

Olimpiada Brasileña de Física Online

2ª Fase - 26 y 27 de octubre de 2025

Nombre: _____

Grado: _____

César Lattes
Nivel Abierto
Español

Instrucciones del Examen

- I. Este examen consta de **3** preguntas.
- II. La duración máxima de este examen es de **cuatro horas**. Además del tiempo de examen, se concederán **5 minutos** para completar la hoja de respuestas en línea.
- III. El examen debe realizarse individualmente y no está permitido discutir las soluciones de las preguntas durante el período del examen **26 y 27 de octubre de 2025**.
- IV. Si es necesario, y a menos que se indique lo contrario, use: aceleración gravitacional en la superficie de la Tierra $g = 10 \text{ m/s}^2$; calor específico del agua líquida $c_a = 1 \text{ cal/(g}^\circ\text{C)}$; calor latente de fusión del hielo $L = 80 \text{ cal/g}$; $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ J}$; densidad del agua líquida $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$; constante de Wien $b = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$; constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$; energía del hidrógeno en estado fundamental $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Apoyo:





Curiosidades:

Cesare Mansueto Giulio Lattes, más conocido como César Lattes (Curitiba, 11 de julio de 1924 — Campinas, 8 de marzo de 2005), fue un físico brasileño, codescubridor del mesón- π (mesón pi o pión), descubrimiento que llevó a la concesión del Premio Nobel de Física de 1950 a Cecil Frank Powell, líder de la investigación. Lattes es uno de los físicos más ilustres de Brasil y su trabajo fue fundamental para el desarrollo de la física atómica en el país. Fue también un gran líder en la comunidad científica brasileña y uno de los principales responsables de la creación del Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).



Pregunta 1: Escudo Térmico - 10 puntos¹

Una futura misión a Marte planea utilizar un nuevo motor que requiere que su combustible se mantenga a una temperatura extremadamente baja, por debajo de su punto crítico de ebullición, T_c . Para evitar que el combustible se evapore, el tanque esférico que lo almacena está rodeado por un sistema de aislamiento térmico compuesto por N escudos esféricos, finos y concéntricos, separados por vacío. Para simplificar el análisis, considere que las áreas de todos los escudos y del tanque son aproximadamente iguales a A . El escudo más externo está expuesto a un flujo de energía solar constante F_0 .

El propio tanque genera una pequeña cantidad de calor, P_{int} , debido a equipos de monitoreo. La carga térmica total (calor del exterior más el generado internamente) es eliminada por un criorefrigerador activo, que tiene una capacidad máxima de refrigeración de P_{max} . El diseño del aislamiento debe ser lo suficientemente eficiente para que la carga térmica total no exceda esta capacidad. Para todo el análisis, considere el sistema en equilibrio térmico, la temperatura del espacio profundo como nula, y la constante de Stefan-Boltzmann como σ .

Parte A: El Modelo Ideal (Cuerpos Negros) - 4 puntos

En esta parte, como primera aproximación, modelaremos el sistema como si todas las superficies (el tanque y los N escudos) fueran **cuerpos negros perfectos**, con emisividad y absorptividad iguales a 1.

- 0.6 puntos** En equilibrio, un flujo de calor neto constante, Q_{net} , atraviesa cada capa de vacío. Escriba una expresión para este flujo entre el escudo i (a temperatura T_i) y el escudo adyacente $i + 1$ (a temperatura T_{i+1}).
- 1.4 puntos** Muestre que la relación entre la temperatura del primer escudo (T_1) y la del tanque (T_{tanque}) puede escribirse como una función de N y Q_{net} .
- 2 puntos** Utilice el balance de energía en el primer escudo (la condición de contorno externa) y la restricción de carga térmica en el tanque (la condición de contorno interna) para encontrar una expresión para el número mínimo de escudos, N_{ideal} , necesario para mantener el tanque en $T_{\text{tanque}} \leq T_c$.

Parte B: El Modelo Realista (Superficies Grises) - 6 puntos

En realidad, los materiales usados para aislamiento son altamente reflectantes. Considere ahora que todas las superficies tienen una emisividad constante ϵ mucho menor que 1.

- 3 puntos** Primero, derive una expresión para el flujo neto de energía por unidad de tiempo entre dos grandes superficies paralelas con la misma área A y emisividad ϵ , mantenidas a temperaturas T_1 y T_2 .

¹Por Lucas Praça



- (e) **2 puntos** Utilizando el resultado del ítem anterior, encuentre la nueva expresión para el número mínimo de escudos, N_{real} , en función de ϵ y las demás variables del problema.
- (f) **1 punto** Compare sus expresiones para N_{real} y N_{ideal} . Para un valor de $\epsilon \ll 1$, ¿cuál de los dos números de escudos es mayor? Justifique físicamente por qué el uso de materiales de baja emisividad es un factor tan crucial para el diseño de aislamiento térmico en misiones espaciales.

Parte A: El Modelo Ideal (Cuerpos Negros)

- (a) Para cuerpos negros ($\epsilon = 1$), la potencia irradiada por una superficie de área A y temperatura T es dada por la Ley de Stefan-Boltzmann, $P = \sigma AT^4$. El flujo de calor neto, Q_{net} , entre el escudo i (temperatura T_i) y el escudo adyacente $i + 1$ (temperatura T_{i+1}) es la diferencia entre la potencia que cada uno irradia hacia el otro.

$$Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$$

$$Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$$

- (b) A partir del resultado del ítem (a), podemos despejar la diferencia de los términos de temperatura: $T_i^4 - T_{i+1}^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$. Escribimos esta relación para cada una de las N capas de aislamiento, desde el primer escudo hasta el tanque:

$$T_1^4 - T_2^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$T_2^4 - T_3^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$\vdots$$

$$T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

Sumando estas N ecuaciones, los términos intermedios ($T_2^4, T_3^4, \dots, T_N^4$) se cancelan en una suma telescópica:

$$(T_1^4 - T_2^4) + (T_2^4 - T_3^4) + \dots + (T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4) = \sum_{k=1}^N \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

- (c) Aplicamos las condiciones de contorno externa e interna.

Contorno Externo (Escudo 1): El balance de energía en el primer escudo iguala la potencia absorbida del Sol a la potencia emitida hacia el espacio (fuera) y hacia el escudo 2 (dentro).

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{emit}}$$

$$AF_0 = \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$$

$$\implies T_1^4 = \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \quad (1)$$



Contorno Interno (Tanque): La carga térmica total en el tanque ($Q_{\text{net}} + P_{\text{int}}$) debe ser igual a la capacidad máxima de refrigeración (P_{max}) para el caso límite.

$$Q_{\text{net}} + P_{\text{int}} = P_{\text{max}} \implies Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en la ecuación del ítem (b), tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \right) - T_{\text{tanque}}^4 &= \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A} \\ AF_0 - Q_{\text{net}} - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}} \\ AF_0 - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= (N + 1)Q_{\text{net}} \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones $T_{\text{tanque}} = T_c$ y la expresión para Q_{net} de (2):

$$\begin{aligned} A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (N_{\text{ideal}} + 1)(P_{\text{max}} - P_{\text{int}}) \\ N_{\text{ideal}} &= \frac{A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \end{aligned}$$

Parte B: El Modelo Realista (Superficies Grises)

- (d) La potencia emitida por la superficie 1 es $P_1 = \epsilon \sigma AT_1^4$. La superficie 2 absorbe una fracción ϵ y refleja $(1 - \epsilon)$. La energía reflejada vuelve, es reflejada nuevamente, y así sucesivamente. La potencia total de 1 absorbida por 2 es la suma de una progresión geométrica:

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^4 P_1 + \dots = \epsilon P_1 \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - \epsilon)^2]^k \\ Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \frac{\epsilon P_1}{1 - (1 - \epsilon)^2} = \frac{\epsilon P_1}{2\epsilon - \epsilon^2} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

El flujo neto Q_{net} es la diferencia entre la energía transferida de 1 a 2 y de 2 a 1:

$$\begin{aligned} Q_{\text{net}} &= Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} - Q_{2 \rightarrow 1, \text{abs}} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} - \frac{P_2}{2 - \epsilon} \\ Q_{\text{net}} &= \frac{\epsilon \sigma A(T_1^4 - T_2^4)}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

- (e) La lógica es la misma de la Parte A, pero con la nueva expresión para Q_{net} . Relación entre temperaturas:

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon} \right).$$

El balance de energía del contorno externo ahora incluye ϵ :

$$\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}} \implies T_1^4 = \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon \sigma A} \quad (3)$$



Sustituyendo (3) en la relación de temperaturas:

$$\begin{aligned}\left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon\sigma A}\right) - T_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon}\right) \\ \epsilon A F_0 - Q_{\text{net}} - \epsilon\sigma A T_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}}(2 - \epsilon) \\ \epsilon A(F_0 - \sigma T_{\text{tanque}}^4) &= Q_{\text{net}}[1 + N(2 - \epsilon)]\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno $T_{\text{tanque}} = T_c$ y $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$:

$$\begin{aligned}\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (P_{\text{max}} - P_{\text{int}})[1 + N_{\text{real}}(2 - \epsilon)] \\ N_{\text{real}} &= \frac{1}{2 - \epsilon} \left[\frac{\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \right]\end{aligned}$$

- (f) Para $\epsilon \ll 1$, el término $\frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \approx \frac{\epsilon}{2}$ es mucho menor que 1. Analizando las expresiones, vemos que N_{real} es aproximadamente $\frac{\epsilon}{2 - \epsilon}$ veces N_{ideal} . Por lo tanto, para $\epsilon \ll 1$, N_{ideal} es **significativamente mayor** que N_{real} .

El uso de materiales de baja emisividad es crucial porque son, por consecuencia de la Ley de Kirchhoff, **altamente reflectantes**. En el modelo de cuerpos negros ($\epsilon = 1$), toda la energía incidente es absorbida y necesita ser reirradiada, transfiriendo calor eficientemente y exigiendo muchos escudos para crear un gran gradiente de temperatura. En el modelo realista ($\epsilon \ll 1$), cuando la radiación de un escudo caliente alcanza el adyacente más frío, la mayor parte de esa radiación es **reflejada** de vuelta. Esta reflexión actúa como una barrera extremadamente eficaz al flujo de calor. Como la transferencia de energía por capa es muy ineficiente, una gran diferencia de temperatura se mantiene con facilidad, y, por lo tanto, **se necesitan muchos menos escudos** para aislar el tanque criogénico.



Esquema de Calificación

Parte A — 4.0 pts	Pts
Aplicar la Ley de Stefan-Boltzmann para una superficie, $P = \sigma AT^4$	0.2
Expresar el flujo neto como la diferencia entre las potencias irradiadas, $Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$	0.2
Llegar a la expresión final correcta, $Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$	0.2
Despejar la diferencia de temperaturas, $T_i^4 - T_{i+1}^4 = Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Escribir la suma para las N capas, demostrando la comprensión del método	0.6
Identificar correctamente la cancelación de los términos intermedios (suma telescópica)	0.4
Llegar a la relación final correcta, $T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Formular correctamente el balance de energía para el primer escudo (contorno externo): $AF_0 = \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Formular la condición de carga térmica en el tanque (contorno interno): $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$	0.6
Sustituir la expresión para T_1^4 en la ecuación del ítem (b)	0.4
Realizar el álgebra final para despejar y encontrar la expresión correcta para N_{ideal}	0.4
Parte B — 6.0 pts	Pts
Identificar que la energía absorbida es una suma de términos debido a múltiples reflexiones	0.4
Escribir correctamente los primeros términos de la serie para la energía absorbida: $\epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \dots$	0.8
Identificar la expresión como una Progresión Geométrica y sus elementos (término inicial y razón)	0.6
Calcular correctamente la suma de la serie para la energía total absorbida venida de una placa	0.6
Formular el flujo neto como la diferencia de las dos transferencias de energía y llegar a la expresión final	0.6
Adaptar la lógica de la suma telescópica (ítem b) para la nueva fórmula de Q_{net}	0.6
Formular el nuevo balance de energía para el primer escudo con $\epsilon < 1$: $\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Combinar correctamente las ecuaciones y condiciones de contorno	0.4
Realizar el álgebra final para despejar y encontrar la expresión correcta para N_{real}	0.4
Concluir correctamente que $N_{\text{ideal}} > N_{\text{real}}$ para $\epsilon \ll 1$	0.2
Justificar físicamente asociando baja emisividad (ϵ) con alta reflectividad ($1 - \epsilon$)	0.4
Explicar que la reflexión actúa como una barrera al flujo de calor, tornando el aislamiento más eficiente	0.4
Justificar solo con "baja emisión" sin mencionar el papel crucial de la reflexión	-0.2
TOTAL	10.0



Pregunta 2: Óptica del Café - 10 puntos²

Cuando una taza de café es iluminada por una lámpara o la luz del Sol, es común notar formas curvas brillantes en la superficie del líquido o en el fondo de la taza. Estas formas, conocidas como **cáusticas**, resultan de la reflexión o refracción de los rayos de luz, que se concentran en determinadas regiones del espacio. Se trata de un ejemplo cotidiano impresionante de cómo la geometría de una superficie curva puede concentrar la luz, formando patrones al mismo tiempo estéticamente llamativos y físicamente relevantes. El estudio de las cáusticas involucra conceptos de la óptica geométrica, como la ley de la reflexión, y está relacionado con problemas clásicos que también aparecen en sistemas ópticos y astronómicos avanzados.

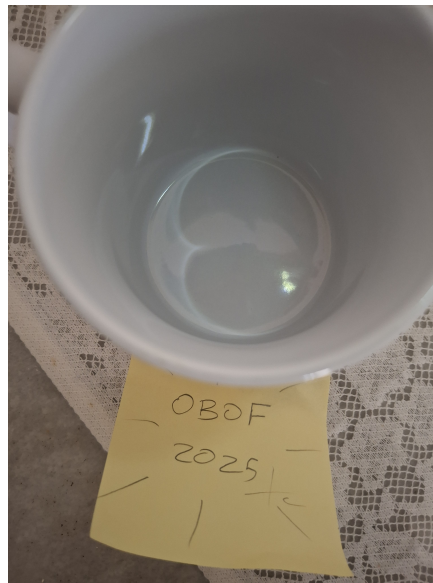


Figura 1: Patrón de cáustica en una taza de café.

- (A) **6 puntos** Sea C un pequeño espejo convexo de distancia focal f , y sea Γ un círculo de diámetro d_1 tangente a C . Suponga que P es una fuente de luz puntual localizada en Γ . Muestre que el lugar geométrico de todas las imágenes de P es otro círculo Ω , tangente a C , con diámetro d_2 que satisface

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

- (B) **4 puntos** Sea P una fuente de luz puntual fija y sea Γ un espejo circular de radio R . Muestre que
- si $P \in \Gamma$, la cáustica es un **cardioide**;
 - si P está en el infinito, la cáustica es la mitad de un **nefroide**.

En ambos casos, estas curvas pueden generarse como el camino trazado por un punto en la circunferencia de un círculo que rueda sin deslizar sobre otro círculo fijo de radio diferente. Determine los radios de estos círculos, esboce las curvas y explique por qué esta construcción de círculos rodantes no se aplica en el caso general.

²Por Paulo Vinícius



Parte A: Lugar Geométrico de la Imagen

- (a) Sea $\angle OCP = \theta$, donde O es el centro de curvatura del espejo C , y sea R un punto muy próximo de C tal que $\angle RPC = \delta\theta$. Denotemos por F la imagen de P (ver figura).

Como $\triangle POC$ es isósceles, tenemos

$$\overline{PC} = 2R_1 \cos \theta = d_1 \cos \theta.$$

Sea D el pie de la perpendicular de C sobre \overline{PR} . Para $\delta\theta$ pequeño, podemos aproximar

$$\overline{CD} \approx \overline{PC} \cdot \delta\theta = d_1 \cos \theta \delta\theta, \quad \angle DCR \approx \theta.$$

Logo,

$$\overline{CD} = \overline{CR} \cos \theta \implies \overline{CR} = d_1 \delta\theta.$$

Como \overline{CR} es pequeño y $f = r/2$ para espejos convexos, tenemos

$$R_O \cdot \angle ROC \approx \overline{CR} \implies \angle ROC = \frac{d_1 \delta\theta}{2f}.$$

Pela simetría, $\triangle OCR$ es aproximadamente isósceles, de modo que

$$\angle ORC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \angle ROC = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f}.$$

Sea $i = \angle PRO$ el ángulo de incidencia del rayo \overline{PR} . En el triángulo $\triangle RPC$ tenemos

$$\begin{cases} \angle RPC = \delta\theta, \\ \angle PRC = \angle ORC - i = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} - i, \\ \angle PCR = \angle OCR + \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} + \theta. \end{cases}$$

De esta relación concluimos

$$i = \theta - \left(\frac{d_1}{2f} - 1 \right) \delta\theta.$$

Ahora consideremos $\triangle CFR$. Sus ángulos son:

$$\begin{cases} \angle CFR = \angle OCR - \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} - \theta, \\ \angle FRC = \angle ORC + i = \frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta\theta, \\ \angle CFR = \pi - \angle CFR - \angle FRC = \left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta\theta. \end{cases}$$

Aplicando la ley de los senos en $\triangle CFR$:

$$\frac{\overline{CR}}{\sin(\angle CFR)} = \frac{\overline{CF}}{\sin(\angle FRC)}.$$



Sustituyendo las aproximaciones,

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]} \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta \theta \right].$$

Como $\delta \theta$ es pequeño, el último seno es aproximadamente $\cos \theta$, obteniendo

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta \cos \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]}.$$

Usando $\sin \phi \approx \phi$ para ϕ pequeño, tenemos

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \cos \theta}{\frac{d_1}{f} - 1} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Ahora construya un punto O_2 en \overline{OC} tal que $\overline{O_2C} = \overline{O_2F}$. Así,

$$\overline{O_2C} = \overline{O_2F} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} \right)},$$

lo que muestra que F pertenece a un círculo de diámetro

$$d_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}} \quad \square$$

Parte B: Cáusticas Especiales

- (b) Por el resultado de la parte (A), sabemos que la imagen I de la fuente P se encuentra en la intersección entre un rayo reflejado y un círculo de cierto radio, como se ilustra en la Figura ??.

Usando la fórmula obtenida en la parte (A), el círculo asociado a C tiene radio r dado por

$$\frac{1}{d_\Gamma} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{f_\Gamma} \implies r = \frac{R}{3}.$$

Como r es constante, podemos construir otro círculo de radio

$$r' = R - 2r = \frac{R}{3},$$

que permanece siempre tangente al círculo que contiene I .

Observe ahora la relación angular:

$$\angle OO'I = 2\angle CO'I = 2\angle PCO = \pi - \angle POC.$$

Como $\angle OO'C + \angle O'OI$ es constante, la velocidad angular de O' en relación a O coincide con la de I en relación a O' . Como los dos círculos tienen radios iguales, el punto de contacto permanece



Olimpiada Brasileña de Física Online



en reposo. Esto muestra que el círculo externo rueda externamente sobre el círculo fijo sin deslizar, produciendo el cardioide como cáustica.

En el caso en que la fuente está en el infinito, la construcción cambia ligeramente. En el lado izquierdo, la cáustica no se forma debido a restricciones geométricas (ver Figura ??). En el lado derecho, despreciando el término $\frac{1}{d_1}$ en la relación de la parte (A), obtenemos

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{f_\Gamma} \implies r = \frac{R}{4}.$$

Así, el círculo auxiliar tiene radio

$$r' = R - 2r = \frac{R}{2}.$$

Por una simple marcación de ángulo, tenemos

$$\angle AOC = \pi - \angle O'CI \implies \angle AOC + 2\angle OO'I \text{ es constante.}$$

Como la razón de los radios es 2 : 1, el punto de contacto permanece fijo, lo que prueba que el círculo interno rueda sin deslizar. Esta construcción genera la mitad de un nefroide como cáustica.

En los dos casos especiales ($P \in \Gamma$ o P en el infinito), la propiedad esencial es que d_1 es constante, permitiendo la construcción con círculos rodantes. Para una posición general de P , d_1 varía con θ , de modo que la construcción no funciona y la cáustica deja de ser una ruleta estándar.

Observación: El radio de curvatura del cardioide y del nefroide puede calcularse directamente aplicando argumentos cinemáticos a la construcción de los círculos rodantes.

Parte (A) — 6 pts	Pts
Construcción geométrica del problema	1.0
Relación $\overline{PC} = d_1 \cos \theta$	1.0
Aproximación para $\delta\theta$ pequeño y $\overline{CR} = d_1 \delta\theta$	1.0
Cálculo de los ángulos de $\triangle CFR$ y otros ángulos auxiliares (solo 0.5pt por ángulos como $\angle OCR$ y $\angle ORC$)	1.0
Ley de los senos en $\triangle CFR$	1.0
Conclusión $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$	1.0
Parte (B) — 4 pts	Pts
Aplicación de la fórmula de la Parte (A) para los radios auxiliares	1.0
Construcción geométrica de la imagen	1.0
Condición de no deslizamiento	1.0
Solución para el cardioide	0.3
Solución para el nefroide	0.5
No mencionar la limitación geométrica en el nefroide	-0.3
Comentario sobre por qué el método falla en el caso general	0.2



Pregunta 3: Ondas en una Cuerda - 10 puntos³

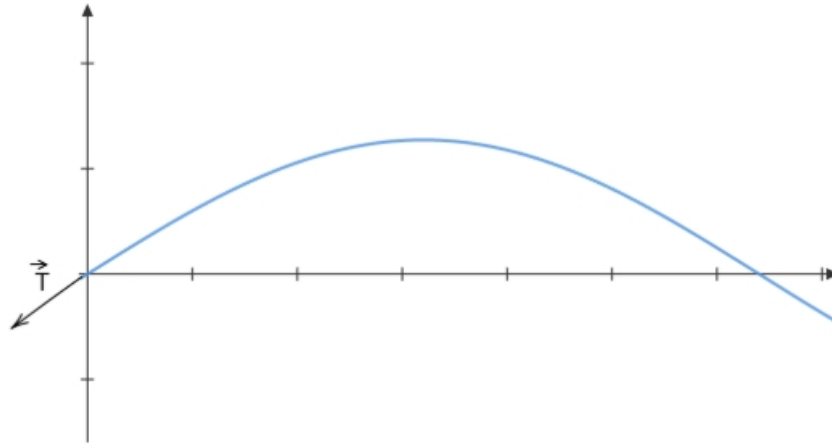


Figura 4: Configuración inicial de la cuerda bajo tensión \vec{T} .

En la figura de arriba, tenemos una cuerda con densidad lineal de masa ρ que se pone a oscilar mediante una tensión T . Esta fuerza propagará energía a la cuerda, que presentará características interesantes. Nuestra intención es partir de un caso simple y llegar a una mejor comprensión de las ondas en general.

Parte A: La Ecuación de Onda - 3 puntos

- (a) **2 puntos** Plantee la ecuación diferencial de movimiento para el sistema.
- (b) **1 punto** Separe la ecuación en partes espacial y temporal [Pista: Una función $f(x;t)$ puede escribirse como: $\xi(x)\varphi(t)$].

Parte B: Energía y Potencia - 4 puntos

Utilizaremos como solución:

$$y(x;t) = \text{Re}[Ae^{i(kx-\omega t)}] = A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(0;0) = 0 \quad v(0;0) = A\omega$$

- (c) **2 puntos** Calcule la potencia media de la energía suministrada a la cuerda.
- (d) **2 puntos** Expresar las fórmulas (en forma integral) para la energía cinética y potencial total del sistema.

Parte C: Principio de Mínima Acción - 3 puntos

Hay una cantidad en física que es útil desde la relatividad general hasta la mecánica cuántica, y su nombre es acción, que se define como:

$$S = \int L(y; \dot{y}; t) dt; \quad L = T - V$$

Sin embargo, cuando tenemos sistemas que, a diferencia de las partículas, están dispersos en el espacio como cuerdas, debemos usar \mathcal{L} que se define como la densidad de L . Tenemos por tanto nuestra nueva expresión:

$$S = \int \mathcal{L}\left(y; \frac{\partial y}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial x}; x; t\right) dx dt$$

³Por Yvens Amaral



Es de conocimiento general que la naturaleza evoluciona buscando las situaciones más estables, que son aquellas de mínima acción. (...) llegamos a la siguiente ecuación (Ecuación de Euler-Lagrange):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}})}{\partial t} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'})}{\partial x} = 0$$

(Nota: $\dot{y} = \partial y / \partial t$ y $y' = \partial y / \partial x$)

- (e) **3 puntos** Utilizando los resultados del ítem (d) y la fórmula anterior, plantee la ecuación de movimiento para el sistema y compárela con la del ítem (a).

Parte A: La Ecuación de Onda

- (a) Aplicamos la 2ª Ley de Newton ($F_y = ma_y$) a un segmento infinitesimal de la cuerda de longitud Δx y masa $dm = \rho \Delta x$. La fuerza vertical neta es la diferencia de las componentes verticales de la tensión T en los extremos. En la aproximación de ángulos pequeños, $T_y \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} F_{\text{net},y} &= T_y(x + \Delta x) - T_y(x) \\ (dm)a_y &= T \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) \\ (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) \end{aligned}$$

Dividiendo por Δx y tomando el límite $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right)}{\Delta x} \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \implies \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

- (b) Asumimos la solución separable $y(x, t) = \xi(x)\varphi(t)$. Sustituimos en la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\xi(x)\varphi(t)] &= \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\xi(x)\varphi(t)] \\ \xi(x) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{T}{\rho} \varphi(t) \frac{d^2 \xi}{dx^2} \end{aligned}$$

Dividimos por $\xi(x)\varphi(t)$ para separar las variables:

$$\underbrace{\frac{1}{\varphi(t)} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}}_{\text{Función de } t} = \frac{T}{\rho} \underbrace{\frac{1}{\xi(x)} \frac{d^2 \xi}{dx^2}}_{\text{Función de } x} = \text{Constante}$$

Para soluciones oscilatorias, la constante debe ser negativa, $-\omega^2$.

$$\begin{aligned} \text{Ec. Temporal: } & \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi(t) = 0 \\ \text{Ec. Espacial: } & \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left(\frac{\rho \omega^2}{T} \right) \xi(x) = 0 \end{aligned}$$



Definiendo $k^2 = \rho\omega^2/T$, la ecuación espacial se convierte en $\frac{d^2\xi}{dx^2} + k^2\xi(x) = 0$.

Parte B: Energía y Potencia

- (c) La potencia instantánea P es la fuerza vertical $F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}$ multiplicada por la velocidad vertical $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$.

$$P(t) = F_y v_y = \left(-T\frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Usando la solución $y(x, t) = -A \sin(kx - \omega t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= -Ak \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= A\omega \cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la potencia:

$$P(t) = -T(-Ak \cos(\cdot))(A\omega \cos(\cdot)) = Tk\omega A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

La potencia media \bar{P} es el promedio temporal. Como $\langle \cos^2(\cdot) \rangle = 1/2$:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}Tk\omega A^2$$

(Usando $T = \rho v^2$ y $k = \omega/v$, también $\bar{P} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2$)

- (d) Para la Energía Cinética (E_K), sumamos $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ y pasamos al continuo, donde $m_i \rightarrow dm = \rho dx$:

$$E_K = \sum \frac{1}{2}m_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 \rightarrow E_K = \int \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Para la Energía Potencial (E_P), sumamos la energía de estiramiento $T \cdot \Delta L$. El estiramiento $\Delta L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.

$$E_P = \sum T \cdot \Delta L_i \rightarrow E_P = \int \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Parte C: Principio de Mínima Acción

- (e) La densidad Lagrangiana \mathcal{L} es $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$, donde \mathcal{K} y \mathcal{V} son las densidades de energía (los términos dentro de las integrales del ítem (d)).

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}, y') = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\dot{y}^2 - \frac{T}{2}(y')^2$$

La Ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) = 0$$

Calculamos cada término:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\rho}{2}\dot{y}^2\right) = \rho\dot{y}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{T}{2}(y')^2\right) = -Ty'$



Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(-T y') &= 0 \\
 -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) &= 0 \\
 -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\
 \implies T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación es idéntica a la Ecuación de Onda derivada en la Parte (a).

Esquema de Calificación

Parte A — 3.0 pts	Pts
(a) Aplicar la 2ª Ley de Newton y la aproximación $T_y \approx T(\partial y/\partial x)$	1.0
(a) Tomar el límite $\Delta x \rightarrow 0$ para llegar a la Ecuación de Onda correcta	1.0
(b) Sustituir $y = \xi(x)\varphi(t)$ y separar las variables correctamente	0.5
(b) Mostrar las dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Temporal y Espacial)	0.5
Parte B — 4.0 pts	Pts
(c) Escribir la fórmula correcta para la potencia instantánea $P = F_y v_y$	0.5
(c) Calcular las derivadas $\partial y/\partial x$ y $\partial y/\partial t$ y encontrar $P(t)$	1.0
(c) Calcular el promedio temporal $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ y obtener \bar{P} final	0.5
(d) Derivar la forma integral para la Energía Cinética (E_K)	1.0
(d) Derivar la forma integral para la Energía Potencial (E_P)	1.0
Parte C — 3.0 pts	Pts
(e) Escribir la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ correctamente	1.0
(e) Calcular las derivadas parciales $\partial \mathcal{L}/\partial y$, $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{y}$ y $\partial \mathcal{L}/\partial y'$	1.0
(e) Sustituir en la Ecuación de Euler-Lagrange y mostrar que resulta en la Ec. de Onda	1.0
TOTAL	10.0