



Olimpíada Brasileira Online de Matemática

2ª Fase - 4-5 de outubro de 2025

Nome: _____

Série: _____

Nível Carolina
Araújo
Ensino Fundamental

Instruções de Prova

- I. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos do **ensino fundamental**. Ela contém **quatro** questões. Todas as questões têm o mesmo valor.
- II. A prova é individual e sem consultas. Em particular, o uso de ferramentas de inteligência artificial é expressamente proibido. Respeite a cultura olímpica.
- III. Os materiais permitidos são: caneta, lápis/lapiseira, borracha, compasso, régua e esquadro (com ou sem marcação), papel em branco ou com pauta de qualquer tamanho (por exemplo, A4 ou A3). Transferidores e calculadoras de qualquer tipo não são permitidos.
- IV. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

Apoio:



Curiosidades:

Carolina Bhering de Araújo é uma das mais proeminentes matemáticas brasileiras da atualidade. Pesquisadora titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), ela atua principalmente na área de Geometria Algébrica Complexa. Formou-se em Matemática pela PUC-Rio e obteve o doutorado na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos. Ao longo de sua carreira, recebeu diversas distinções importantes, como o prêmio L'Oréal-Unesco-ABC Para Mulheres na Ciência (2008), e foi palestrante convidada no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM 2018). Desde 2023, preside o Comitê para Mulheres na Matemática da União Matemática Internacional (IMU), refletindo seu engajamento na promoção da equidade de gênero na ciência. Carolina também é conhecida por sua atuação na criação de redes de apoio para mulheres na matemática e na organização do Encontro Mundial de Mulheres na Matemática (WM)², evento realizado às vésperas do ICM no Rio de Janeiro. Em um campo historicamente dominado por homens, ela destaca-se não só pelo rigor científico, mas também pelo compromisso com a transformação do ambiente acadêmico em um espaço mais inclusivo e acolhedor.



Problema 1. Três aventureiros — Alphadiu, Betadiu e Gammadiu — enfrentam um dragão com n escamas mágicas. Cada aventureiro possui ataques especiais:

- **Alphadiu:** destrói metade das escamas do dragão, mais uma escama extra. Se o número de escamas for ímpar, Alphadiu não pode atacar;
- **Betadiu:** destrói um terço das escamas, mais duas escamas extras. Se o número de escamas não for múltiplo de 3, Betadiu não pode atacar;
- **Gammadiu:** destrói um quarto das escamas, mais três escamas extras. Se o número de escamas não for múltiplo de 4, Gammadiu não pode atacar.

Os aventureiros atacam um de cada vez. Se nenhum puder atacar, o dragão vence. O objetivo é eliminar todas as escamas do dragão.

Para quais números inteiros positivos n os aventureiros podem combinar ataques de forma a derrotar o dragão?

Proposto por Isabela Pires

1. Representação dos ataques como funções

Se n é o número atual de escamas:

$$\text{Alphadiu: } n \mapsto n - \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} - 1, \quad n \text{ par}$$

$$\text{Betadiu: } n \mapsto n - \left(\frac{n}{3} + 2\right) = \frac{2n}{3} - 2, \quad n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Gammadiu: } n \mapsto n - \left(\frac{n}{4} + 3\right) = \frac{3n}{4} - 3, \quad n \equiv 0 \pmod{4}$$

Note que n sempre diminui, o que garante o combate não dura para sempre, uma vez que o número de escamas é um inteiro não negativo.

2. Identificação de estados impossíveis

Um ataque é possível somente se n for:

- par (Alphadieu),
- múltiplo de 3 (Betadieu),
- múltiplo de 4 (Gammadieu).

Se n não é divisível por 2, 3 ou 4, nenhum ataque é possível. Analisando módulo 12, os restos que não são divisíveis por 2, 3 ou 4 são:

$$\boxed{1, 5, 7, 11 \pmod{12}}.$$

Portanto, se

$$n \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12},$$

nenhum ataque inicial é possível e o dragão vence.

3. Análise dos estados restantes

Para todos os outros restos $r = 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$, pelo menos um ataque é possível. Vamos mostrar como cada ataque leva a um novo estado "vencível"(ou seja, não morto):

- **Caso** $n \equiv 0 \pmod{12}$ ($n = 12m$):

Alphadieu: $n' = 6m - 1$ (par, atacável se múltiplo de 2)

Betadieu: $n' = 8m - 2$ (múltiplo de 2 ou 4, atacável)

Gammadieu: $n' = 9m - 3$ (múltiplo de 3, atacável)

- **Caso** $n \equiv 2 \pmod{12}$ ($n = 12m + 2$):

$$\text{Alphadieu: } n' = \frac{12m + 2}{2} - 1 = 6m \equiv 0, 6 \pmod{12}$$

Estado vencível.

- **Caso** $n \equiv 3 \pmod{12}$ ($n = 12m + 3$):

$$\text{Betadieu: } n' = \frac{2(12m + 3)}{3} - 2 = 8m \equiv 0, 4, 8 \pmod{12}$$

Estado vencível.

- **Caso** $n \equiv 4 \pmod{12}$ ($n = 12m + 4$):

Alphadieu: $n' = 6m + 1$ (pode ser estado morto)

$$\text{Gammadieu: } n' = \frac{3(12m + 4)}{4} - 3 = 9m \pmod{12} \text{ (múltiplo de 3, atacável)}$$

Escolher Gammadieu para garantir vitória.

- **Caso** $n \equiv 6 \pmod{12}$ ($n = 12m + 6$):

Todos ataques possíveis:

Alphadieu: $n' = 6m + 2$ (par, atacável)

Betadieu: $n' = 8m + 2$ (múltiplo de 2, atacável)

Gammadieu: $n' = 9m + 3$ (múltiplo de 3, atacável)

- **Caso** $n \equiv 8 \pmod{12}$ ($n = 12m + 8$): Gammadieu ou Alphadieu podem atacar; ambos levam a estados múltiplos de 2 ou 3.
- **Caso** $n \equiv 9 \pmod{12}$ ($n = 12m + 9$): Betadieu ataca e leva a um estado múltiplo de 2 ou 3.
- **Caso** $n \equiv 10 \pmod{12}$ ($n = 12m + 10$): Alphadieu ataca e leva a $5 + 6m - 1 = 5 + 6m - 1 = 6m + 4$, que é par e atacável.

4. Conclusão

Portanto, a estratégia é:

- Se $n \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$, ou equivalentemente, $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$, nenhum ataque é possível: o dragão vence.
- Para todos os outros n , sempre existe pelo menos um ataque possível que leva a um estado atacável, garantindo que os aventureiros possam derrotar o dragão.

Os aventureiros vencem se, e somente se, $n \not\equiv 1, 5 \pmod{6}$.

Grade de Correção

Pontuação não cumulativa:

2 pontos. Identificar corretamente que, se $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$ (ou equivalentemente, n não é múltiplo de 2 nem de 3), então nenhum ataque inicial é possível, logo o dragão vence.

Pontuação cumulativa:

1 ponto. Modelar corretamente os ataques com domínio de validade:

$$n \mapsto \frac{n}{2} - 1 \text{ (se } 2 \mid n), \quad n \mapsto \frac{2n}{3} - 2 \text{ (se } 3 \mid n), \quad n \mapsto \frac{3n}{4} - 3 \text{ (se } 4 \mid n),$$

e observar que n sempre diminui quando um ataque é válido.

2 pontos. Classificar os resíduos mod 12 e concluir a necessidade: para $n \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$ ninguém ataca $\Rightarrow$ impossível vencer.

3 pontos. Suficiência (estratégia/indução): exibir uma estratégia válida que, para cada resíduo permitido $r \in \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, escolhe um atacante que leva a um $n' < n$ com resíduo ainda permitido (ou a 0). Por exemplo, qualquer uma das tabelas corretas abaixo (ou equivalente)

vale integralmente:

$r \pmod{12}$	Ataque sugerido
0	Betadieu (ou Gammadieu)
2	Alphadieu
3	Betadieu
4	Gammadieu
6	Alphadieu (ou Betadieu)
8	Alphadieu (ou Gammadieu)
9	Betadieu
10	Alphadieu

2 pontos. Verificação aritmética mod 12 dos casos escolhidos: checar que as imagens caem sempre em $\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ (ou em 0) e não em $\{1, 5, 7, 11\}$. Em especial, notar os pitfalls: $r = 0$ com Alphadieu leva a 5, 11, e $r = 4$ com Alphadieu leva a 1, 7 (ambos proibidos).

1 ponto. Base/Terminação: tratar explicitamente os menores casos permitidos $n \in \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ (por exemplo, $2 \rightarrow 0$, $3 \rightarrow 0$, $4 \rightarrow 0$, etc.) ou apresentar uma

indução forte/monovariantes garantindo que, como n estritamente diminui e permanece em classes permitidas, eventualmente atinge 0.

1 ponto. Conclusão correta do “se e somente se” com a resposta final bem enunciada.

-3 pontos. Somente afirmar “há sempre algum ataque possível” sem garantir que evita estados mortos (1, 5, 7, 11).

-2 pontos. Confundir “atacável” com “vencível” (por ex., usar Alphadieu em $r = 0$ ou e cair em estado morto)

-1 ponto. Não justificar terminação (não tratar bases ou não fazer indução/monovariantes).

-1 ponto. Pequenos erros de conta/digitação.

Serão descontados no máximo 3 pontos ao todo por pequenos erros.

Qualquer outra solução correta receberá 10 pontos.

Nota: pontuações cumulativas e não cumulativas não acumulam entre si.

Problema 2. Determine todos os pares de números primos não-necessariamente distintos (p, q) tais que

$$p^q q^p + p + q = p^p q^q - 2(p + q)(p - q).$$

Proposto por Jakson Souza

Vamos analisar a equação:

$$p^q q^p + p + q = p^p q^q - 2(p + q)(p - q).$$

Dividiremos em casos:

Caso 1: $p = q$

Neste caso, o lado direito da equação se torna $p^p p^p$, pois $p - q = 0$, e temos:

$$p^p p^p + 2p = p^p p^p \Rightarrow p^{2p} + 2p = p^{2p}.$$

$$\Rightarrow 2p = 0,$$

o que é impossível para p primo. Logo, não há solução nesse caso, portanto assumiremos $p \neq q$.

Caso 2: $p = 2$

Substituindo na equação:

$$2^q q^2 + 2 + q = 4q^q - 2(2 + q)(2 - q).$$

O lado esquerdo é ímpar (pois $2^q q^2$ é par, 2 é par, e q é ímpar), então a soma é ímpar. Já o lado direito é claramente par. Logo, temos um absurdo.

Caso 3: $q = 2$

Raciocínio análogo: o lado esquerdo será ímpar, e o direito par. Absurdo novamente.

Caso 4: $p, q > 2$

Como p e q são ímpares maiores que 2, analisamos a congruência da equação:

$$q \equiv 2q^2 \pmod{p} \Rightarrow 1 \equiv 2q \pmod{p},$$

$$p \equiv -2p^2 \pmod{q} \Rightarrow 1 \equiv -2p \pmod{q}.$$

Isso implica que existem inteiros k, j ímpares (pois caso par, cairíamos no caso 1 ou 2) tais que:

$$2q = pk + 1, \quad 2p = qj - 1.$$

Caso 4.1: $q > p$

Como $2q - 1 \geq 2p$, então:

$$2p = q - 1 \Rightarrow q = 2p + 1.$$

Substituindo na equação original:

$$p^{2p+1}(2p+1)^p + 3p = p^p(2p+1)^{2p+1} + 6p^2 - 8p + 1.$$

O lado esquerdo é múltiplo de p , enquanto o lado direito não, absurdo!

Caso 4.2 $p > q$

Analogamente, $2q = p + 1 \Rightarrow p = 2q - 1$. Substituindo na equação:

$$(2q - 1)^q q^{2q-1} + 3q - 1 = (2q - 1)^{2q-1} q^q - 2(3q - 1)(q - 1),$$

$$\Rightarrow (2q - 1)^q q^{2q-1} + 3q = (2q - 1)^{2q-1} q^q - 6q^2 + 8q - 1.$$

O lado esquerdo é múltiplo de q , mas o lado direito não. Novamente, absurdo.

Conclusão: Não há pares (p, q) de primos que satisfazem a equação dada. Portanto, o conjunto solução é **vazio**.

Grade de Correção

Pontuação não cumulativa:

2 pontos. Analisar a equação módulo p e/ou módulo q .

Pontuação cumulativa:

0 pontos. Conjecturar a resposta correta.

1 ponto. Resolver o caso $p = q$.

2 pontos. Resolver o caso $p = 2$ e/ou $q = 2$.

7 pontos. Resolver o caso $p, q > 2$.

-2 pontos. Pequenos deslizes. Não serão descontados caso a pontuação obtida na questão seja 3 pontos ou menos.

Qualquer outra solução diferente da apresentada que esteja correta receberá 10 pontos.

Nota: pontuações cumulativas e não cumulativas não acumulam entre si.

Problema 3. Allicy e Bobisvaldo jogam um jogo. Para começar, Bobisvaldo preenche um tabuleiro $2n \times 2n$, com cada número entre 1 e $4n^2$ aparecendo exatamente uma vez. Depois, eles realizam o seguinte movimento alternadamente, com Allicy começando:

- O jogador escolhe uma casa disponível do tabuleiro;
- Todas as casas que estão na mesma linha ou coluna do que a casa escolhida se tornam indisponíveis, nunca podendo ser escolhidas.

Após realizar suas n jogadas, Allicy soma o número escrito em todas as casas que escolheu. Determine qual é o menor valor dessa soma que Allicy consegue garantir, independentemente das escolhas de Bobisvaldo.

Proposto por Bruno Feltran

A resposta é $\frac{2}{3}(2n + 1)(n + 1)n$

Estratégia para Allicy que garante essa soma

Em cada jogada, escolha sempre o maior número disponível. Note que na i -ésima jogada de Allicy, existem exatamente $(2n + 2 - 2i)^2$ números disponíveis, então o maior deles é pelo menos essa quantidade. Isso totaliza:

$$S \geq \sum_{i=1}^n (2n + 2 - 2i)^2 = 4 \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{3}(2n + 1)(n + 1)n$$

Estratégia para Bobisvaldo

Divida o tabuleiro em “camadas” de $2i - 1$ quadrados, contendo exatamente os números de $(i - 1)^2$ até i^2 , conforme mostrado na figura.

1	4	8	14	22	32	44	58
2	3	9	15	23	33	45	59
5	6	7	16	24	34	46	60
10	11	12	13	25	35	47	61
17	18	19	20	21	36	48	62
26	27	28	29	30	31	49	63
37	38	39	40	41	42	43	64
50	51	52	53	54	55	56	57

Figura 1: Estratégia de Bobisvaldo

Em cada jogada, deixe Bobisvaldo escolher o maior número disponível no tabuleiro. Note que, se Bobisvaldo escolheu um número na camada x , então, após sua jogada, toda essa camada estará bloqueada (seja por essa própria jogada ou por movimentos anteriores de Allicy, isso resulta da maximalidade).

Veja que, dessa forma, como a cada jogada Bobisvaldo acaba bloqueando a maior camada disponível, Allicy consegue retirar, no máximo, um número da camada $2n$, um da $2n - 2$, ... (perceba que os números em camadas maiores sempre são maiores do que os de camadas menores)

Grade de Correção

Estratégia de Allicy

- Apresentar alguma estratégia válida de Allicy: 1 ponto
- Justificar que a estratégia dá o resultado desejado: 2 pontos

Estratégia de Bobisvaldo

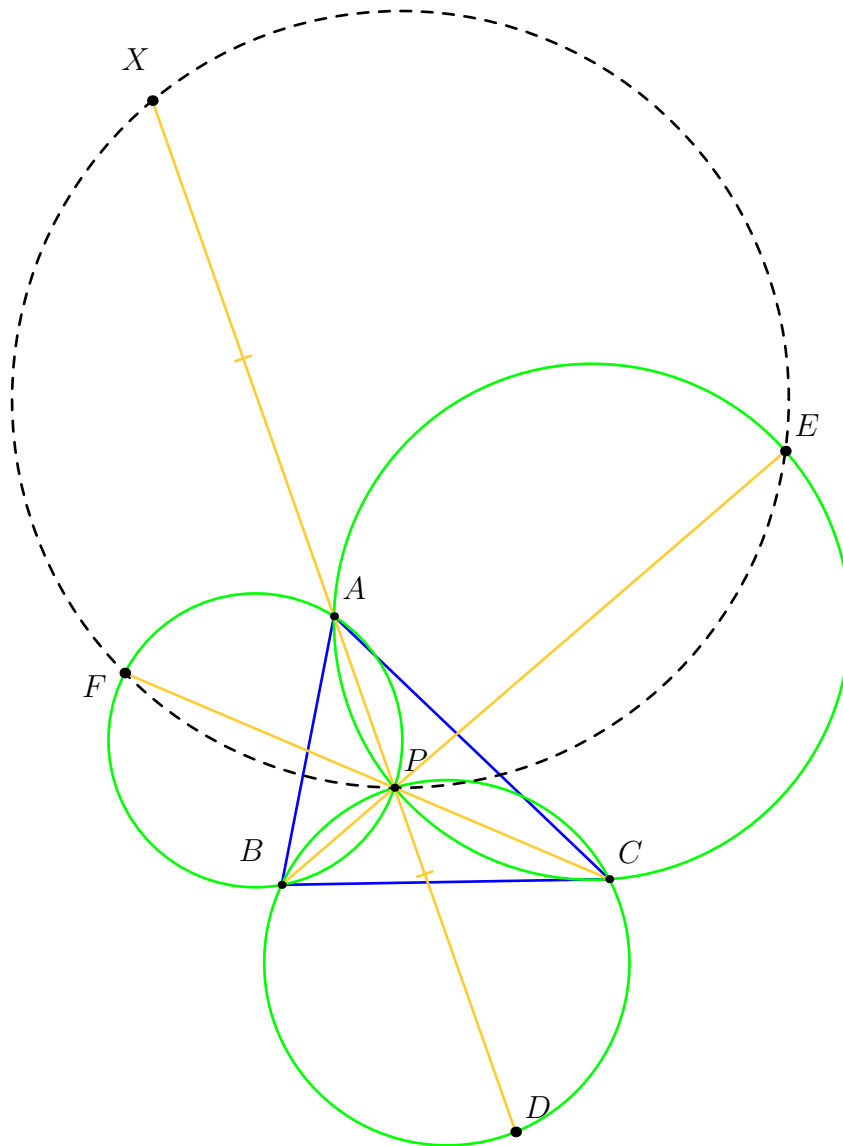
- Propor algum preenchimento de tabuleiro válido por Bobisvaldo: 2 pontos
- Criar alguma estratégia relevante: 2 pontos
- Explicar detalhadamente: 3 pontos (*Nota: esse critério é muito subjetivo. Como o problema pode admitir várias soluções precisamos levar em conta diversos fatores. Como esse problema é de difícil justificativa, basta que o competidor seja capaz de apresentar informações suficientes para nos convencer que ele entenda a solução.*)

Outros

- Somente mencionar a resposta final sem nenhum embasamento: 0 ponto
- Qualquer solução correta, mas com pequeno deslize facilmente corrigível: -2 pontos
- Pequenos erros de conta/digitação: -0 ponto

Problema 4. Seja $\triangle ABC$ um triângulo e P um ponto qualquer. A reta AP intersecta circuncírculo de BPC em $D \neq P$. Os pontos E e F são definidos de maneira análoga considerando B e C . Seja X a reflexão de D por A . Prove que E, F, P, X estão sobre uma mesma circunferência.

Proposto por Rafael Amiune



Solução 1

Vamos mostrar que os triângulos $\triangle XFE$ e $\triangle AFB$ são semelhantes, que acaba o problema, pois teríamos

$$\angle EXF = \angle FAB = \angle FPB = 180^\circ - \angle EPF.$$

Para isso, basta mostrar que $\triangle FBE \sim \triangle FAX$ e o fato segue da semelhança automática gerada pela roto-homotetia de centro F . Por um lado, temos que

$$\angle FBE = \angle FBP = \angle FAX.$$

Logo, apenas precisamos mostrar que $\frac{BF}{BE} = \frac{AF}{AX}$, que é análogo a $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BE}$. Mas os triângulos $\triangle AFB$ e $\triangle DCB$ são semelhantes, pois

$$\angle FAB = \angle FPB = \angle BCD$$

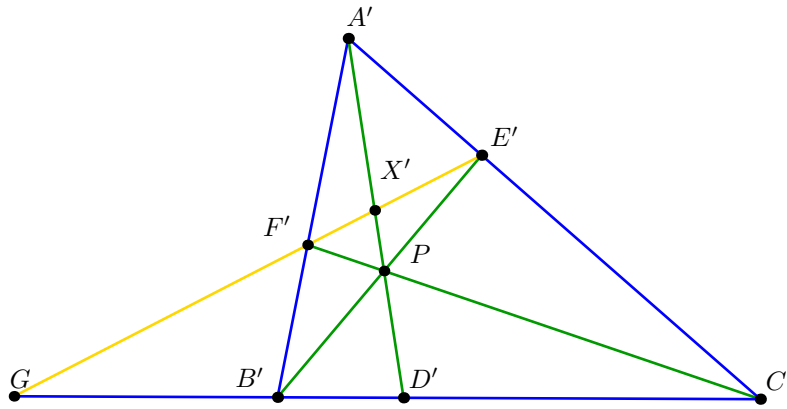
e

$$\angle FBA = \angle FPA = \angle DPC = \angle DBC.$$

Portanto, $\frac{AF}{BF} = \frac{CD}{BC}$, ou seja, queremos $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BE} \iff \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{BE}$, que é verdade, uma vez que $\triangle ACD \sim \triangle ECD$ segue da roto-homotetia gerada por $\triangle BCD \sim \triangle ECA$, que é análogo a $\triangle AFB \sim \triangle DCB$, e acabamos. $\square$

Solução 2

Faremos uma inversão centrada em P de raio 1, segue a figura:



Definindo X' como o ponto inverso de $AD' \cap (E'F')$, basta mostrarmos que o inverso de X' , digamos Y , satisfaz $AY = AD$, que, utilizando a fórmula da distância, é

$$\frac{A'X'}{PA' \cdot PX'} = \frac{A'D'}{PA' \cdot PD'} \iff \frac{A'D'}{A'X'} \div \frac{PD'}{PX'} = 1.$$

Ou seja, usando segmentos orientados, queremos $(D', X'; A', P) = -1$. Mas, definindo $G = E'F' \cap B'C'$ e projetando, temos

$$(D', X'; A', P) \stackrel{E'}{=} (D', G; C', B') = -1.$$

.Sendo que a última igualdade vem de Ceva-Menelaus, e acabamos. $\square$

Grade de Correção

Solução 1

Pontuação não cumulativa

2 pontos. Conjecturar que $\triangle XFE$ é semelhante a algum dos triângulos $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$ e explicar porque isso resolve o problema.

Pontuação cumulativa

2 pontos. Reduzir o problema a $\triangle FBE \sim \triangle FAD'$ ou análogo.

1 ponto. Provar que $\angle FBE = \angle FAX$ ou análogo.

2 pontos. Reduzir o problema a $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BE}$ ou análogo.

2 pontos. Provar que $\triangle DBC \sim \triangle ABF$ ou análogo.

3 pontos. Concluir.

Solução 2

Pontuação não cumulativa

2 pontos. Fazer um rascunho do desenho após a inversão por P .

Pontuação cumulativa

2 pontos. Inverter por P e corretamente apontar os imagens dos pontos.

4 pontos. Usar a fórmula da distância com inversão e concluir que basta $\frac{A'D'}{A'X'} \div \frac{PD'}{PA'} = 1$.

2 pontos. Considerar o ponto G .

2 pontos. Concluir.