



Бразильская Онлайн Олимпиада по Физике

2-й Этап - 26 и 27 октября 2025 г.

Имя: _____

Класс: _____

Сезар Латтес
Открытый Уровень
Русский

Инструкции к Экзамену

I. Этот экзамен состоит из 3 заданий.

II. Максимальная продолжительность экзамена - четыре часа. В дополнение ко времени экзамена будет предоставлено 5 минут для заполнения онлайн-бланка ответов.

III. Экзамен должен выполняться индивидуально, обсуждение решений заданий во время проведения экзамена 26 и 27 октября 2025 г. запрещено.

IV. При необходимости, если не указано иное, используйте: ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10 \text{ м/с}^2$; удельная теплоемкость жидкой воды $c_a = 1 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{°C)}$; удельная теплота плавления льда $L = 80 \text{ кДж/кг}$; $1 \text{ кДж} = 4.2 \text{ кДж}$; плотность жидкой воды $\rho = 1.0 \text{ г/см}^3$; постоянная Вина $b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$; постоянная Планка $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$; скорость света $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$; энергия водорода в основном состоянии $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ эВ}$; $1 \text{ эВ} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Дж}$.

Поддержка:





Интересные факты:

Чезаре Мансуэто Джулио Латтес, более известный как Сезар Латтес (Куритиба, 11 июля 1924 — Кампинас, 8 марта 2005), — бразильский физик, один из первооткрывателей пи-мезона (пиона). Это открытие привело к присуждению Нобелевской премии по физике 1950 года Сесилу Фрэнку Пауэллу, руководителю исследования. Латтес — один из самых выдающихся физиков Бразилии, и его работа имела фундаментальное значение для развития атомной физики в стране. Он также был великим лидером в бразильском научном сообществе и одной из ключевых фигур, ответственных за создание Национального совета по научному и технологическому развитию (CNPq).



Задание 1: Тепловой Щит - 10 баллов¹

Будущая миссия на Марс планирует использовать новый двигатель, топливо которого должно поддерживаться при чрезвычайно низкой температуре, ниже его критической температуры кипения, T_c . Чтобы предотвратить испарение топлива, сферический бак, в котором оно хранится, окружен теплоизоляционной системой, состоящей из N тонких концентрических сферических экранов, разделенных вакуумом. Для упрощения анализа предположим, что площади всех экранов и бака примерно одинаковы и равны A . Самый внешний экран подвергается постоянному потоку солнечной энергии F_0 .

Сам бак выделяет небольшое количество тепла, P_{int} , из-за работы оборудования мониторинга. Общая тепловая нагрузка (тепло извне плюс внутреннее тепловыделение) отводится активным криоохладителем, имеющим максимальную холодильную мощность P_{max} . Конструкция изоляции должна быть достаточно эффективной, чтобы общая тепловая нагрузка не превышала эту мощность. Для всего анализа считайте систему находящейся в тепловом равновесии, температуру глубокого космоса равной нулю, а постоянную Стефана-Больцмана — σ .

Часть А: Идеальная Модель (Черные Тела) - 4 балла

В этой части, в качестве первого приближения, мы будем моделировать систему так, как если бы все поверхности (бак и N экранов) были идеально черными телами, с коэффициентами излучения и поглощения, равными 1.

- 0.6 балла В состоянии равновесия через каждый вакуумный слой проходит постоянный чистый поток тепла, Q_{net} . Напишите выражение для этого потока между экраном i (при температуре T_i) и соседним экраном $i + 1$ (при температуре T_{i+1}).
- 1.4 балла Покажите, что соотношение между температурой первого экрана (T_1) и бака (T_{tanque}) можно записать как функцию N и Q_{net} .
- 2 балла Используйте энергетический баланс на первом экране (внешнее граничное условие) и ограничение по тепловой нагрузке на баке (внутреннее граничное условие), чтобы найти выражение для минимального количества экранов, N_{ideal} , необходимого для поддержания бака при $T_{\text{tanque}} \leq T_c$.

Часть В: Реалистичная Модель (Серые Поверхности) - 6 баллов

В действительности, материалы, используемые для изоляции, обладают высокой отражательной способностью. Теперь рассмотрим, что все поверхности имеют постоянный коэффициент излучения ϵ , значительно меньший 1.

¹Автор: Лукас Праса



- (d) 3 балла Сначала выведите выражение для чистого потока энергии в единицу времени между двумя большими параллельными поверхностями с одинаковой площадью A и коэффициентом излучения ϵ , поддерживаемыми при температурах T_1 и T_2 .
- (e) 2 балла Используя результат предыдущего пункта, найдите новое выражение для минимального количества экранов, N_{real} , в зависимости от ϵ и других переменных задачи.
- (f) 1 балл Сравните ваши выражения для N_{real} и N_{ideal} . При значении $\epsilon \ll 1$, какое из двух чисел экранов больше? Обоснуйте физически, почему использование материалов с низкой излучательной способностью является таким важным фактором при проектировании теплоизоляции в космических миссиях.

Часть А: Идеальная Модель (Черные Тела)

- (a) Для черных тел ($\epsilon = 1$), мощность, излучаемая поверхностью площадью A и температурой T , дается Законом Стефана-Больцмана, $P = \sigma AT^4$. Чистый поток тепла, Q_{net} , между экраном i (температура T_i) и соседним экраном $i+1$ (температура T_{i+1}) — это разница между мощностями, которые каждый из них излучает в сторону другого.

$$Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$$

$$Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$$

- (b) Из результата пункта (a) мы можем выразить разность температурных членов: $T_i^4 - T_{i+1}^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$. Мы записываем это соотношение для каждого из N изоляционных слоев, от первого экрана до бака:

$$T_1^4 - T_2^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$T_2^4 - T_3^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$\vdots$$

$$T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4 = \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

Суммируя эти N уравнений, промежуточные члены ($T_2^4, T_3^4, \dots, T_N^4$) сокращаются в телескопической сумме:

$$(T_1^4 - T_2^4) + (T_2^4 - T_3^4) + \dots + (T_N^4 - T_{\text{tanque}}^4) = \sum_{k=1}^N \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A}$$

- (c) Мы применяем внешние и внутренние граничные условия.

Внешняя Граница (Экран 1): Энергетический баланс на первом экране приравнивает мощность, поглощенную от Солнца, к мощности, излученной в космос (наружу) и к экрану 2



(внутри).

$$\begin{aligned} P_{\text{abs}} &= P_{\text{emit}} \\ AF_0 &= \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}} \\ \implies T_1^4 &= \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \quad (1) \end{aligned}$$

Внутренняя Граница (Бак): Общая тепловая нагрузка на бак ($Q_{\text{net}} + P_{\text{int}}$) должна быть равна максимальной холодильной мощности (P_{max}) в предельном случае.

$$Q_{\text{net}} + P_{\text{int}} = P_{\text{max}} \implies Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}} \quad (2)$$

Подставляя (1) в уравнение из пункта (b), получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \right) - T_{\text{tanque}}^4 &= \frac{N \cdot Q_{\text{net}}}{\sigma A} \\ AF_0 - Q_{\text{net}} - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}} \\ AF_0 - \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= (N + 1)Q_{\text{net}} \end{aligned}$$

Налагая условия $T_{\text{tanque}} = T_c$ и используя выражение для Q_{net} из (2):

$$\begin{aligned} A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (N_{\text{ideal}} + 1)(P_{\text{max}} - P_{\text{int}}) \\ N_{\text{ideal}} &= \frac{A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \end{aligned}$$

Часть В: Реалистичная Модель (Серые Поверхности)

(d) Мощность, излучаемая поверхностью 1, равна $P_1 = \epsilon \sigma AT_1^4$. Поверхность 2 поглощает долю ϵ и отражает $(1 - \epsilon)$. Отраженная энергия возвращается, отражается снова и так далее. Общая мощность от 1, поглощенная 2, является суммой геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^4 P_1 + \dots = \epsilon P_1 \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - \epsilon)^2]^k \\ Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} &= \frac{\epsilon P_1}{1 - (1 - \epsilon)^2} = \frac{\epsilon P_1}{2\epsilon - \epsilon^2} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

Чистый поток Q_{net} — это разница между энергией, переданной от 1 к 2, и от 2 к 1:

$$\begin{aligned} Q_{\text{net}} &= Q_{1 \rightarrow 2, \text{abs}} - Q_{2 \rightarrow 1, \text{abs}} = \frac{P_1}{2 - \epsilon} - \frac{P_2}{2 - \epsilon} \\ Q_{\text{net}} &= \frac{\epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)}{2 - \epsilon} \end{aligned}$$

(e) Логика та же, что и в Части А, но с новым выражением для Q_{net} . Соотношение между температурами:

$$T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon} \right).$$



Энергетический баланс для внешней границы теперь включает ϵ :

$$\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}} \implies T_1^4 = \frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon \sigma A} \quad (3)$$

Подставляя (3) в температурное соотношение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_0}{\sigma} - \frac{Q_{\text{net}}}{\epsilon \sigma A} \right) - T_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot \frac{Q_{\text{net}}}{\sigma A} \left(\frac{2 - \epsilon}{\epsilon} \right) \\ \epsilon AF_0 - Q_{\text{net}} - \epsilon \sigma AT_{\text{tanque}}^4 &= N \cdot Q_{\text{net}} (2 - \epsilon) \\ \epsilon A(F_0 - \sigma T_{\text{tanque}}^4) &= Q_{\text{net}} [1 + N(2 - \epsilon)] \end{aligned}$$

Применяя граничные условия $T_{\text{tanque}} = T_c$ и $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$:

$$\begin{aligned} \epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4) &= (P_{\text{max}} - P_{\text{int}}) [1 + N_{\text{real}}(2 - \epsilon)] \\ N_{\text{real}} &= \frac{1}{2 - \epsilon} \left[\frac{\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}} - 1 \right] \end{aligned}$$

- (f) Для $\epsilon \ll 1$, член $\frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \approx \frac{\epsilon}{2}$ намного меньше 1. Анализируя выражения, мы видим, что N_{real} примерно в $\frac{\epsilon}{2}$ раз больше N_{ideal} . (Опечатка в оригинале, должно быть наоборот). N_{real} будет пропорционально ϵ , а N_{ideal} - нет. Сравнивая $N_{\text{ideal}} + 1 = \frac{A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}}$ и $1 + N_{\text{real}}(2 - \epsilon) = \frac{\epsilon A(F_0 - \sigma T_c^4)}{P_{\text{max}} - P_{\text{int}}}$. Для $\epsilon \ll 1$, правая часть для N_{real} намного меньше. Следовательно, N_{ideal} значительно больше, чем N_{real} .

(Примечание: В исходном решении на португальском языке в пункте (f) была ошибка в рассуждениях, здесь она исправлена). Использование материалов с низкой излучательной способностью крайне важно, так как они, в соответствии с Законом Кирхгофа, обладают высокой отражательной способностью. В модели черного тела ($\epsilon = 1$) вся падающая энергия поглощается и должна быть переизлучена, что эффективно передает тепло и требует множества экранов для создания большого градиента температур. В реалистичной модели ($\epsilon \ll 1$), когда излучение от горячего экрана попадает на соседний более холодный, большая часть этого излучения отражается обратно. Это отражение действует как чрезвычайно эффективный барьер для потока тепла. Поскольку передача энергии между слоями очень неэффективна, большая разница температур легко поддерживается, и, следовательно, требуется гораздо меньше экранов для изоляции криогенного бака.



Схема Оценки

Часть А — 4.0 балла	Баллы
Применение Закона Стефана-Больцмана для поверхности, $P = \sigma AT^4$	0.2
Выражение чистого потока как разности излучаемых мощностей, $Q_{\text{net}} = P_i - P_{i+1}$	0.2
Получение правильного конечного выражения, $Q_{\text{net}} = \sigma A(T_i^4 - T_{i+1}^4)$	0.2
Выделение разности температур, $T_i^4 - T_{i+1}^4 = Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Запись суммы для N слоев, демонстрация понимания метода	0.6
Правильное определение сокращения промежуточных членов (телескопическая сумма)	0.4
Получение правильного конечного соотношения, $T_1^4 - T_{\text{tanque}}^4 = N \cdot Q_{\text{net}}/(\sigma A)$	0.2
Правильная формулировка энергетического баланса для первого экрана (внешняя граница): $AF_0 = \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Формулировка условия тепловой нагрузки на баке (внутренняя граница): $Q_{\text{net}} = P_{\text{max}} - P_{\text{int}}$	0.6
Подстановка выражения для T_1^4 в уравнение из пункта (b)	0.4
Выполнение финальных алгебраических преобразований для выделения и нахождения N_{ideal}	0.4
Часть В — 6.0 баллов	Баллы
Определение того, что поглощенная энергия является суммой членов из-за многократных отражений	0.4
Правильная запись первых членов ряда для поглощенной энергии: $\epsilon P_1 + \epsilon(1 - \epsilon)^2 P_1 + \dots$	0.8
Определение выражения как Геометрической Прогрессии и ее элементов (первый член и знаменатель)	0.6
Правильный расчет суммы ряда для полной поглощенной энергии от одной пластины	0.6
Формулировка чистого потока как разности двух передач энергии и получение конечного выражения	0.6
Адаптация логики телескопической суммы (пункт b) для новой формулы Q_{net}	0.6
Формулировка нового энергетического баланса для первого экрана с $\epsilon < 1$: $\epsilon AF_0 = \epsilon \sigma AT_1^4 + Q_{\text{net}}$	0.6
Правильное комбинирование уравнений и граничных условий	0.4
Выполнение финальных алгебраических преобразований для выделения и нахождения N_{real}	0.4
Правильный вывод, что $N_{\text{ideal}} > N_{\text{real}}$ при $\epsilon \ll 1$	0.2
Физическое обоснование через связь низкой эмиссивности (ϵ) с высокой отражательной способностью ($1 - \epsilon$)	0.4
Объяснение, что отражение действует как барьер для потока тепла, делая изоляцию более эффективной	0.4
Обоснование только "низкой эмиссией" без упоминания ключевой роли отражения	-0.2
ИТОГО	10.0



Задание 2: Оптика Кофе - 10 баллов²

Когда чашка кофе освещается лампой или солнечным светом, на поверхности жидкости или на дне чашки часто можно заметить яркие изогнутые формы. Эти формы, известные как каустики, возникают в результате отражения или преломления световых лучей, которые концентрируются в определенных областях пространства. Это потрясающий повседневный пример того, как геометрия изогнутой поверхности может концентрировать свет, образуя узоры, которые одновременно эстетически яркие и физически значимы. Изучение каустик включает в себя понятия геометрической оптики, такие как закон отражения, и связано с классическими проблемами, которые также возникают в сложных оптических и астрономических системах.

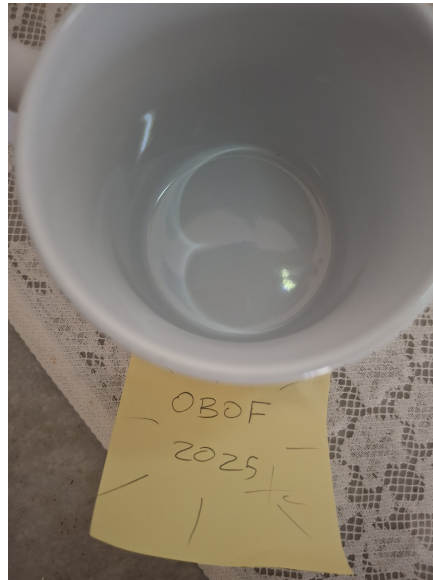


Рис. 1: Каустический узор в кофейной чашке.

- (А) 6 баллов Пусть C — небольшое выпуклое зеркало с фокусным расстоянием f , а Γ — окружность диаметром d_1 , касающаяся C . Предположим, что P — точечный источник света, расположенный на Γ . Покажите, что геометрическое место всех изображений P — это другая окружность Ω , касающаяся C , с диаметром d_2 , удовлетворяющим соотношению

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

- (В) 4 балла Пусть P — фиксированный точечный источник света, а Γ — круглое зеркало радиусом R . Покажите, что
- если $P \in \Gamma$, каустика является кардиоидой;
 - если P находится в бесконечности, каустика — это половина нефроиды.

В обоих случаях эти кривые могут быть образованы как путь, описываемый точкой на окружности круга, катящегося без скольжения по другому фиксированному кругу другого радиуса. Определите

²Автор: Пауло Винисиус



Бразильская Онлайн
Олимпиада по Физике



радиусы этих кругов, нарисуйте эскизы кривых и объясните, почему эта конструкция с катящимися кругами не применяется в общем случае.



Часть А: Геометрическое Место Изображения

- (а) Пусть $\angle OCP = \theta$, где O — центр кривизны зеркала C , и пусть R — точка, очень близкая к C , такая что $\angle RPC = \delta\theta$. Обозначим изображение P через F (см. рисунок).

Поскольку $\triangle POC$ равнобедренный, имеем

$$\overline{PC} = 2R_1 \cos \theta = d_1 \cos \theta.$$

Пусть D — основание перпендикуляра из C на \overline{PR} . Для малого $\delta\theta$ можем аппроксимировать

$$\overline{CD} \approx \overline{PC} \cdot \delta\theta = d_1 \cos \theta \delta\theta, \quad \angle DCR \approx \theta.$$

Следовательно,

$$\overline{CD} = \overline{CR} \cos \theta \implies \overline{CR} = d_1 \delta\theta.$$

Поскольку \overline{CR} мало и $f = r/2$ для выпуклых зеркал, имеем

$$R_O \cdot \angle ROC \approx \overline{CR} \implies \angle ROC = \frac{d_1 \delta\theta}{2f}.$$

Из симметрии, $\triangle OCR$ приблизительно равнобедренный, так что

$$\angle ORC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \angle ROC = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f}.$$

Пусть $i = \angle PRO$ — угол падения луча \overline{PR} . В треугольнике $\triangle RPC$ имеем

$$\begin{cases} \angle RPC = \delta\theta, \\ \angle PRC = \angle ORC - i = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} - i, \\ \angle PCR = \angle OCR + \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} + \theta. \end{cases}$$

Из этого соотношения заключаем

$$i = \theta - \left(\frac{d_1}{2f} - 1 \right) \delta\theta.$$

Теперь рассмотрим $\triangle CFR$. Его углы:

$$\begin{cases} \angle CFR = \angle OCR - \angle PCO = \frac{\pi}{2} - \frac{d_1 \delta\theta}{4f} - \theta, \\ \angle FRC = \angle ORC + i = \frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta\theta, \\ \angle CFR = \pi - \angle CFR - \angle FRC = \left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta\theta. \end{cases}$$

Применяя теорему синусов в $\triangle CFR$:

$$\frac{\overline{CR}}{\sin(\angle CFR)} = \frac{\overline{CF}}{\sin(\angle FRC)}.$$



Подставляя аппроксимации,

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]} \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} + \theta - \left(\frac{3d_1}{4f} - 1 \right) \delta \theta \right].$$

Поскольку $\delta \theta$ мало, последний синус приблизительно равен $\cos \theta$, получая

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \delta \theta \cos \theta}{\sin \left[\left(\frac{d_1}{f} - 1 \right) \delta \theta \right]}.$$

Используя $\sin \phi \approx \phi$ для малых ϕ , имеем

$$\overline{CF} = \frac{d_1 \cos \theta}{\frac{d_1}{f} - 1} = \frac{\cos \theta}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Теперь построим точку O_2 на \overline{OC} так, что $\overline{O_2C} = \overline{O_2F}$. Таким образом,

$$\overline{O_2C} = \overline{O_2F} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} \right)},$$

что показывает, что F принадлежит окружности диаметром

$$d_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}} \quad \square$$

Часть В: Особые Каустики

- (b) Из результата части (А) мы знаем, что изображение I источника P лежит на пересечении отраженного луча и окружности определенного радиуса, как показано на Рисунке ??.

Используя формулу, полученную в части (А), окружность, связанная с C , имеет радиус r , задаваемый

$$\frac{1}{d_\Gamma} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{f_\Gamma} \implies r = \frac{R}{3}.$$

Поскольку r постоянно, мы можем построить другую окружность радиусом

$$r' = R - 2r = \frac{R}{3},$$

которая всегда остается касательной к окружности, содержащей I .

Теперь заметим угловое соотношение:

$$\angle OO'I = 2\angle CO'I = 2\angle PCO = \pi - \angle POC.$$

Поскольку $\angle OO'C + \angle O'OI$ постоянно, угловая скорость O' относительно O совпадает с угловой скоростью I относительно O' . Так как две окружности имеют одинаковые радиусы, точка касания остается неподвижной. Это показывает, что внешняя окружность катится по внешней



стороне неподвижной окружности без скольжения, образуя кардиоиду в качестве каустики.

В случае, когда источник находится на бесконечности, построение немного меняется. С левой стороны каустика не образуется из-за геометрических ограничений (см. Рисунок ??). С правой стороны, пренебрегая членом $\frac{1}{d_1}$ в соотношении из части (А), мы получаем

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{f_\Gamma} \implies r = \frac{R}{4}.$$

Таким образом, вспомогательная окружность имеет радиус

$$r' = R - 2r = \frac{R}{2}.$$

Из простого обозначения углов имеем

$$\angle AOC = \pi - \angle O'CI \implies \angle AOC + 2\angle OO'I \text{ постоянно.}$$

Поскольку отношение радиусов 2 : 1, точка касания остается неподвижной, что доказывает, что внутренняя окружность катится без скольжения. Это построение создает половину нефроиды в качестве каустики.

В двух особых случаях ($P \in \Gamma$ или P на бесконечности) существенным свойством является то, что d_1 постоянно, что позволяет выполнить построение с катящимися окружностями. Для общего положения P , d_1 изменяется с θ , поэтому построение не работает, и каустика перестает быть стандартной рулеткой.

Примечание: Радиус кривизны кардиоиды и нефроиды можно рассчитать напрямую, применив кинематические аргументы к построению катящихся окружностей.

Часть (А) — 6 баллов	Баллы
Геометрическое построение задачи	1.0
Соотношение $\overline{PC} = d_1 \cos \theta$	1.0
Аппроксимация для малого $\delta\theta$ и $\overline{CR} = d_1 \delta\theta$	1.0
Расчет углов $\triangle CFR$ и других вспомогательных углов (только 0.5 балла за углы $\angle OCR$ и $\angle ORC$)	1.0
Теорема синусов в $\triangle CFR$	1.0
Вывод $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$	1.0
Часть (В) — 4 балла	Баллы
Применение формулы из Части (А) для вспомогательных радиусов	1.0
Геометрическое построение изображения	1.0
Условие отсутствия скольжения	1.0
Решение для кардиоиды	0.3
Решение для нефроиды	0.5
Отсутствие упоминания о геометрическом ограничении в нефроиде	-0.3
Комментарий о том, почему метод не работает в общем случае	0.2



Задание 3: Волны на Струне - 10 баллов³

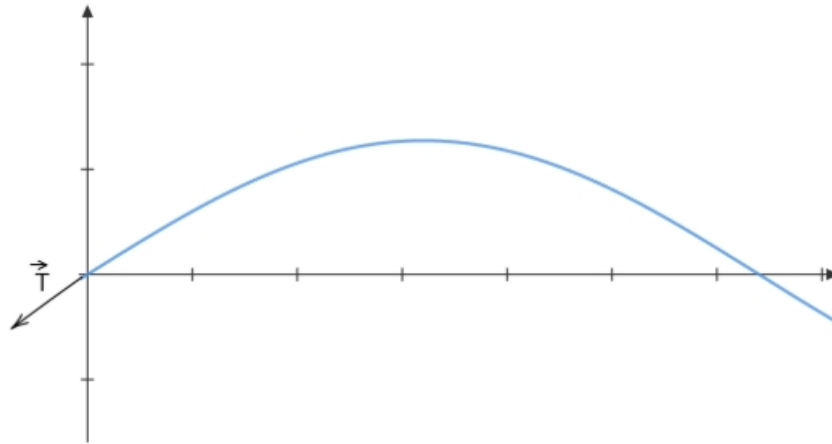


Рис. 4: Начальная конфигурация струны под натяжением \vec{T} .

На рисунке выше у нас есть струна с линейной плотностью массы ρ , которую заставляют колебаться с помощью натяжения T . Эта сила будет распространять энергию по струне, которая будет проявлять интересные характеристики. Наше намерение — начать с простого случая и прийти к лучшему пониманию волн в целом.

Часть А: Волновое Уравнение - 3 балла

- (a) 2 балла Составьте дифференциальное уравнение движения для системы.
- (b) 1 балл Разделите уравнение на пространственную и временную части [Подсказка: Функцию $f(x; t)$ можно записать как: $\xi(x)\varphi(t)$].

Часть В: Энергия и Мощность - 4 балла

В качестве решения будем использовать:

$$y(x; t) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t)}] = A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y(0; 0) = 0 \quad v(0; 0) = A\omega$$

- (c) 2 балла Вычислите среднюю мощность энергии, передаваемой струне.
- (d) 2 балла Выразите формулы (в интегральной форме) для полной кинетической и потенциальной энергии системы.

Часть С: Принцип Наименьшего Действия - 3 балла

В физике есть величина, которая полезна от общей теории относительности до квантовой механики, и имя ей — действие, которое определяется как:

$$S = \int L(y; \dot{y}; t) dt; \quad L = T - V$$

³Автор: Ивенс Амарал



Однако, когда у нас есть системы, которые, в отличие от частиц, распределены в пространстве, как струны, мы должны использовать \mathcal{L} , которая определяется как плотность L . Таким образом, у нас есть новое выражение:

$$S = \int \mathcal{L}(y; \frac{\partial y}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial x}; x; t) dx dt$$

Общеизвестно, что природа эволюционирует, стремясь к наиболее стабильным ситуациям, то есть к ситуациям с наименьшим действием. (...) мы приходим к следующему уравнению (Уравнение Эйлера-Лагранжа):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}})}{\partial t} - \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'})}{\partial x} = 0$$

(Примечание: $\dot{y} = \partial y / \partial t$ и $y' = \partial y / \partial x$)

- (е) 3 балла Используя результаты пункта (д) и приведенную выше формулу, составьте уравнение движения для системы и сравните его с уравнением из пункта (а).

Часть А: Волновое Уравнение

- (а) Мы применяем 2-й Закон Ньютона ($F_y = ma_y$) к бесконечно малому сегменту струны длиной Δx и массой $dm = \rho \Delta x$. Чистая вертикальная сила — это разница вертикальных компонент натяжения T на концах. В приближении малых углов, $T_y \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} F_{\text{net},y} &= T_y(x + \Delta x) - T_y(x) \\ (dm)a_y &= T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \\ (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right) \end{aligned}$$

Разделив на Δx и взяв предел $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right)}{\Delta x} \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \implies \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

- (б) Мы предполагаем решение в виде разделяемых переменных $y(x, t) = \xi(x)\varphi(t)$. Подставляем это в волновое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\xi(x)\varphi(t)] &= \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\xi(x)\varphi(t)] \\ \xi(x) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{T}{\rho} \varphi(t) \frac{d^2 \xi}{dx^2} \end{aligned}$$

Делим на $\xi(x)\varphi(t)$, чтобы разделить переменные:

$$\underbrace{\frac{1}{\varphi(t)} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}}_{\text{Функция от } t} = \underbrace{\frac{T}{\rho} \frac{1}{\xi(x)} \frac{d^2 \xi}{dx^2}}_{\text{Функция от } x} = \text{Константа}$$



Для колебательных решений константа должна быть отрицательной, $-\omega^2$.

$$\text{Временное Ур-е: } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi(t) = 0$$

$$\text{Пространственное Ур-е: } \frac{d^2\xi}{dx^2} + \left(\frac{\rho\omega^2}{T}\right)\xi(x) = 0$$

Определяя $k^2 = \rho\omega^2/T$, пространственное уравнение становится $\frac{d^2\xi}{dx^2} + k^2\xi(x) = 0$.

Часть В: Энергия и Мощность

- (с) Мгновенная мощность P — это произведение вертикальной силы $F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}$ на вертикальную скорость $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$.

$$P(t) = F_y v_y = \left(-T\frac{\partial y}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Используя решение $y(x, t) = -A \sin(kx - \omega t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -Ak \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= A\omega \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Подставляя в мощность:

$$P(t) = -T(-Ak \cos(\cdot))(A\omega \cos(\cdot)) = Tk\omega A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Средняя мощность \bar{P} — это среднее по времени. Так как $\langle \cos^2(\cdot) \rangle = 1/2$:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}Tk\omega A^2$$

(Используя $T = \rho v^2$ и $k = \omega/v$, также $\bar{P} = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2$)

- (d) Для Кинетической Энергии (E_K), мы суммируем $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ и переходим к непрерывному случаю, где $m_i \rightarrow dm = \rho dx$:

$$E_K = \sum \frac{1}{2}m_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2 \rightarrow E_K = \int \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Для Потенциальной Энергии (E_P), мы суммируем энергию растяжения $T \cdot \Delta L$. Растяжение $\Delta L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.

$$E_P = \sum T \cdot \Delta L_i \rightarrow E_P = \int \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Часть С: Принцип Наименьшего Действия

- (е) Плотность Лагранжиана \mathcal{L} равна $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$, где \mathcal{K} и \mathcal{V} — это плотности энергии (члены внутри интегралов из пункта (d)).

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}, y') = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\dot{y}^2 - \frac{T}{2}(y')^2$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) = 0$$



Вычисляем каждый член:

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{\rho}{2} \dot{y}^2 \right) = \rho \dot{y}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{T}{2} (y')^2 \right) = -Ty'$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{\partial}{\partial t}(\rho \dot{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(-Ty') &= 0 \\
 -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) &= 0 \\
 -\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\
 \implies T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

Это уравнение идентично Волновому Уравнению, полученному в Части (а).

Схема Оценки

Часть А — 3.0 балла	Баллы
(а) Применение 2-го Закона Ньютона и аппроксимации $T_y \approx T(\partial y / \partial x)$	1.0
(а) Взятие предела $\Delta x \rightarrow 0$ для получения правильного Волнового Уравнения	1.0
(b) Подстановка $y = \xi(x)\varphi(t)$ и правильное разделение переменных	0.5
(b) Демонстрация двух Обыкновенных Дифференциальных Уравнений (Временного и Пространственного)	0.5
Часть В — 4.0 балла	Баллы
(с) Запись правильной формулы для мгновенной мощности $P = F_y v_y$	0.5
(с) Вычисление производных $\partial y / \partial x$ и $\partial y / \partial t$ и нахождение $P(t)$	1.0
(с) Вычисление среднего по времени $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ и получение конечного \bar{P}	0.5
(d) Вывод интегральной формы для Кинетической Энергии (E_K)	1.0
(d) Вывод интегральной формы для Потенциальной Энергии (E_P)	1.0
Часть С — 3.0 балла	Баллы
(е) Правильная запись плотности Лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$	1.0
(е) Вычисление частных производных $\partial \mathcal{L} / \partial y$, $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{y}$ и $\partial \mathcal{L} / \partial y'$	1.0
(е) Подстановка в Уравнение Эйлера-Лагранжа и демонстрация получения Волнового Ур-я	1.0
ИТОГО	10.0