



Olimpíada Brasileira Online de Matemática

2ª Fase - 4-5 de outubro de 2025

Nome: _____

Série: _____

Nível Carlos
Moreira (Gugu)
Ensino Médio

Instruções de Prova

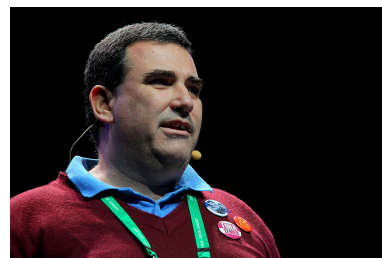
- I. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos do **ensino médio** e participantes da categoria aberta. Ela contém **quatro** questões. Todas as questões tem o mesmo valor.
- II. A prova é individual e sem consultas. Em particular, o uso de ferramentas de inteligência artificial é expressamente proibido. Respeite a cultura olímpica.
- III. Os materiais permitidos são: caneta, lápis/lapiseira, borracha, compasso, régua e esquadro (com ou sem marcação), papel em branco ou com pauta de qualquer tamanho (por exemplo, A4 ou A3). Transferidores e calculadoras de qualquer tipo não são permitidos.
- IV. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

Apoio:



Curiosidades:

Conhecido por gerações de estudantes como Gugu, Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira é pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e um dos maiores especialistas mundiais em sistemas dinâmicos, geometria fractal e conjuntos de Cantor. Medalhista olímpico na juventude e atual coordenador da OBM, Gugu tem dedicado décadas à formação de jovens talentos em matemática. Defendeu seu mestrado no IMPA aos 17 anos e concluiu o doutorado pouco depois, sob orientação de Jacob Palis. Fez pós-doutorado na Universidade Paris-Sul com o medalhista Fields Jean-Christophe Yoccoz, com quem desenvolveu resultados fundamentais sobre interseções de conjuntos de Cantor. Desde 1997, atua como pesquisador no IMPA, com contribuições que relacionam aproximações diofantinas, sistemas dinâmicos complexos, combinatória e teoria dos números. Seu espírito acessível e entusiasmo contagiante também se manifestam fora da lousa: é célebre por manter a contagem detalhada dos mais de 5.000 gols marcados em partidas de futebol ao longo dos anos. Recebeu, em 2018, o Prêmio Erdős da União Matemática Internacional, reconhecendo seu impacto na educação matemática por meio das olimpíadas. Para ele, a matemática é uma ciência viva, repleta de descobertas — e que, sim, é muito divertida.



Problema 1. Allicy e Bobisvaldo jogam um jogo. Para começar, Bobisvaldo preenche um tabuleiro $2n \times 2n$, com cada número entre 1 e $4n^2$ aparecendo exatamente uma vez. Depois, eles realizam o seguinte movimento alternadamente, com Allicy começando:

- O jogador escolhe uma casa disponível do tabuleiro;
- Todas as casas que estão na mesma linha ou coluna do que a casa escolhida se tornam indisponíveis, nunca podendo ser escolhidas.

Após realizar suas n jogadas, Allicy soma o número escrito em todas as casas que escolheu. Determine qual é o menor valor dessa soma que Allicy consegue garantir, independentemente das escolhas de Bobisvaldo.

Proposto por Bruno Feltran

A resposta é $\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)n$

Estratégia para Allicy que garante essa soma

Em cada jogada, escolha sempre o maior número disponível. Note que na i -ésima jogada de Allicy, existem exatamente $(2n+2-2i)^2$ números disponíveis, então o maior deles é pelo menos essa quantidade. Isso totaliza:

$$S \geq \sum_{i=1}^n (2n+2-2i)^2 = 4 \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{3}(2n+1)(n+1)n$$

Estratégia para Bobisvaldo

Divida o tabuleiro em “camadas” de $2i-1$ quadrados, contendo exatamente os números de $(i-1)^2$ até i^2 , conforme mostrado na figura.

1	4	8	14	22	32	44	58
2	3	9	15	23	33	45	59
5	6	7	16	24	34	46	60
10	11	12	13	25	35	47	61
17	18	19	20	21	36	48	62
26	27	28	29	30	31	49	63
37	38	39	40	41	42	43	64
50	51	52	53	54	55	56	57

Figura 1: Estratégia de Bobisvaldo

Em cada jogada, deixe Bobisvaldo escolher o maior número disponível no tabuleiro. Note que, se Bobisvaldo escolheu um número na camada x , então, após sua jogada, toda essa camada estará bloqueada (seja por essa própria jogada ou por movimentos anteriores de Allicy, isso resulta da maximalidade).

Veja que, dessa forma, como a cada jogada Bobisvaldo acaba bloqueando a maior camada disponível, Allicy consegue retirar, no máximo, um número da camada $2n$, um da $2n - 2$, $\dots$ (perceba que os números em camadas maiores sempre são maiores do que os de camadas menores)

Grade de Correção

Estratégia de Allicy

- Apresentar alguma estratégia válida de Allicy: 1 ponto
- Justificar que a estratégia dá o resultado desejado: 2 pontos

Estratégia de Bobisvaldo

- Propor algum preenchimento de tabuleiro válido por Bobisvaldo: 2 pontos
- Criar alguma estratégia relevante: 2 pontos
- Explicar detalhadamente: 3 pontos (*Nota: esse critério é muito subjetivo. Como o problema pode admitir várias soluções precisamos levar em conta diversos fatores. Como esse problema é de difícil justificativa, basta que o competidor seja capaz de apresentar informações suficientes para nos convencer que ele entenda a solução.*)

Outros

- Somente mencionar a resposta final sem nenhum embasamento: 0 ponto
- Qualquer solução correta, mas com pequeno deslize facilmente corrigível: -2 pontos
- Pequenos erros de conta/digitação: -0 ponto

Problema 2. Seja $d > 1$ um inteiro livre de quadrados (isto é, não existe inteiro $k > 1$ tal que k^2 divide d). Os números $1 - \sqrt{d}$, $\sqrt{d}$ e $1 + \sqrt{d}$ são escritos em um quadro. A cada minuto, se x , y e z estão escritos no quadro, então esses números são apagados e os números $x + xy + y$, $y + yz + z$, $z + zx + x$ são escritos. Determine, em função de d , se é possível que todos os números escritos no quadro sejam racionais após um número finito de minutos.

Proposto por Tiago Trindade

Nota: Esse problema é inspirado no P1 do teste brasileiro da Ibero de 2018.

Provaremos que a resposta é que não é possível para nenhum tal valor de d .

Sejam x_n, y_n e z_n os números escritos no quadro após n minutos.

Defina $I(x, y, z) = (x+1)(y+1)(z+1)$. Note que $I(x+xy+y, y+yz+zx, z+zx+x) = (x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2$.

Dessa forma provamos indutivamente que $I(x_n, y_n, z_n) = I(x_0, y_0, z_0)^{(2^n)} = ((4-d)(1+\sqrt{d}))^{(2^n)}$.

É suficiente provar que $(1+\sqrt{d})^m$ é irracional para qualquer inteiro positivo m , uma vez que $((4-d)(1+\sqrt{d}))^{(2^n)} \in \mathbb{Q}$ e $(4-d)^{2^n} \in \mathbb{Q}$, $d \neq 4$, (que é verdade pois d é inteiro e livre de quadrados) implicaria $(1+\sqrt{d})^{2^n} \in \mathbb{Q}$.

Seja $\overline{a+b\sqrt{d}} = a-b\sqrt{d}$ o conjugado de $a+b\sqrt{d}$ em $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Suponha por contradição que $(1+\sqrt{d})^m = r \in \mathbb{Q}$. Então

$$r = \bar{r} = \overline{(1+\sqrt{d})^m} = \overline{(1+\sqrt{d})}^m = (1-\sqrt{d})^m$$

(pois $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.)

Quando m é ímpar o lado esquerdo é positivo e o direito é negativo, contradição. Logo, assuma que m é par.

Então, $\sqrt{d} + 1 = |1 + \sqrt{d}| > |1 - \sqrt{d}| = \sqrt{d} - 1$ donde

$$r = |(1 + \sqrt{d})^m| > |(1 - \sqrt{d})^m| = r$$

contradição. 14.55597pt

Grade de Correção

Pontuação não cumulativa:	
2 pontos. Provar que a resposta é não para algum valor específico de d .	
14.55597ptPontuação cumulativa:	
3 pontos. Definir $I(x, y, z) = (x+1)(y+1)(z+1)$.	
5 pontos. Provar que $(1+\sqrt{d})^m$ é irracional para todo m inteiro positivo, ou somente que $(1+\sqrt{d})^{2^n}$	
é irracional para todo n inteiro positivo. Isso pode ser feito usando, por exemplo,	
– o conjugado ou a norma em $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$;	
– a expansão binomial de $(1+\sqrt{d})^m$;	
– independência linear sobre $\mathbb{Z}$ ou sobre $\mathbb{Q}$, desde que deslizes não triviais não sejam	
cometidos (qualquer deslize que não seja de correção óbvia numa solução que segue por	
esse caminho resultará na nota correspondente a este item sendo zerada);	
– outras ferramentas elementares.	
2 pontos. Concluir o problema.	
-1 ponto. Pequenos deslizes.	
-2 pontos. Usar alguma propriedade de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sem demonstrar entendimento de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Em particular,	
não escrever $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ e então usar uma notação diferente do padrão.	

Nota: pontuações cumulativas e não cumulativas não acumulam entre si.

Problema 3. O reino da Noiclândia é formado por várias províncias desconectadas entre si. Cada província é formada por uma ou mais cidades, sendo que algumas dessas cidades são ligadas por estradas de mão dupla. Sabe-se que, para quaisquer duas cidades em uma mesma província, existe exatamente um modo de ir de uma

a outra usando as estradas sem passar duas vezes pela mesma cidade. O pesquisador Gugu precisa descobrir quantas províncias formam a Noiclândia, porém possui apenas uma lista das n cidades do reino rotuladas de 1 a n e um dispositivo que funciona da seguinte forma: ao inserir o rótulo de uma cidade v , o dispositivo retorna o rótulo da cidade mais distante de v localizada na mesma província. Caso haja mais de uma, ele considera a de maior rótulo. O pesquisador pode utilizar o dispositivo quantas vezes quiser. Determine se Gugu consegue sempre atingir seu objetivo.

Proposto por Pedro Tomás e Rafael Amiune

Afirmamos que Gugu consegue sempre atingir seu objetivo. Vamos tratar o problema com linguagem de grafos. Cada província é uma árvore e queremos descobrir o número de componentes conexas da floresta F . Seja $f(v)$ o vértice mais distante de v na mesma árvore que v . Caso haja mais de um, considere o de maior rótulo. Sejam também $r(v)$ o rótulo do vértice v e $d(a, b)$ a distância entre os vértices a e b em F .

Usando o dispositivo, Gugu descobre $f(v)$ para todo vértice v de F . A estratégia de Gugu é construir um grafo direcionado F' com os mesmos vértices de F ligando v a $f(v)$ para todo vértice v de F e contar o número de componentes conexas de F' . Vamos provar que F e F' possuem o mesmo número de componentes conexas. Para isso, provaremos os seguintes lemas.

Lema 1. Toda componente P' de F' com pelo menos dois vértices possui um ciclo direcionado de tamanho 2.

Prova: Considere um vértice v_1 qualquer em P' e seja $v_{i+1} = f(v_i)$ para $i \geq 0$. Como cada componente de F' possui um número finito de vértices, devemos ter $i < j$ tais que $f(v_j) = v_i$. Se $f(v_i) \neq v_j$, devemos ter $d(v_i, v_{i+1}) \leq d(v_{i+1}, v_{i+2}) \leq \dots \leq d(v_j, v_i) \leq d(v_i, v_{i+1}) \implies d(v_i, v_{i+1}) = d(v_{i+1}, v_{i+2}) = \dots = d(v_j, v_i) \implies r(v_j) < r(v_{i+1}) < r(v_{i+2}) < \dots < r(v_{j-1}) < r(v_j)$, absurdo! Logo, temos $f(v_i) = v_j$ e $f(v_j) = v_i$, como desejado. $\square$

Lema 2. Qualquer componente P de F com pelo menos dois vértices possui no máximo um par a, b tal que $f(a) = b$ e $f(b) = a$.

Prova: Suponha por absurdo que existam a, b, c, d distintos dois a dois em uma mesma árvore tais que $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = d, f(d) = c$. Se a não for uma folha, existe um vértice mais distante de b do que a , absurdo! Repetindo o argumento, temos que a, b, c, d são folhas. Agora, considere os caminhos AB de a a b , AC de a a c e AD de a a d . Como a é uma folha, todos compartilham uma mesma aresta inicial e se separam a partir de um determinado ponto. Seja x o último vértice comum entre AB e AC antes de se separarem e y o último vértice comum entre AB e AD antes de se separarem. Assuma sem perda de generalidade que, caso $x \neq y$, x está mais próximo de a do que y . Como $f(c) = d$, temos $d(c, d) = d(c, x) + d(x, y) + d(y, d) \geq d(c, b) = d(c, x) + d(x, y) + d(y, b) \implies d(y, d) \geq d(y, b)$, com igualdade somente se $r(d) > r(b)$. Contudo, como $f(a) = b$, temos $d(a, b) = d(a, y) + d(y, b) \geq d(a, d) = d(a, y) + d(y, d) \implies d(y, b) \geq d(y, d)$, com igualdade somente se $r(b) > r(d)$, absurdo! Logo, temos no máximo um par a, b tal que $f(a) = b$ e $f(b) = a$, como desejado. $\square$

Com esses dois lemas, conseguimos terminar o problema. Note que componentes P de F com apenas um vértice v , tornam-se componentes P' de F' com apenas um vértice v tal que $f(v) = v$, então a quantidade de componentes desse tipo se preserva. Seja k a quantidade de componentes de F com pelo menos dois vértices e k' a quantidade de componentes de F' com pelo menos dois vértices. Se $k' < k$, existem dois vértices a, b em componentes distintas de F na mesma componente em F' , porém a f liga apenas vértices na mesma componente de F , então não existe caminho entre a e b em F' , absurdo! Logo, $k' \geq k$. Seja m a quantidade de pares de vértices a, b tais que $f(a) = b$ e $f(b) = a$. Pelo Lema 1, $m \geq k'$ e, pelo Lema 2,

$m \leq k \implies k' \leq k \leq k' \implies k' = k$, logo F e F' possuem o mesmo número de componentes conexas, como queríamos demonstrar. □

Grade de Correção

Pontuação cumulativa

2 pontos. Construir F' e conjecturar que F e F' possuem o mesmo número de componentes conexas.

1 ponto. Construir F' , mas não fazer a conjectura.

1 ponto. Fazer a conjectura.

3 pontos. Enunciar e provar o Lema 1.

1 ponto. Enunciar o Lema 1.

2 pontos. Provar o Lema 1.

3 pontos. Enunciar e provar o Lema 2.

1 ponto. Enunciar o Lema 2.

2 pontos. Provar o Lema 2.

1 ponto. Considerar m .

1 ponto. Concluir.

Outros

1 ponto. Mencionar que $f(v)$ é sempre ponta de um diâmetro.

2 pontos. Mencionar que o par $\{f(v), f(f(v))\}$ é o mesmo para todo vértice v (esse resultado pode ser obtido a partir da argumentação do Lema 2).

0 ponto. Afirmar que Gugu sempre consegue atingir seu objetivo sem apresentar uma estratégia válida.

-1 ponto. Não tratar separadamente as componentes com apenas um vértice.

-2 pontos. Pequenos deslizes facilmente corrigíveis.

10 pontos. Qualquer solução alternativa correta.

Problema 4. Seja $\triangle ABC$ um triângulo acutângulo escaleno, I seu incentro, e ω seu circuncírculo. Seja ω_1 o círculo tangente a ω e aos segmentos AB e BC , e seja E o ponto de tangência de ω_1 e ω . Analogamente defina ω_2 tangente a ω e aos segmentos AC e BC , e F o ponto de tangência de ω_2 e ω .

Prove que BC , EF e a perpendicular a AI por I concorrem.

Proposto por Tiago Trindade



Lema. Se T_B é o ponto de tangência do B -exincírculo com AC , então as retas BE e BT_B são isogonais.

Prova. Basta ver que o círculo ω_1 e o B -exincírculo trocam mediante uma inversão de centro B e raio $\sqrt{ac}$, seguida de uma reflexão por BI . $\square$

Agora, como $T_B \equiv (p - a : 0 : p - c)$, sabemos que

$$E = \left(\frac{a^2}{p - a} : x : \frac{c^2}{p - c} \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} a^2 \cdot x \cdot \frac{c^2}{p - c} + b^2 \cdot \frac{a^2}{p - a} \cdot \frac{c^2}{p - c} + c^2 \cdot x \cdot \frac{a^2}{p - a} &= 0 \\ \implies \frac{x}{p - a} + \frac{x}{p - c} + \frac{b^2}{(p - a)(p - c)} &= 0 \implies x = -\frac{b^2}{(p - a) + (p - c)} = -b. \end{aligned}$$

Logo,

$$E = \left(\frac{a^2}{p - a} : -b : \frac{c^2}{p - c} \right) \quad \text{e} \quad F = \left(\frac{a^2}{p - a} : \frac{b^2}{p - b} : -c \right),$$

analogamente.

Agora, vamos calcular a interseção T de BC e da perpendicular a AI por I .

Sejam $Y = (p - c : 0 : p - a)$ e $Z = (p - b : p - a : 0)$ os pontos de contato do incírculo com AC e AB , respectivamente. Sabemos que T , I e o ponto do infinito de YZ são colineares ($YZ \perp AI$).

Se $P_{oYZ} = (1 : y : -1 - y)$, então

$$\begin{vmatrix} 1 & y & -1 - y \\ p - c & 0 & p - a \\ p - b & p - a & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies y(c - b) = (p - a) + (p - c) \implies y = \frac{b}{c - b}.$$

Portanto,

$$P_{oYZ} = (b - c : -b : c).$$

Se $T = (0, t, 1 - t)$, da colinearidade com P_{oYZ} e I obtemos

$$\begin{vmatrix} 0 & t & 1 - t \\ b - c & -b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \implies t(ac + b^2 - ab + c^2) = bc - b^2 - ab,$$

e, usando $p = \frac{a+b+c}{2}$,

$$t = \frac{2b(p - c)}{(b - c)p}.$$

Assim, após normalizar as coordenadas,

$$T = (0 : b(p - c) : -c(p - b)).$$

Agora, basta checar que

$$\begin{vmatrix} 0 & b(p-c) & -c(p-b) \\ \frac{a^2}{p-a} & \frac{b^2}{p-b} & -c \\ \frac{c^2}{p-a} & -b & \frac{c^2}{p-c} \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & p-c & -(p-b) \\ 1 & \frac{b}{p-b} & -1 \\ 1 & -1 & \frac{c}{p-c} \end{vmatrix} = 0.$$

De fato,

$$(p-b) - (p-c) = -\left(\frac{b}{p-b}\right)(p-b) + \left(\frac{c}{p-c}\right)(p-c) \implies c-b = c-b \implies 0=0. \square$$

Grade de Correção

Solução 1

2 pontos. Prova que $\#PQEF$ é cíclico (ex.: “estrela da morte” em BC / potência do ponto).

1 ponto. Estabelece $\#FBPI$ e $\#ECQI$ cíclicos com ângulos-chave indicados.

2 pontos. Mostra TI tangente a (PIQ) , p.ex. $\angle TIP = \angle IQP$.

5 pontos. Conclui a concorrência (identifica o ponto T e justifica a igualdade/potência usada).

Solução 2

0 pontos. Fixa $\triangle ABC$ como referência baricêntrica e define $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1 ponto. Justifica a isogonalidade $BE-BT_B$ (inversão de centro B e raio $\sqrt{ac}$ + reflexão em BI , ou equivalente).

2 pontos. Determina E usando a equação do circuncírculo e o parâmetro correto $E = \left(\frac{a^2}{p-a} : -b : \frac{c^2}{p-c}\right)$, e F de modo análogo (ou vice-versa).

2 pontos. Encontra T como interseção de BC com a perpendicular a AI por I : usa $Y = (p-c : 0 : p-a)$, $Z = (p-b : p-a : 0)$, ponto no infinito de YZ e colinearidade $(T, I, P_{\infty, YZ})$, obtendo $T = (0 : b(p-c) : -c(p-b))$.

5 pontos. Verifica a concorrência ($\det[T, E, F] = 0$ ou razão vetorial equivalente) e conclui.

-2 pontos. Erros facilmente corrigíveis nas contas.