperatura T_i) e o escudo adjacente $i + 1$ (temperatura T_{i+1}) é a diferença entre a potência que cada um irradia em direção ao outro.

$$Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$$

$$Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$$

- (b) A partir do resultado do item (a), podemos isolar a diferença dos termos de temperatura: $T_i^4 - T_{i+1}^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$. Escrevemos essa relação para cada uma das N camadas de isolamento, desde o primeiro escudo até o tanque:

$$\begin{aligned} T_1^4 - T_2^4 &= \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \\ T_2^4 - T_3^4 &= \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \\ &\vdots \\ T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4 &= \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \end{aligned}$$

Somando essas N equações, os termos intermediários ($T_2^4, T_3^4, \dots, T_N^4$) se cancelam em uma soma telescópica:

$$(T_1^4 - T_2^4) + (T_2^4 - T_3^4) + \dots + (T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4) = \sum_{k=1}^N \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

- (c) Aplicamos as condições de contorno externa e interna.

Contorno Externo (Escudo 1): O balanço de energia no primeiro escudo iguala a potência absorvida do Sol à potência emitida para o espaço (fora) e para o escudo 2 (dentro).

$$\begin{aligned} P_{\text{abs}} &= P_{\text{emit}} \\ AF_0 &= \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}} \\ \Rightarrow T_1^4 &= \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \quad (1) \end{aligned}$$



Contorno Interno (Tanque): A carga térmica total no tanque ($Q_{\text{net}} + P_{\text{int}}$) deve ser igual à capacidade máxima de refrigeração (P_{max}) para o caso limite.

$$Q_{\text{net}} + P_{\text{int}} = P_{\text{max}} \implies Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}} \quad (2)$$

Substituindo (1) na equação do item (b), temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \right) - T_{\text{tanque}}^4 &= \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A} \\ AF_0 - Q_{\text{net}} - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}} \\ AF_0 - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= (N + 1)Q_{\text{net}} \end{aligned}$$

Impondo as condições $T_{\text{tanque}} = T_c$ e a expressão para Q_{net} de (2):

$$\begin{aligned} A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (N_{\text{ideal}} + 1)(P_{\text{max}} - P_{\text{int}}) \\ N_{\text{ideal}} &= \frac{A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \end{aligned}$$

Parte B: O Modelo Realista (Superfícies Cinzas)

- (d) A potência emitida pela superfície 1 é $P_1 = \epsilon \sigma AT_1^4$. A superfície 2 absorve uma fração ϵ e reflete $(1 - \epsilon)$. A energia refletida volta, é refletida novamente, e assim por diante. A potência total de 1 absorvida por 2 é a soma de uma progressão geométrica:

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^4 P_1 + \dots = \epsilon P_1 \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - \epsilon)^2]^k \\ Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \frac{\epsilon P_1}{1 - (1 - \epsilon)^2} = \frac{\epsilon P_1}{2\epsilon - \epsilon^2} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

O fluxo líquido Q_{net} é a diferença entre a energia transferida de 1 para 2 e de 2 para 1:

$$\begin{aligned} Q_{\text{net}} &= Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} - Q_{2 \rightarrow 1, \text{abs}} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} - \frac{P_2}{2 - \epsilon} \\ Q_{\text{net}} &= \frac{\epsilon \sigma A(T_1^4 - T_2^4)}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

- (e) A lógica é a mesma da Parte A, mas com a nova expressão para Q_{net} . Relação entre temperaturas:

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon} \right).$$

O balanço de energia do contorno externo agora inclui ϵ :

$$\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}} \implies T_1^4 = \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon \sigma A} \quad (3)$$



Substituindo (3) na relação de temperaturas:

$$\begin{aligned}\left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon\sigma A}\right) - T_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon}\right) \\ \epsilon A F_0 - Q_{\text{net}} - \epsilon\sigma A T_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}}(2 - \epsilon) \\ \epsilon A(F_0 - \sigma T_{\text{tanque}}^4) &= Q_{\text{net}}[1 + N(2 - \epsilon)]\end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno $T_{\text{tanque}} = T_c$ e $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$:

$$\begin{aligned}\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (P_{\text{max}} - P_{\text{int}})[1 + N_{\text{real}}(2 - \epsilon)] \\ N_{\text{real}} &= \frac{1}{2 - \epsilon} \left[\frac{\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \right]\end{aligned}$$

- (f) Para $\epsilon \ll 1$, o termo $\frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \approx \frac{\epsilon}{2}$ é muito menor que 1. Analisando as expressões, vemos que N_{real} é aproximadamente $\frac{\epsilon}{2 - \epsilon}$ vezes N_{ideal} . Portanto, para $\epsilon \ll 1$, N_{ideal} é **significativamente maior que** N_{real} .

O uso de materiais de baixa emissividade é crucial porque eles são, por consequência da Lei de Kirchhoff, **altamente reflexivos**. No modelo de corpos negros ($\epsilon = 1$), toda a energia incidente é absorvida e precisa ser reirradiada, transferindo calor eficientemente e exigindo muitos escudos para criar um grande gradiente de temperatura. No modelo realista ($\epsilon \ll 1$), quando a radiação de um escudo quente atinge o adjacente mais frio, a maior parte dessa radiação é **refletida** de volta. Essa reflexão atua como uma barreira extremamente eficaz ao fluxo de calor. Como a transferência de energia por camada é muito ineficiente, uma grande diferença de temperatura é mantida com facilidade, e, portanto, **muito menos escudos são necessários** para isolar o tanque criogênico.



Marking Scheme

Parte A — 4.0 pts	Pts
Aplicar a Lei de Stefan-Boltzmann para uma superfície, $P = \sigma AT^4$	0.2
Expressar o fluxo líquido como a diferença entre as potências irradiadas, $Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$	0.2
Chegar à expressão final correta, $Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$	0.2
Isolar a diferença de temperaturas, $T_i^4 - T_{i+1}^4 = Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Escrever a soma para as N camadas, demonstrando a compreensão do método	0.6
Identificar corretamente o cancelamento dos termos intermediários (soma telescópica)	0.4
Chegar à relação final correta, $T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Formular corretamente o balanço de energia para o primeiro escudo (contorno externo): $AF_0 = \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Formular a condição de carga térmica no tanque (contorno interno): $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$	0.6
Substituir a expressão para T_1^4 na equação do item (b)	0.4
Realizar a álgebra final para isolar e encontrar a expressão correta para N_{ideal}	0.4
Parte B — 6.0 pts	Pts
Identificar que a energia absorvida é uma soma de termos devido a múltiplas reflexões	0.4
Escrever corretamente os primeiros termos da série para a energia absorvida: $\epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \dots$	0.8
Identificar a expressão como uma Progressão Geométrica e seus elementos (termo inicial e razão)	0.6
Calcular corretamente a soma da série para a energia total absorvida vinda de uma placa	0.6
Formular o fluxo líquido como a diferença das duas transferências de energia e chegar à expressão final	0.6
Adaptar a lógica da soma telescópica (item b) para a nova fórmula de Q_{net}	0.6
Formular o novo balanço de energia para o primeiro escudo com $\epsilon < 1$: $\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Combinar corretamente as equações e condições de contorno	0.4
Realizar a álgebra final para isolar e encontrar a expressão correta para N_{real}	0.4
Concluir corretamente que $N_{\text{ideal}} > N_{\text{real}}$ para $\epsilon \ll 1$	0.2
Justificar fisicamente associando baixa emissividade (ϵ) com alta refletividade ($1 - \epsilon$)	0.4
Explicar que a reflexão atua como uma barreira ao fluxo de calor, tornando o isolamento mais eficiente	0.4
Justificar apenas com "baixa emissão" sem mencionar o papel crucial da reflexão	-0.2
TOTAL	10.0



Questão 2: Óptica do Café - 10 pontos²

Quando uma xícara de café é iluminada por uma lâmpada ou pela luz do Sol, é comum notar formas curvas brilhantes na superfície do líquido ou no fundo da xícara. Essas formas, conhecidas como **cáusticas**, resultam da reflexão ou refração dos raios de luz, que se concentram em determinadas regiões do espaço. Trata-se de um exemplo cotidiano impressionante de como a geometria de uma superfície curva pode concentrar a luz, formando padrões ao mesmo tempo esteticamente marcantes e fisicamente relevantes. O estudo das cáusticas envolve conceitos da óptica geométrica, como a lei da reflexão, e está relacionado a problemas clássicos que também aparecem em sistemas ópticos e astronômicos avançados.

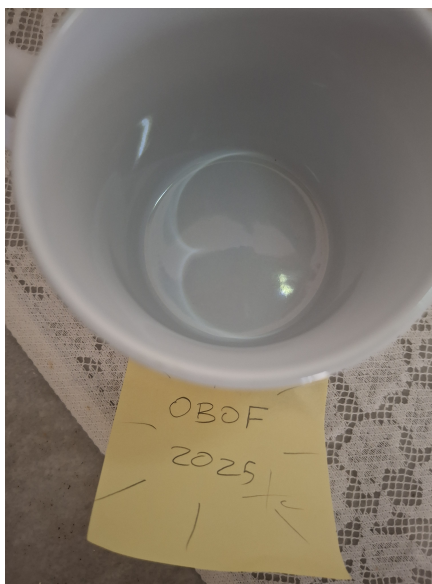


Figura 1: Padrão cáustico em uma caneca de café.

- (A) **6 pontos** Seja C um pequeno espelho convexo de distância focal f , e seja Γ um círculo de diâmetro d_1 tangente a C . Suponha que P seja uma fonte pontual de luz localizada em Γ . Mostre que o lugar geométrico de todas as imagens de P é outro círculo Ω , tangente a C , com diâmetro d_2 satisfazendo

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

- (B) **4 pontos** Seja P uma fonte de luz pontual fixa e seja Γ um espelho circular de raio R . Mostre que
- se $P \in \Gamma$, a cáustica é um **cardioide**;
 - se P está no infinito, a cáustica é metade de um **nefroide**.

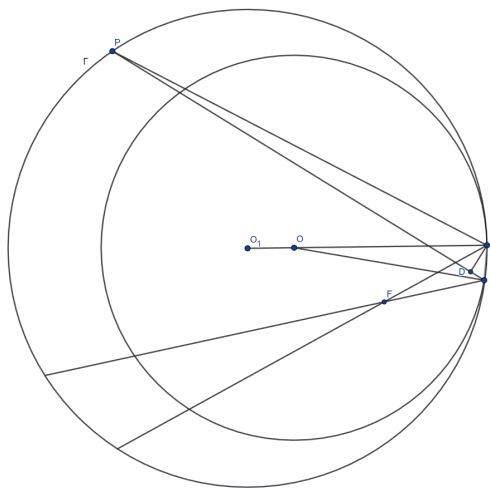
Em ambos os casos, essas curvas podem ser geradas como o caminho traçado por um ponto na circunferência de um círculo que rola sem deslizar em torno de outro círculo fixo de raio diferente. Determine os raios desses círculos, esboce as curvas e explique por que essa construção de círculos rolantes não se aplica no caso geral.

²Feito por Paulo Vinícius



Parte A: Lugar Geométrico da Imagem

- (a) Seja $\angle OCP = \theta$, onde O é o centro de curvatura do espelho C , e seja R um ponto muito próximo de C tal que $\angle RPC = \delta\theta$. Denotemos por F a imagem de P (ver figura).



Como $\triangle POC$ é isósceles, temos

$$\overline{PC} = 2R_1 \cos \theta = d_1 \cos \theta.$$

Seja D o pé da perpendicular de C sobre $\overline{PR}$. Para $\delta\theta$ pequeno, podemos aproximar

$$\overline{CD} \approx \overline{PC} \cdot \delta\theta = d_1 \cos \theta \delta\theta, \quad \angle DCR \approx \theta.$$

Logo,

$$\overline{CD} = \overline{CR} \cos \theta \implies \overline{CR} = d_1 \delta\theta.$$

Como $\overline{CR}$ é pequeno e $f = r/2$ para espelhos convexos, temos

$$R_O \cdot \angle ROC \approx \overline{CR} \implies \angle ROC = \frac{d_1 \delta\theta}{2f}.$$

Pela simetria, $\triangle OCR$ é aproximadamente isósceles, de modo que

$$\angle ORC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \angle ROC = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f}.$$

Seja $i = \angle PRO$ o ângulo de incidência do raio $\overline{PR}$. No triângulo $\triangle RPC$ temos

$$\begin{cases} \angle RPC = \delta\theta, \\ \angle PRC = \angle ORC - i = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} - i, \\ \angle PCR = \angle OCR + \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} + \theta. \end{cases}$$

Dessa relação concluímos

$$i = \theta - \left(\frac{d_1}{2f} - 1 \right) \delta\theta.$$



Agora consideremos $\triangle CFR$. Seus ângulos são:

$$\begin{cases} \angle CFR = \angle OCR - \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta \theta}{4f} - \theta, \\ \angle FRC = \angle ORC + i = \frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta \theta, \\ \angle CFR = \pi - \angle CFR - \angle FRC = \left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta. \end{cases}$$

Aplicando a lei dos senos em $\triangle CFR$:

$$\frac{\overline{CR}}{\sin(\angle CFR)} = \frac{\overline{CF}}{\sin(\angle FRC)}.$$

Substituindo as aproximações,

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]} \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta \theta \right].$$

Como $\delta \theta$ é pequeno, o último seno é aproximadamente $\cos \theta$, obtendo

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta \cos \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]}.$$

Usando $\sin \phi \approx \phi$ para ϕ pequeno, temos

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \cos \theta}{\frac{d_1}{f} - 1} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Agora construa um ponto O_2 em $\overline{OC}$ tal que $\overline{O_2 C} = \overline{O_2 F}$. Assim,

$$\overline{O_2 C} = \overline{O_2 F} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} \right)},$$

o que mostra que F pertence a um círculo de diâmetro

$$d_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}} \quad \square$$

Parte B: Cáusticas Especiais

- (b) Pelo resultado da parte (A), sabemos que a imagem I da fonte P se encontra na interseção entre um raio refletido e um círculo de certo raio, como ilustrado na Figura 2.

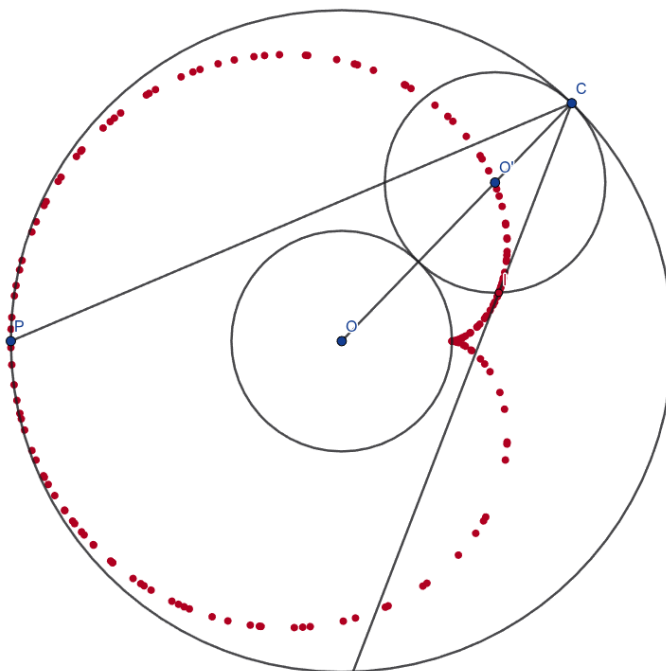


Figura 2: Você pode ver uma animação interativa [aqui](#).

Usando a fórmula obtida na parte (A), o círculo associado a C tem raio r dado por

$$\frac{1}{d_{\Gamma}} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{f_{\Gamma}} \implies r = \frac{R}{3}.$$

Como r é constante, podemos construir outro círculo de raio

$$r' = R - 2r = \frac{R}{3},$$

que permanece sempre tangente ao círculo que contém I .

Observe agora a relação angular:

$$\angle OO'I = 2\angle CO'I = 2\angle PCO = \pi - \angle POC.$$

Como $\angle OO'C + \angle O'OI$ é constante, a velocidade angular de O' em relação a O coincide com a de I em relação a O' . Como os dois círculos têm raios iguais, o ponto de contato permanece em repouso. Isso mostra que o círculo externo rola externamente sobre o círculo fixo sem deslizar, produzindo o cardioide como cáustica.

No caso em que a fonte está no infinito, a construção muda ligeiramente. No lado esquerdo, a cáustica não se forma devido a restrições geométricas (ver Figura 3). No lado direito, desprezando o termo $\frac{1}{d_1}$ na relação da parte (A), obtemos

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{f_{\Gamma}} \implies r = \frac{R}{4}.$$

Assim, o círculo auxiliar tem raio

$$r' = R - 2r = \frac{R}{2}.$$

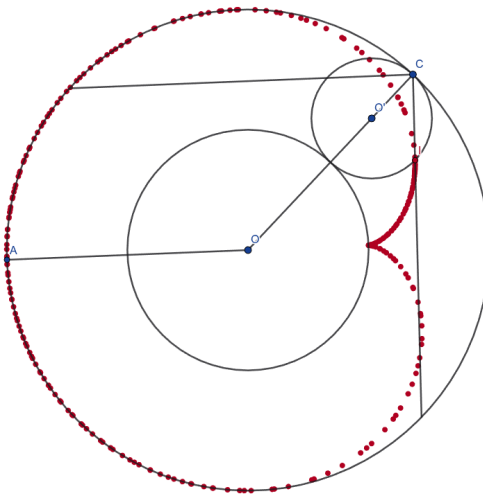


Figura 3: Você pode ver uma animação interativa [aqui](#).

Por uma simples marcação de ângulo, temos

$$\angle AOC = \pi - \angle O'CI \implies \angle AOC + 2\angle OO'I \text{ é constante.}$$

Como a razão dos raios é 2 : 1, o ponto de contato permanece fixo, o que prova que o círculo interno rola sem deslizar. Essa construção gera metade de um nefróide como cáustica.

Nos dois casos especiais ($P \in \Gamma$ ou P no infinito), a propriedade essencial é que d_1 é constante, permitindo a construção com círculos rolantes. Para uma posição geral de P , d_1 varia com θ , de modo que a construção não funciona e a cáustica deixa de ser uma roleta padrão.

Observação: O raio de curvatura do cardioide e do nefróide pode ser calculado diretamente aplicando argumentos cinemáticos à construção dos círculos rolantes.

Parte (A) — 6 pts	Pts
Construção geométrica do problema	1.0
Relação $\overline{PC} = d_1 \cos \theta$	1.0
Aproximação para $\delta\theta$ pequeno e $\overline{CR} = d_1 \delta\theta$	1.0
Cálculo dos ângulos de $\triangle CFR$ e outros ângulos auxiliares (somente 0.5pt por ângulos como $\angle OCR$ e $\angle ORC$)	1.0
Lei dos senos em $\triangle CFR$	1.0
Conclusão $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$	1.0
Parte (B) — 4 pts	Pts
Aplicação da fórmula da Parte (A) para os raios auxiliares	1.0
Construção geométrica da imagem	1.0
Condição de não-deslizamento	1.0
Solução para o cardioide	0.3
Solução para o nefroide	0.5
Não mencionar a limitação geométrica no nefroide	-0.3
Comentário sobre por que o método falha no caso geral	0.2



Questão 3: Ondas em uma Corda - 10 pontos³

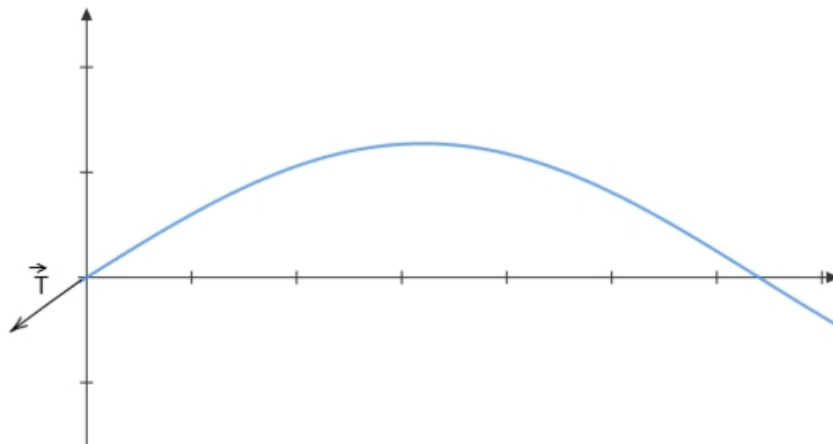


Figura 4: Configuração inicial da corda sob tração $\vec{T}$.

Na figura acima, temos uma corda de densidade linear de massa ρ a qual é posta a oscilar por uma tração T . Essa força irá propagar energia para a corda que apresentará características interessantes. Nossa intenção é partir de um caso simples e chegar a uma melhor compreensão de ondas no geral.

Parte A: A Equação de Onda - 3 pontos

- (a) **2 pontos** Monte a equação diferencial de movimento do sistema.
- (b) **1 ponto** Separe a equação em espacial e temporal [Dica: Uma função $f(x; t)$ pode ser escrita como: $\xi(x)\varphi(t)$].

Parte B: Energia e Potência - 4 pontos

Utilizaremos como solução:

$$y(x; t) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t)}] = A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y(0; 0) = 0 \quad v(0; 0) = A\omega$$

- (c) **2 pontos** Calcule a potência média da energia fornecida à corda.
- (d) **2 pontos** Expresse as fórmulas (Na forma integral) da energia cinética e potencial total do sistema.

Parte C: Princípio da Mínima Ação - 3 pontos

Há uma grandeza na física a qual é útil desde a relatividade geral até a mecânica quântica e seu nome é ação que é definida como:

$$S = \int L(y; \dot{y}; t) dt; \quad L = T - V$$

Entretanto, quando temos sistemas que, diferentemente de partículas, estão dispersos no espaço como cordas é preciso usar $\mathcal{L}$ a qual é definida como a densidade de L . Temos portanto nossa nova expressão:

$$S = \int \mathcal{L}(y; \frac{\partial y}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial x}; x; t) dx dt$$

³Feito por Yvens Amaral



É de conhecimento geral que a natureza evolui de forma a buscar as situações mais estáveis, sendo elas as de mínima ação. Vamos então minimizar a ação. Dada uma deformação $y' = y + \epsilon\alpha(x)\beta(t)$, com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$, e minimizando a ação por integração por partes, chegamos na seguinte equação (Equação de Euler-Lagrange):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'})}{\partial t} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'})}{\partial x} = 0$$

- (e) **3 pontos** Utilizando os resultados do item d) e a fórmula acima monte a equação de movimento do sistema e compare com a do item a).

Parte A: A Equação de Onda

- (a) Aplicamos a 2ª Lei de Newton ($F_y = ma_y$) a um segmento infinitesimal da corda de comprimento Δx e massa $dm = \rho\Delta x$. A força vertical líquida é a diferença das componentes verticais da tensão T nas extremidades. Na aproximação de pequenos ângulos, $T_y \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} F_{\text{net},y} &= T_y(x + \Delta x) - T_y(x) \\ (dm)a_y &= T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \\ (\rho\Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \end{aligned}$$

Dividindo por Δx e tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right)}{\Delta x} \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \implies \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

- (b) Assumimos a solução separável $y(x, t) = \xi(x)\varphi(t)$. Substituímos na equação de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\xi(x)\varphi(t)] &= \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\xi(x)\varphi(t)] \\ \xi(x) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{T}{\rho} \varphi(t) \frac{d^2 \xi}{dx^2} \end{aligned}$$

Dividimos por $\xi(x)\varphi(t)$ para separar as variáveis:

$$\underbrace{\frac{1}{\varphi(t)} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}}_{\text{Função de } t} = \underbrace{\frac{T}{\rho} \frac{1}{\xi(x)} \frac{d^2 \xi}{dx^2}}_{\text{Função de } x} = \text{Constante}$$



Para soluções oscilatórias, a constante deve ser negativa, $-\omega^2$.

$$\text{Eq. Temporal: } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi(t) = 0$$

$$\text{Eq. Espacial: } \frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{\rho\omega^2}{T}\right)\xi(x) = 0$$

Definindo $k^2 = \rho\omega^2/T$, a equação espacial torna-se $\frac{d^2\xi}{dx^2} + k^2\xi(x) = 0$.

Parte B: Energia e Potência

(c) A potência instantânea P é a força vertical $F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}$ multiplicada pela velocidade vertical $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$.

$$P(t) = F_y v_y = \left(-T\frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Usando a solução $y(x, t) = -A \sin(kx - \omega t)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(kx - \omega t)$$

Substituindo na potência:

$$P(t) = -T(-Ak \cos(\cdot))(A\omega \cos(\cdot)) = Tk\omega A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

A potência média $\bar{P}$ é a média temporal. Como $\langle \cos^2(\cdot) \rangle = 1/2$:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}Tk\omega A^2$$

(Usando $T = \rho v^2$ e $k = \omega/v$, também $\bar{P} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2$)

(d) Para a Energia Cinética (E_K), somamos $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ e passamos ao contínuo, onde $m_i \rightarrow dm = \rho dx$:

$$E_K = \sum \frac{1}{2}m_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 \rightarrow E_K = \int \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Para a Energia Potencial (E_P), somamos a energia de estiramento $T \cdot \Delta L$. O estiramento $\Delta L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.

$$E_P = \sum T \cdot \Delta L_i \rightarrow E_P = \int \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Parte C: Princípio da Mínima Ação

(e) A densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$ é $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$, onde $\mathcal{K}$ e $\mathcal{V}$ são as densidades de energia (os termos dentro das integrais do item (d)).

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}, y') = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho}{2} \dot{y}^2 - \frac{T}{2} (y')^2$$



A Equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0$$

Calculamos cada termo:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\rho}{2} \dot{y}^2 \right) = \rho \dot{y}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{T}{2} (y')^2 \right) = -Ty'$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(-Ty') &= 0 \\ -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\ \implies T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Esta equação é idêntica à Equação de Onda derivada na Parte (a).

Marking Scheme

Parte A — 3.0 pts	Pts
(a) Aplicar a 2ª Lei de Newton e a aproximação $T_y \approx T(\partial y / \partial x)$	1.0
(a) Tomar o limite $\Delta x \rightarrow 0$ para chegar à Equação de Onda correta	1.0
(b) Substituir $y = \xi(x)\varphi(t)$ e separar as variáveis corretamente	0.5
(b) Mostrar as duas Equações Diferenciais Ordinárias (Temporal e Espacial)	0.5
Parte B — 4.0 pts	Pts
(c) Escrever a fórmula correta para a potência instantânea $P = F_y v_y$	0.5
(c) Calcular as derivadas $\partial y / \partial x$ e $\partial y / \partial t$ e encontrar $P(t)$	1.0
(c) Calcular a média temporal $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ e obter $\bar{P}$ final	0.5
(d) Derivar a forma integral para a Energia Cinética (E_K)	1.0
(d) Derivar a forma integral para a Energia Potencial (E_P)	1.0
Parte C — 3.0 pts	Pts
(e) Escrever a densidade Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ corretamente	1.0
(e) Calcular as derivadas parciais $\partial \mathcal{L} / \partial y$, $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{y}$ e $\partial \mathcal{L} / \partial y'$	1.0
(e) Substituir na Equação de Euler-Lagrange e mostrar que resulta na Eq. de Onda	1.0
TOTAL	10.0