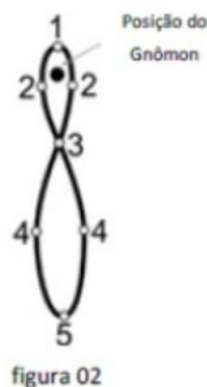
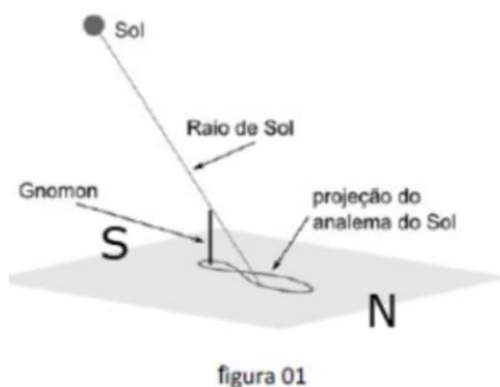


1. (1 ponto) O **Analema de Gnomon** é a curva em formato de "8" assimétrica traçada pela sombra da ponta (nodo) de um gnomon registrada *sempre no mesmo horário* geralmente ao meio dia ao longo de um ano. Não é a sombra instantânea, mas o *lugar geométrico* desses pontos. O formato surge porque o Sol não está no mesmo ponto no céu na mesma hora em dias diferentes, devido à inclinação da Terra e à excentricidade da órbita (a Equação do Tempo).



- O ponto 3 representa os equinócios, e os pontos 1 e 5 os solstícios.
- O observador na imagem está entre o Trópico de Câncer e o Círculo Polar Ártico.
- O observador na imagem está entre o Equador e o Trópico de Câncer.
- No ponto 1, a Terra se encontra no periélio, e no 5 em seu afélio.
- O observador na imagem está entre o Círculo Polar Antártico e o Polo Sul.

Solução:

Analisando a posição do analema e do gnomon na vertical fixado no horizonte, percebemos que o Sol ao meio dia, possui sua sombra na direção norte, portanto, podemos assumir que o equador situa-se na direção Sul e o polo elevado é, portanto, o polo Norte.

Podemos notar que uma pequena parte da sombra do relógio de Sol próximo ao solstício de verão se encontra na direção Sul, portanto podemos concluir que o Sol ocupa os dois lados do zênite (sul e norte) no mesmo ano. Isso apenas ocorre quando o equador celeste é alto o suficiente e está próximo ao zênite, portanto, a localização é mais próxima do equador do que do polo.

Em relação aos pontos do analema, é conhecido que o ponto onde a curva é "maior" (5) se trata do solstício de inverno no hemisfério norte (dezembro) próximo ao periélio da Terra,

e o ponto onde a curva é "menor" (1), corresponde ao solstício de verão no hemisfério norte (junho) próximo ao afélio. O meio do analema são os equinócios, e não o ponto 3!

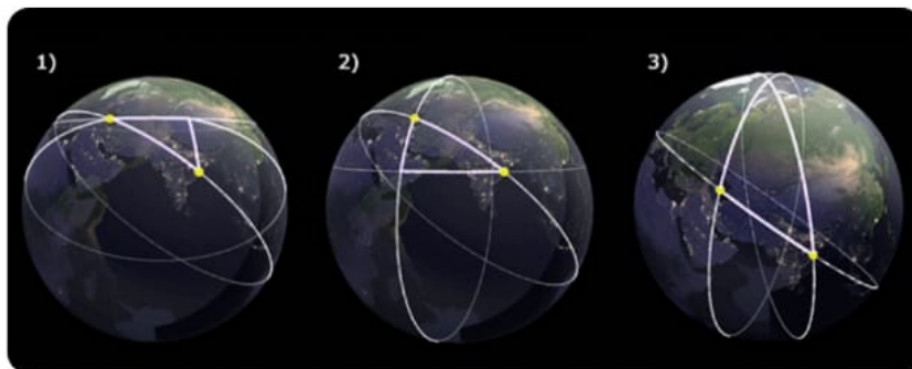
Item c)

2. (1 ponto) Muitos têm a trigonometria esférica como algo difícil, e de fato estudá-la a fundo é importante somente para as próximas etapas. Porém, em olimpíadas é comum esperar que o estudante descubra, na própria questão, como lidar com um conceito novo mesmo sem o conhecer previamente.

Imagine que você precisa saber a distância entre duas cidades na Terra, tratando a Terra como esfera. Para ser possível usar trigonometria esférica, o triângulo deve ser formado por três lados que sejam arcos de grande círculo. Grande círculo é a interseção da esfera com um plano que passa pelo centro da esfera, como o Equador e qualquer meridiano completo.

Paralelos, exceto o Equador, são círculos menores, portanto não servem como lados de um triângulo esférico. Em um triângulo esférico legítimo, cada lado é um arco de grande círculo com medida menor que cento e oitenta graus, e a menor rota entre dois pontos sobre a esfera é justamente o arco de grande círculo.

Com isso em mente, qual(is) triângulo(s) poderia(m) ser usado(s) para analisar a situação e permitir o cálculo da distância entre as cidades?



1), 2), 3)

- a) ambos, 1° e 2°
- b) apenas o 1°
- c) apenas o 2°
- d) apenas o 3°
- e) ambos, 2° e 3°

Solução:

A questão nos informa que podemos utilizar trigonometria esférica somente quando todos os ângulos são formados por arcos de círculos maiores. Note que nas figuras 1) e 2) há apenas

dois ângulos formados por arcos de círculos maiores. O terceiro ângulo de ambos os casos é formado por um círculo menor, o que não acontece na figura 3). Portanto, podemos utilizar apenas o 3° . **Alternativa d).**

3. (1 ponto) Um astrônomo está em um planeta distante, que gira em torno do seu eixo de rotação em um período de 10 horas. O planeta tem uma lua que orbita de maneira tal que, para os fins deste problema, seu movimento orbital pode ser considerado desprezível.

Ele sabe que o período de rotação do planeta é de 10 horas e que o movimento orbital da lua é tão lento que pode ser desprezado neste problema.

Ao cronometrar o pôr da lua, ele percebe que o intervalo de tempo entre o **primeiro contato** do disco lunar com o horizonte e o **último contato** (quando a lua desaparece completamente) é de **34,90** segundos.

A imagem mostra a trajetória da Lua no céu sem estrelas.



Considerando que esse intervalo corresponde ao tempo necessário para o disco lunar "varrer" todo o seu **diâmetro angular** em relação ao horizonte, estime o tamanho angular desta lua no céu desse planeta. Desconsidere quaisquer efeitos da atmosfera.

- a) $12,30^\circ$
- b) $0,28^\circ$
- c) $3,30^\circ$
- d) $6,30^\circ$
- e) $0,30^\circ$

Solução:

Como nesse caso os ângulos são pequenos, podemos utilizar uma aproximação 2d da trigonometria esférica (i.e.: triângulos euclidianos). Pelo esquema, que a Latitude em que o indivíduo se encontra é de 30° , uma vez que nesse caso a Lua se move no equador. Durante o tempo de 'por da Lua', o planeta se move por 34,9 segundos, resultado em um movimento angular (na linha branca) de:

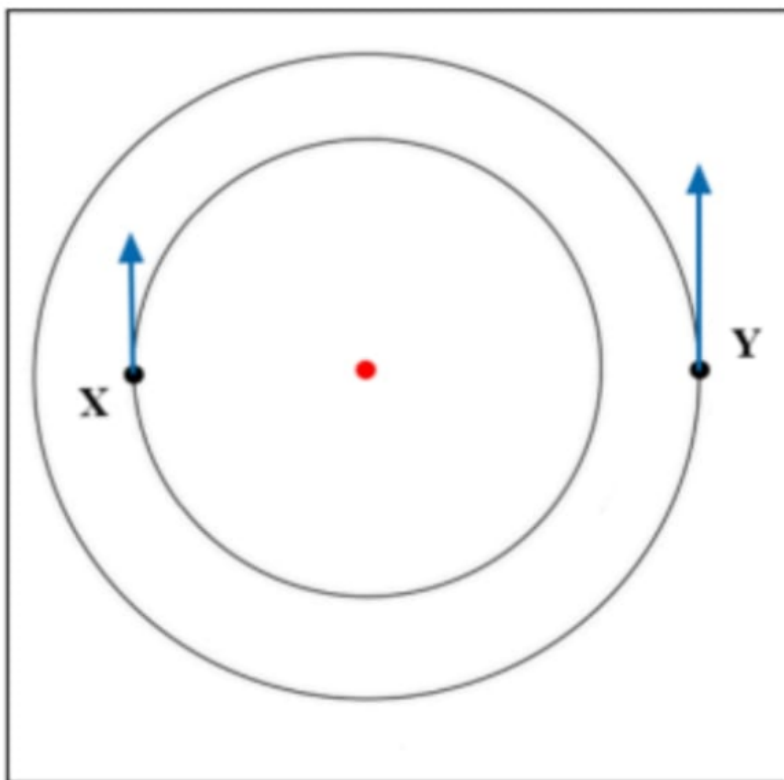
$$\theta = 360^\circ \frac{\Delta t}{T} \approx 0,35^\circ$$

Esse desvio θ deve corresponder ao diâmetro da Lua na linha amarela. Ou seja,

$$d_L = \theta \cos 30^\circ = 0,30^\circ$$

Letra e).

4. (1 ponto) Em um sistema planetário distante, dois planetas X e Y orbitam uma mesma estrela em trajetórias circulares no mesmo plano. A figura abaixo, fora de escala, mostra setas desenhadas sobre cada órbita indicando o sentido do movimento orbital de cada planeta.



Sabe-se que os períodos siderais (isto é, em relação às estrelas distantes) são:

- T_X igual a 1,00 ano planetário
- T_Y igual a 2,00 anos planetários

Uma observadora em X observa o planeta Y em determinada posição em relação à estrela central. Assinale a opção que traz quanto tempo se passará até que a configuração se repita.

- a) 2,08 anos
- b) 1,73 ano
- c) 1,31 ano
- d) 1,41 ano
- e) 0,67 ano

Solução:

No fundo, o que a questão nos pede é o período sinódico entre os planetas. Note que nesse caso, a nossa fórmula habitual:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_X} - \frac{1}{T_Y}$$

Não funciona, pois nesse caso, os planetas se movem em sentidos opostos (X se move no sentido horário e Y no anti-horário). Agora, a velocidade angular relativa é

$$\omega_S = \omega_X + \omega_Y$$

Pois eles se movem em sentidos opostos. Como $T \propto 1/\omega$, a fórmula que devemos utilizar aqui é,

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_X} + \frac{1}{T_Y}$$

Que resulta em $T_S = 0,67$ anos. **Alternativa e)**

5. (1 ponto) A velocidade máxima de um asteroide, que tem uma órbita elíptica ao redor do Sol, é de cerca de 17,1 km/s, enquanto sua velocidade orbital mínima é de cerca de 13,7 km/s.

Assinale a opção que traz a excentricidade da órbita deste asteroide.

- a) 0,11
- b) 0,31
- c) 0,61
- d) 0,21
- e) 0,41

Solução:

Conservando o momento angular no periélio e no afélio:

$$L_a = L_p \rightarrow mv_a r_a = mv_p r_p$$

Substituindo as distâncias pela geometria da elipse, onde $r_a = a(1 + e)$ e $r_p = a(1 - e)$:

$$v_a a(1 + e) = v_p a(1 - e)$$

Rearranjando para encontrar a razão entre as velocidades:

$$\frac{a(1 + e)}{a(1 - e)} = \frac{v_p}{v_a}$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{v_p}{v_a}$$

Isolando a excentricidade (e):

$$v_a(1+e) = v_p(1-e)$$

$$v_a + v_a e = v_p - v_p e$$

$$v_p e + v_a e = v_p - v_a$$

$$e(v_p + v_a) = v_p - v_a$$

$$e = \frac{v_p - v_a}{v_p + v_a}$$

Substituindo os valores dados ($v_p = 17,1$ km/s e $v_a = 13,7$ km/s):

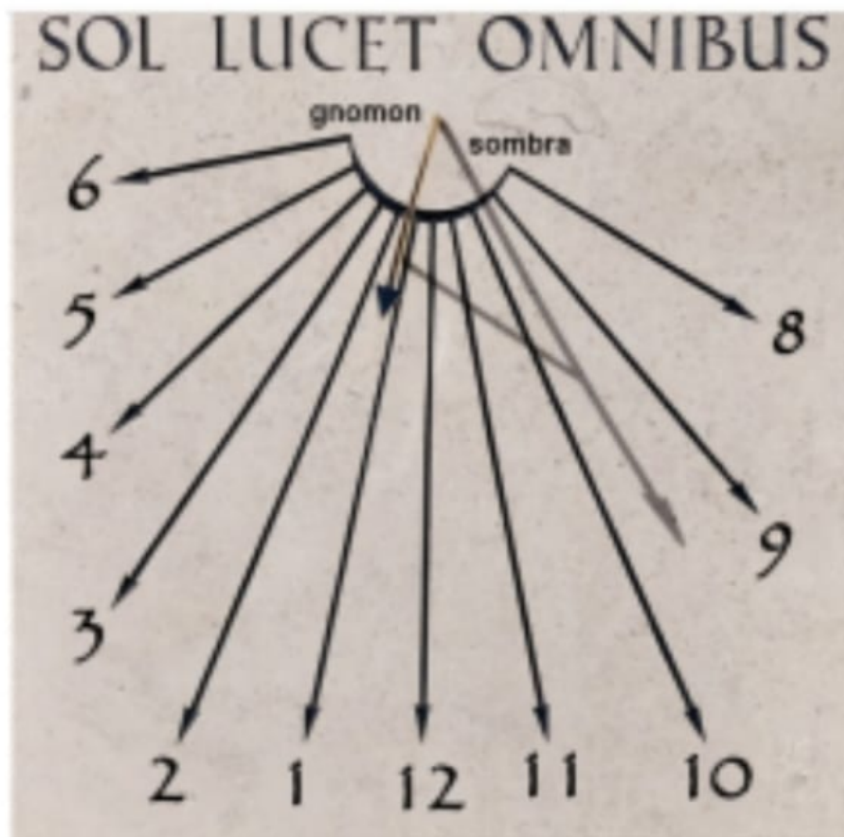
$$e = \frac{17,1 - 13,7}{17,1 + 13,7}$$

$$e = \frac{3,4}{30,8}$$

$$e \approx 0,11$$

Resposta: (a)

6. (1 ponto) Dizemos que um **Relógio de Sol é Vertical Meridional** quando a placa do seu mostrador for vertical e ela estiver faceada com um Ponto Cardeal. Quando a placa do seu mostrador vertical **não está de frente para nenhum dos Pontos Cardiais**, então dizemos que ele é um **Relógio de Sol Declinante**, e devemos indicar entre que Pontos Cardiais seu mostrador está faceado: N-L, N-O, S-L ou S-O.



Considerando o que foi descrito e a figura/situação que acompanha esta questão, assinale a alternativa correta:

- a) Este é um Relógio de Sol Declinante N-O, localizado no Hemisfério Sul.
- b) Este é um Relógio de Sol Declinante S-L, localizado no Hemisfério Norte.
- c) Este é um Relógio de Sol Meridional, localizado no Hemisfério Sul.
- d) Este é um Relógio de Sol Declinante S-L, localizado no Hemisfério Sul.
- e) Este é um Relógio de Sol Declinante N-O, localizado no Hemisfério Norte.

Solução:

Vamos imaginar que estamos olhando para a direção em que o relógio aponta. Como o período da manhã está para a nossa esquerda, o Sol deve nascer para a nossa direita (i.e: Leste à direita) logo estamos olhando para o Norte. Nos relógios de Sol verticais, o gnomon sempre aponta para o Polo Celeste oculto, logo estamos no Hemisfério Sul.

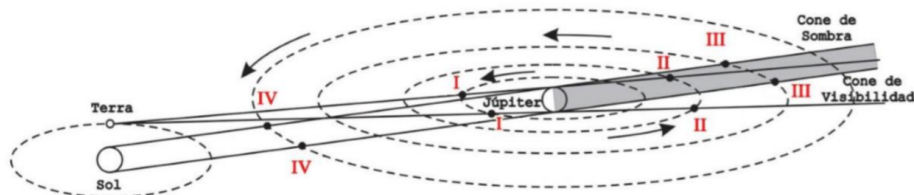
Note que as marcações do relógio são todas assimétricas, logo ele é do tipo declinante. Como o deslocamento está para o sentido do por do Sol (linhas mais curtas para o fim da tarde), temos que ele está deslocado para o Oeste. Logo, este relógio é do tipo Declinante, sentido N-O.

Alternativa a).

7. (1 ponto) A figura a seguir traz o esquema das configurações (fora de escala) dos fenômenos dos satélites galileanos do ponto de vista da Terra (fenômenos geocêntricos). Para os satélites temos

os seguintes símbolos:

- I. Io
- II. Europa
- III. Ganimedes
- IV. Calisto



Os fenômenos podem ser:

- O Eclipse do satélite pela sombra do disco do planeta (Desaparecimento e Reaparecimento);
- O Trânsito da sombra do satélite pelo disco do planeta (Imersão/Entrada e Emersão/Saída);
- O Trânsito do satélite pelo disco do planeta (Imersão/Entrada e Emersão/Saída);
- A Ocultação do satélite pelo disco do planeta (Desaparecimento e Reaparecimento).

Assinale a opção que identifica corretamente os fenômenos geocêntricos dos satélites de Júpiter que estão acontecendo na figura.

- a) Trânsito de Io, Ocultação de Europa (desaparecimento), Eclipse de Ganimedes (reaparecimento) e Trânsito da sombra de Calisto.
- b) Trânsito da sombra de Io, Ocultação de Europa (desaparecimento), Eclipse de Ganimedes (reaparecimento) e Trânsito de Calisto.
- c) Trânsito de Io, Eclipse de Europa (desaparecimento), Ocultação de Ganimedes (desaparecimento) e Trânsito da sombra de Calisto.
- d) Eclipse de Io, Trânsito de Europa (imersão), Trânsito da sombra de Ganimedes (emersão) e Eclipse de Calisto.
- e) Eclipse de Io, Ocultação de Europa (desaparecimento), Eclipse de Ganimedes (reaparecimento) e Trânsito de Calisto.

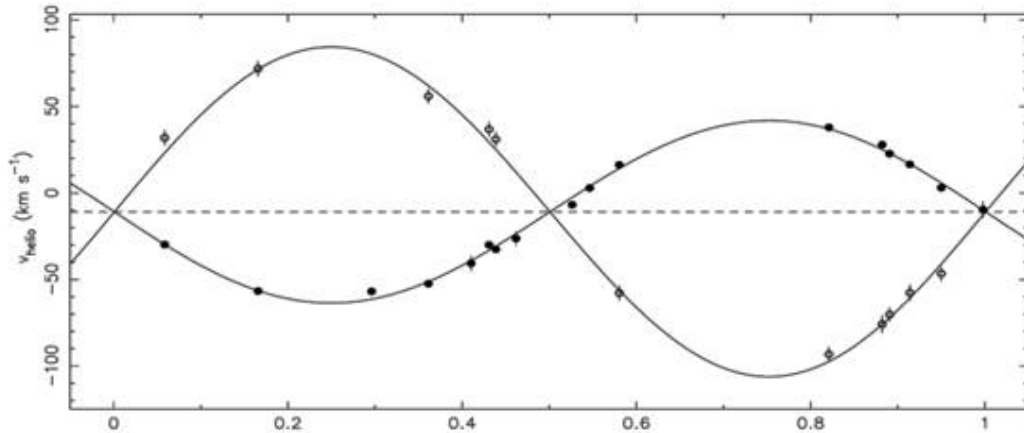
Solução:

Analisando a posição de cada satélite em relação à linha de visada da Terra e à luz do Sol:

1. **Satélite I (Io):** Está passando na frente do disco de Júpiter em relação à Terra. Logo, é o trânsito de Io.
2. **Satélite II (Europa):** Está entrando atrás do disco de Júpiter, ficando oculto para o observador na Terra. Logo, é o ocultação de Europa (Desaparecimento)
3. **Satélite III (Ganimedes):** Está saindo do cone de sombra gerado por Júpiter (não está atrás do disco do planeta visto da Terra, mas sim na sombra). Logo, é o eclipse de Ganimedes (Reaparecimento)
4. **Satélite IV (Calisto):** Está posicionado entre o Sol e Júpiter, projetando sua sombra sobre o planeta. Logo, é o trânsito da sombra de Calisto.

Resposta: (a)

8. (1 ponto) A figura a seguir mostra as curvas de velocidades radiais das estrelas A e B em um sistema binário espectroscópico, em função da fase orbital. As duas estrelas têm o mesmo período orbital, porém têm amplitudes de velocidade diferentes.



Sabendo que as órbitas são circulares, que o sistema é visto de lado e que a estrela A é a mais massiva, com massa $M_A = 2,0 M_\odot$, qual é, aproximadamente, a massa da estrela B?

- a) $0,6 M_\odot$
- b) $0,2 M_\odot$
- c) $1,2 M_\odot$
- d) $0,4 M_\odot$
- e) $1,6 M_\odot$

Solução:

De início, é importante lembrar que as velocidades radiais máximas observadas serão diferentes das velocidades orbitais correspondentes, uma vez que o sistema em questão está com o seu centro de massa em movimento. Nos instantes em que as velocidades radiais medidas são iguais, as componentes radiais das velocidades orbitais das estrelas são nulas e, consequentemente, as amplitudes observadas serão iguais à velocidade do centro de massa. Com base nisso, podemos medir v_{CM} pelo gráfico:

$$v_{CM} \approx -11 \text{ km/s}$$

Ademais, sendo K as máximas semi-amplitudes das velocidades radiais das estrelas, a velocidade orbital de cada estrela será

$$v_A = |K_A - v_{CM}|$$

$$v_B = |K_B - v_{CM}|$$

Medindo os valores de K :

$$K_A \approx -65 \text{ km/s}$$

$$K_B \approx 85 \text{ km/s}$$

Com isso, temos:

$$v_A \approx 54 \text{ km/s}$$

$$v_B \approx 96 \text{ km/s}$$

Agora, utilizando o fato de que o momento linear do sistema será nulo no referencial do centro de massa, podemos escrever que:

$$M_A v_A - M_B v_B = 0$$

Com isso:

$$M_B = \frac{v_A}{v_B} M_A$$

Calculando

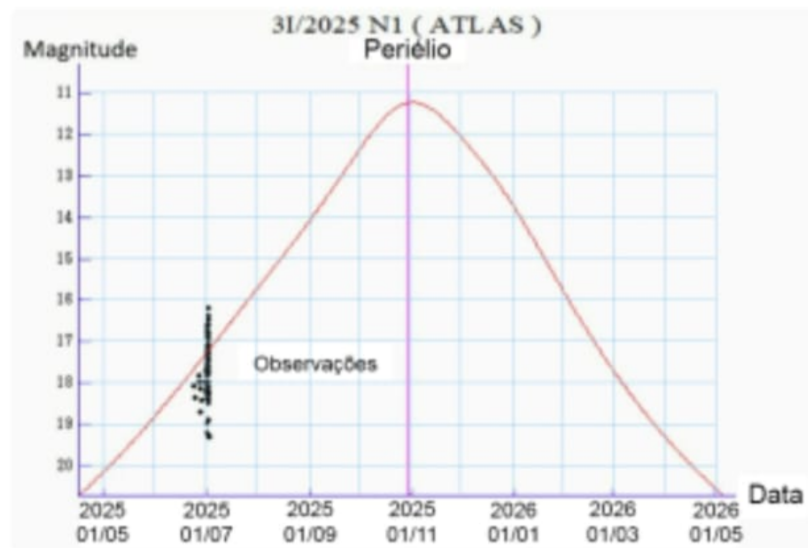
$$M_B \approx 1,2 M_{\odot}$$

Resposta: (c)

9. (1 ponto) A magnitude limite de um telescópio indica o menor brilho de um objeto que ele pode detectar. Esse valor é determinado principalmente pelo diâmetro da objetiva (a lente principal ou o espelho): quanto maior o diâmetro, maior a quantidade de luz coletada e, portanto, menor o brilho do objeto que pode ser visto.

A fórmula para o cálculo desta magnitude é frequentemente apresentada como uma simplificação, onde a magnitude limite de um telescópio é de aproximadamente **2,1 mais 5 vezes o logaritmo diâmetro da objetiva** (em milímetros), supondo condições de observações ideais e desconsiderando a turbulência atmosférica.

O gráfico a seguir traz a variação teórica da magnitude aparente do cometa extrassolar 3I/ATLAS (C/2025 N1 ATLAS) ao longo do tempo.



Baseado neste gráfico e no que foi apresentado, assinale a opção que traz o diâmetro mínimo que um telescópio precisa ter para observar este cometa no dia 01 de dezembro de 2025.

- a) 100 mm
- b) 120 mm
- c) 80 mm
- d) 110 mm
- e) 90 mm

Solução:

Pela relação dada no enunciado:

$$m = 2,1 + 5 \log D_{(mm)}$$

No dia 01 de dezembro de 2025 a magnitude foi de $12mag$.

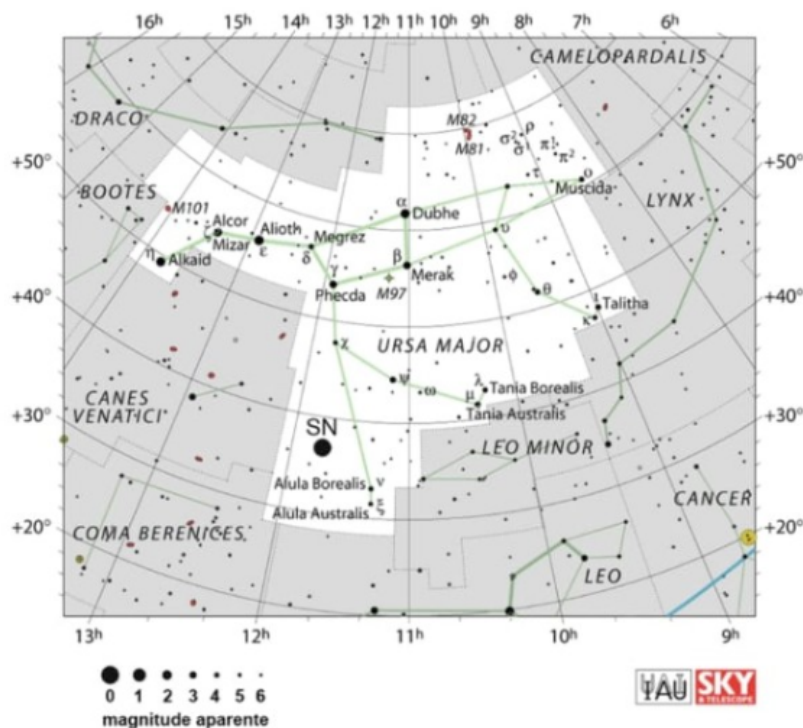
$$12 = 2,1 + 5 \log D_{(mm)}$$

$$D \approx 95,5mm$$

O telescópio precisa ter diâmetro mínimo de 95,5 milímetros, dentre as alternativas o telescópio com menor diâmetro que detectaria o corpo seria o de 100 milímetros.

Item a)

10. (1 ponto) Suponha que uma supernova (SN) foi observada na constelação de Ursa Maior. A carta celeste fornecida mostra a fonte como uma bolinha. Na legenda da imagem está indicada a magnitude aparente correspondente ao tamanho dessa bolinha.



A partir dessa magnitude aparente, determine quantos fótons por segundo por metro quadrado chegam da supernova na faixa visível centrada em 500 nm, assumindo que, em média, toda luz chega com esse comprimento de onda.

Para isso use as seguintes informações e relações:

- Fluxo de uma estrela de referência na Terra (banda de referência): $F_0 = 1,360 \text{ W/m}^2$
- Magnitude aparente do Sol: $m_{\odot} = -26.7$
- Constante de Planck: $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Velocidade da luz: $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Energia de um fóton: $E_{\gamma} = h f = \frac{hc}{\lambda}$

- a) $5,2 \times 10^{10} \text{ fótons/s/m}^2$
 b) $7,1 \times 10^{10} \text{ fótons/s/m}^2$
 c) $4,1 \times 10^{10} \text{ fótons/s/m}^2$
 d) $2,4 \times 10^{10} \text{ fótons/s/m}^2$
 e) $3,5 \times 10^{10} \text{ fótons/s/m}^2$

Solução:

Da legenda da carta celeste, a bolinha associada à supernova corresponde à magnitude aparente:

$$m_{\text{SN}} = 0.$$

Usamos a relação padrão entre fluxo e magnitude:

$$\frac{F_{\text{SN}}}{F_0} = 10^{-0.4(m_{\text{SN}} - m_{\odot})}.$$

Logo,

$$F_{\text{SN}} \simeq 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Energia por fóton em $\lambda = 500 \text{ nm}$:

$$E_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda} \simeq 3.98 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

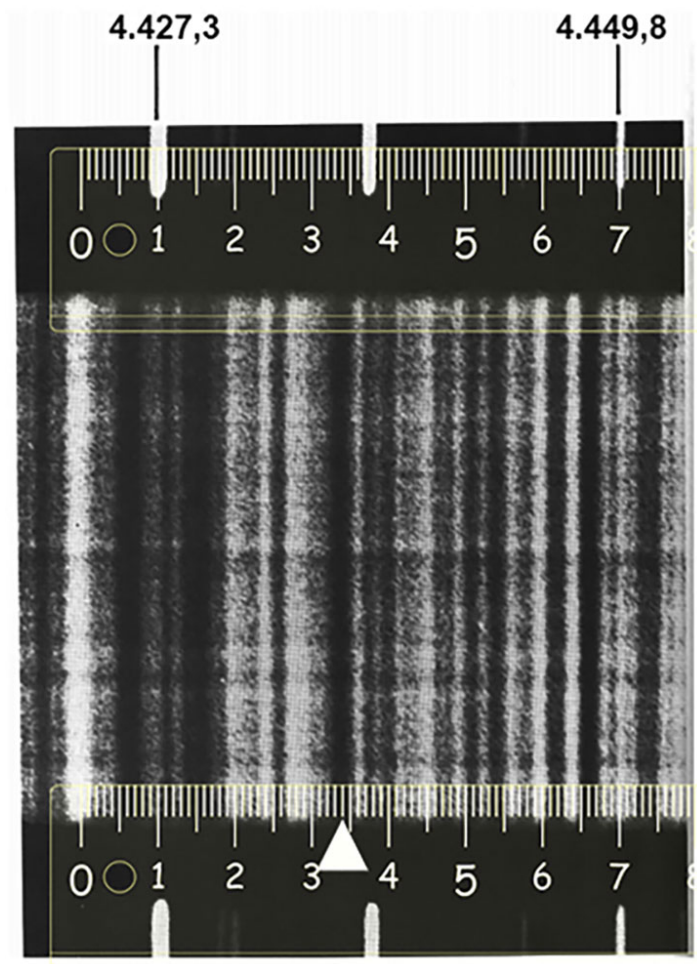
Número de fótons por segundo por metro quadrado:

$$N = \frac{F_{\text{SN}}}{E_{\gamma}} \simeq 7.1 \times 10^{10}.$$

Resposta: (b)

11. (1 ponto) A figura abaixo traz um espectrograma de uma estrela e linhas de comparação.

O comprimento de onda de laboratório em Angstroms (Å) de duas dessas linhas de comparação é dado na parte de cima da imagem. O triângulo branco assinala uma linha de absorção no espectro da estrela cujo comprimento de onda medido em laboratório é $\lambda_0 = 4437,6 \text{ Å}$.



Assinale a opção que traz, aproximadamente, o comprimento de onda λ observado e a velocidade radial v_r da estrela.

Dicas:

- Uma régua transparente foi superposta à imagem para facilitar as suas contas.
- $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$, onde c é a velocidade da luz ($3,0 \times 10^8$ m/s).

- 4436,3 Å; -87,9 km/s
- 4437,6 Å; +144,0 km/s
- 4435,0 Å; -144,0 km/s
- 4437,6 Å; -144,0 km/s
- 4438,9 Å; +87,9 km/s

Solução:

Medindo o valor de λ no gráfico, temos:

$$\lambda \approx 4436,3 \text{ Å}$$

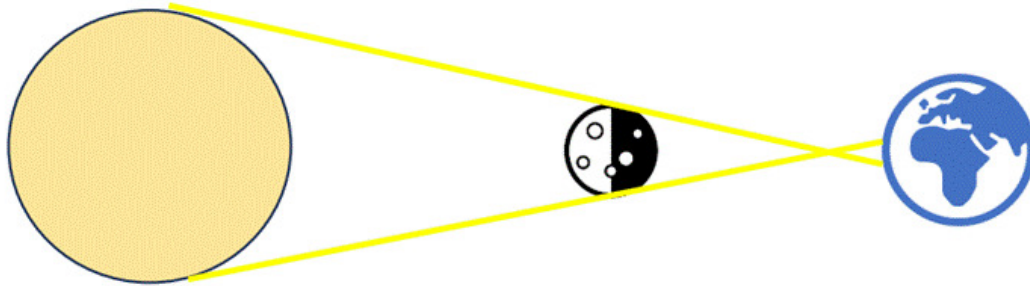
Ademais, pela fórmula fornecida:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c$$

$$v_r \approx -87,9 \text{ km/s}$$

Resposta: (a)

12. (1 ponto) Suponha que um dia o apogeu da Lua coincida com o periélio da Terra, conforme a figura, fora de escala, a seguir.



Um observador, em um local apropriado na Terra, observa o eclipse no zênite, em seu máximo.

Sendo assim, que fração aproximada da área do disco solar é coberta pela Lua?

Considere que a distância máxima entre os centros da Terra e da Lua é de 405.000 km, enquanto a distância mínima entre os centros da Terra e do Sol é de 147.100.000 km.

Dados: $R_{\text{Sol}} = 695.500 \text{ km}$; $R_{\text{Terra}} = 6.378 \text{ km}$; $R_{\text{Lua}} = 1.737 \text{ km}$

- a) 95%
- b) 80%
- c) 90%
- d) 85%
- e) 100%

Solução:

De início, podemos, pela imagem, concluir que o observador se encontra em uma região próxima à linha do Equador, de modo que as distâncias do Sol e da Lua em relação à Terra sejam as distâncias entre seus centros ao centro da Terra menos o raio da Terra.

Agora, calculando os raios angulares da Lua e do Sol no instante analisado:

$$\theta_{\text{Lua}} = \frac{R_{\text{Lua}}}{405.000 \text{ km} - R_{\text{Terra}}} \approx 0,2497^\circ$$

$$\theta_{\text{Sol}} = \frac{R_{\text{Sol}}}{147.100.000 \text{ km} - R_{\text{Terra}}} \approx 0,2709^\circ$$

Agora, a fração da área do disco solar coberta pela Lua será igual a razão entre as respectivas áreas angulares:

$$f = \frac{A_{\text{Lua}}}{A_{\text{Sol}}} = \left(\frac{\theta_{\text{Lua}}}{\theta_{\text{Sol}}} \right)^2$$

$$f \approx 85\%$$

Resposta: (d)

13. (1 ponto) Abaixo, apresentamos 3 gráficos de visibilidade de três astros distintos vistos da Terra.

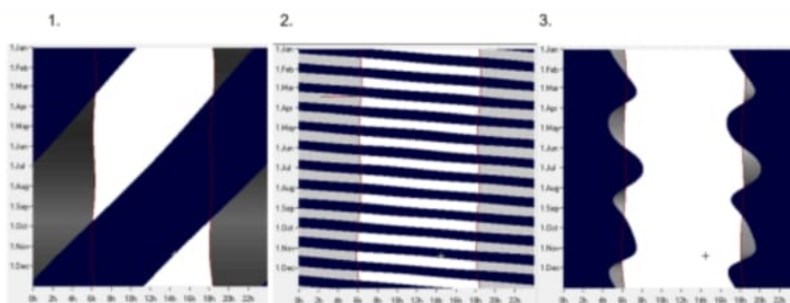
No eixo vertical temos os dias do ano e no eixo horizontal, as horas do dia.

As legendas dos gráficos indicam:

Região azul escura: O astro está abaixo do horizonte (não visível).

Região cinza : O astro está acima do horizonte e o Sol está abaixo dele (O astro está visível).

Região branca: O astro e o Sol estão abaixo do horizonte.



Associe corretamente os gráficos com os astros que eles representam:

- a) 1. Planeta Externo - 2. Lua - 3. Planeta Interno
- b) 1. Planeta Interno - 2. Planeta Externo - 3. Lua
- c) 1. Planeta Interno - 2. Lua - 3. Planeta Externo
- d) 1. Planeta Externo - 2. Planeta Interno - 3. Lua
- e) 1. Lua - 2. Planeta Externo - 3. Planeta Interno

Solução:

O movimento aparente do segundo astro possui ciclicidade mensal, indo de distâncias angulares em relação ao Sol de zero graus até 180 graus, o único corpo celeste com esse comportamento é a Lua.

É notável que no terceiro astro sua distância angular nunca é maior do que duas horas entre o Astro e o Sol. seu movimento é praticamente congruente com o movimento solar. Portanto, trata-se exclusivamente de um planeta interior. Essa peculiaridade é mais fácil de notar quando lembramos que Vênus, o planeta interior que possui a maior elongação máxima em relação ao Sol, possui apenas três horas de elongação!

Item a)

14. (1 ponto) Uma escoteira fez um experimento para descobrir sua latitude geográfica e comparar com a medida do seu GPS. Ela, então, finca uma vareta reta verticalmente, no centro de uma grande área plana e horizontal, de forma que a vareta ficou com **1,00 m** de altura. Com paciência

ela mediu o menor comprimento da sombra da vareta e anotou **1,26 m**. Muitas horas depois, ela anotou o maior comprimento da sombra, que foi de **6,70 m**.

Encontre a latitude Φ aproximada da escoteira sabendo que as medidas foram feitas no dia do Solstício de Verão do Hemisfério Norte. Para facilitar as contas, assuma que a declinação do Sol permaneceu a mesma para as duas medidas, considere o Sol como uma fonte puntiforme e ignore qualquer efeito da refração atmosférica.

Repare: Como o maior comprimento da sombra da vareta foi finito, a escoteira presenciou o Sol sempre acima do horizonte.

- a) 85°
- b) 80°
- c) 70°
- d) 75°
- e) 65°

Solução:

No solstício de verão do hemisfério norte, a declinação solar vale

$$\delta = +23,5^\circ.$$

A menor sombra ocorre ao meio-dia solar local:

$$\tan h_{\max} = \frac{1}{1.26} \Rightarrow h_{\max} \approx 38.6^\circ.$$

Para esse instante:

$$h_{\max} = 90^\circ - \Phi + \delta.$$

Logo,

$$\Phi = 90^\circ + \delta - h_{\max} = 90^\circ + 23.5^\circ - 38.6^\circ \approx 74.9^\circ.$$

A maior sombra ocorre à meia-noite solar local (Sol ainda acima do horizonte):

$$\tan h_{\min} = \frac{1}{6.70} \Rightarrow h_{\min} \approx 8.5^\circ.$$

E, no solstício:

$$h_{\min} = \Phi - 90^\circ + \delta.$$

Verificação:

$$\Phi - 90^\circ + 23.5^\circ \approx 8.5^\circ \Rightarrow \Phi \approx 75^\circ.$$

$$\boxed{\Phi \approx 75^\circ}.$$

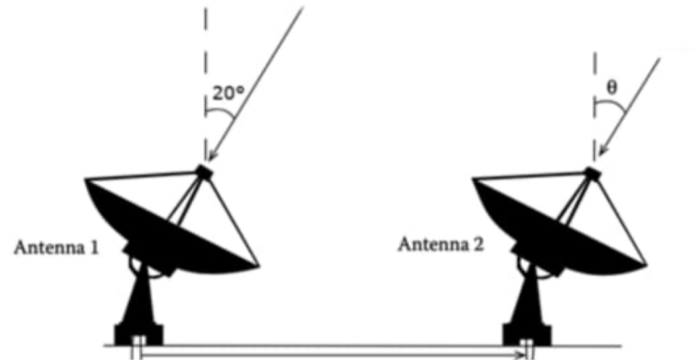
Resposta: (d)

15. (1 ponto)

Considere dois radiotelescópios separados por uma distância $d = 4.700m$. Uma frente de onda plana de rádio proveniente de uma fonte muito distante chega da direção indicada na figura.

Determine o atraso aproximado da captação do sinal da antena 1 em relação à antena 2.

Desconsidere quaisquer efeitos atmosféricos.



- a) 4416,56 μs
- b) 1607,49 μs
- c) 14,72 μs
- d) 5,36 μs
- e) 5,70 μs

Solução:

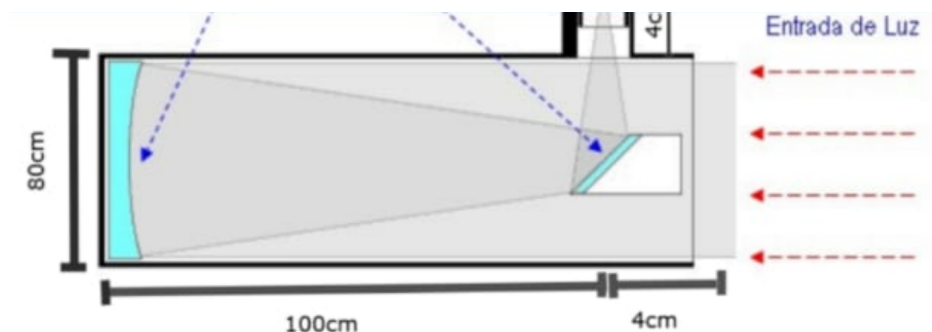
Num sistema de radiotelescópios, podemos relacionar o atraso com os parâmetros geométricos da seguinte forma:

$$\tau = \frac{\Delta S}{c} = \frac{d \sin \theta}{c}$$

$$\tau = 5,36 \mu s$$

Alternativa d

16. (1 ponto) Sobre o telescópio abaixo, assinale a alternativa que indica o seu tipo e a distância focal do espelho primário.



Esquema do telescópio

Dados do esquema:

- Comprimento total do tubo: 100 cm

- Distância entre o espelho secundário e a ocular/foco: 4 cm
- Diâmetro do espelho primário: 80 cm
- Trajetória da luz: A luz entra pela abertura, é refletida pelo espelho primário, refletida pelo espelho secundário (plano, inclinado a 45°) e sai lateralmente para a ocular.

- a) Newtoniano, 104 cm
- b) Cassegrain, 144 cm
- c) Kepleriano, 96 cm
- d) Newtoniano, 144 cm
- e) Newtoniano, 96 cm

Solução:

O esquema a seguir mostra claramente um telescópio Newtoniano (2 espelhos com a ocular perpendicular ao eixo principal do telescópio). O foco do espelho primário é simplesmente a distância total que a Luz percorre. Neste caso, temos a distância entre os espelhos + a distância entre o espelho secundário até a ocular (raio do telescópio) + o comprimento da ocular. Assim,

$$f_p = 100 + 40 + 4 = 144 \text{ cm}$$

Alternativa d).

17. (1 ponto) Na imagem a seguir podemos ver a Terra e a Lua, juntas no espaço. Ela foi feita no dia 6 de maio de 2010 pela sonda espacial não-tripulada Messenger, da NASA, destinada a estudar as características e o ambiente do planeta Mercúrio. A sonda entrou em órbita de Mercúrio em março de 2011 e ficou em operação até abril de 2015.



Considere que a sonda estava a uma distância $D = 183$ milhões de km do sistema e que a Terra e a Lua, do ponto de vista da sonda, estavam com sua máxima separação angular. Baseado nas informações e em seus conhecimentos, assinale a opção que traz, aproximadamente, esta separação angular entre a Terra e a Lua.

Dado: distância Terra-Lua $D_{TL} = 384.400$ km.

- a) $400''$
- b) $433''$
- c) $384''$
- d) $210''$
- e) $483''$

Solução:

A separação angular θ entre os astros em questão, considerando que $\theta \ll 1$, será dada por:

$$\theta = \frac{D_{TL}}{D}$$

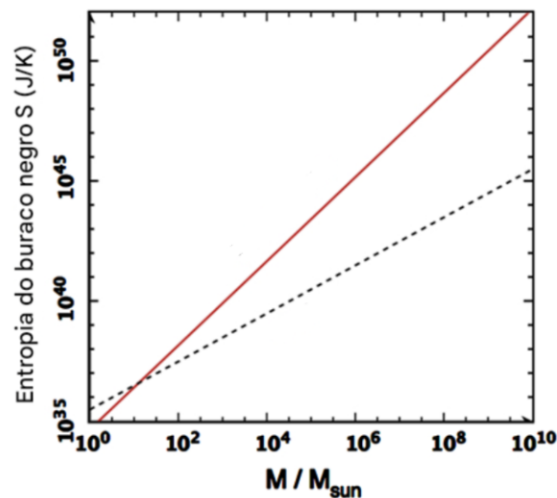
Calculando:

$$\boxed{433''}$$

Resposta: (b)

18. **(1 ponto)** No filme *Interstellar*, acompanhamos uma longa jornada pelo universo em busca de melhores condições de vida para os humanos da Terra. Na trama, é apresentado o planeta Miller, localizado a uma distância R do centro de um buraco negro supermassivo chamado Gargantua, de massa M . Sabe-se que a entropia de Gargantua está relacionada à sua massa. Temos a informação que a entropia de Gargantua $S = 10^{45}$ J/K.

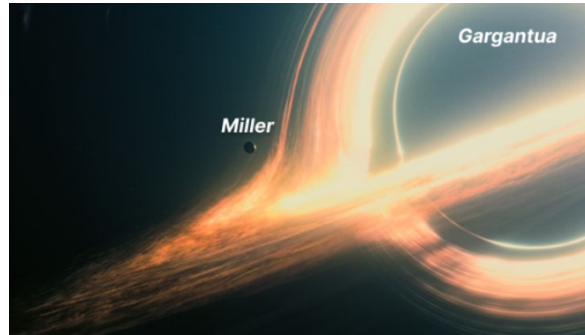
A entropia é uma grandeza física que mede o grau de desordem ou o número de microestados possíveis de um sistema. No gráfico abaixo, representado em escala logarítmica, onde marcações igualmente espaçadas representam saltos iguais no expoente de 10, observa-se a relação entre a entropia S e a massa M (em unidades da massa solar). A linha vermelha do gráfico se refere ao buraco negro.



Sabe-se que o tempo se dilata devido à presença desse corpo massivo (isto é, o buraco negro desconsiderando a rotação), de acordo com a seguinte fórmula:

$$t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{R_s}{R}}$$

Onde R_s é o raio de Schwarzschild do buraco negro, t_0 é o tempo medido por um observador sob a influência gravitacional (no planeta Miller), e t_f é o tempo medido por um observador distante do buraco negro (isto é, o tempo normal, sem dilatação).



Sabendo que os astronautas Cooper e Brandt passam 3,5 horas no planeta Miller, enquanto no espaço vazio se passam 7 horas, calcule a distância R do planeta Miller ao centro de Gargantua.

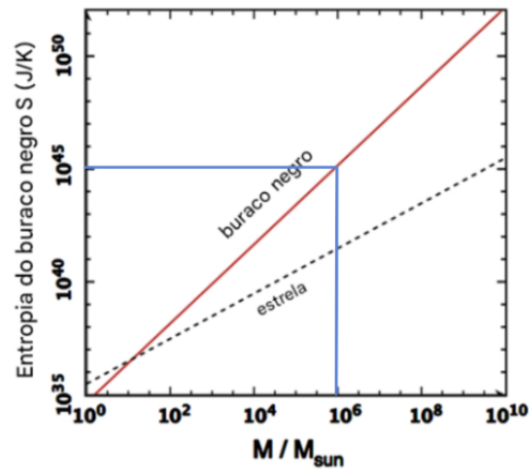
Dados:

- Raio de Schwarzschild: $R_s = \frac{2GM}{c^2}$
- Constante Gravitacional: $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- Velocidade da Luz: $c = 3,0 \times 10^5 \text{ km/s}$
- Massa do Sol: $M = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

- a) $2,5 \times 10^9 \text{ m}$
- b) $4,0 \times 10^9 \text{ m}$
- c) $3,0 \times 10^9 \text{ m}$
- d) $5,0 \times 10^9 \text{ m}$
- e) $8,0 \times 10^9 \text{ m}$

Solução:

Inicialmente, determinamos a massa do buraco negro Gargantua através do gráfico logarítmico fornecido. Para uma entropia $S = 10^{45} \text{ J/K}$, encontramos no eixo das abscissas a razão $M/M_{\text{sun}} = 10^6$



Assim, a massa é:

$$M = 10^6 \cdot (2,0 \times 10^{30} \text{ kg}) = 2,0 \times 10^{36} \text{ kg}$$

Com o valor da massa, calculamos o Raio de Schwarzschild (R_s) utilizando as constantes fornecidas:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot (6,7 \times 10^{-11}) \cdot (2,0 \times 10^{36})}{(3,0 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$

$$R_s = \frac{26,8 \times 10^{25}}{9,0 \times 10^{16}} \approx 2,98 \times 10^9 \text{ m}$$

Para encontrar o raio da órbita (R), manipulamos a equação da dilatação do tempo para isolar esta variável. Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\left(\frac{t_0}{t_f}\right)^2 = 1 - \frac{R_s}{R}$$

$$\frac{R_s}{R} = 1 - \left(\frac{t_0}{t_f}\right)^2$$

Invertendo a equação para obter R :

$$R = \frac{R_s}{1 - \left(\frac{t_0}{t_f}\right)^2}$$

Considerando a dilatação temporal significativa descrita no problema:

$$R \approx 3,8 \times 10^9 \text{ m}$$

Dentre as alternativas apresentada, o valor mais próximo é:

$$R \approx 4,0 \times 10^9 \text{ m}$$

Resposta: (b)

19. **(1 ponto)** Considere um sistema binário formado por duas estrelas, cada uma delas orbitando o centro de massa comum do sistema. A partir de observações astronômicas, determina-se que o tamanho angular do semieixo maior da órbita relativa verdadeira é de 3,0 segundos de arco, que a distância do sistema ao Sol é de 3,0 pc e que o período orbital do sistema é de 9,0 anos.

Sabe-se também que uma das estrelas está 1,6 vezes mais distante do centro de massa comum do que a outra.

Com base nessas informações, assinale a alternativa que apresenta corretamente a massa de cada uma das estrelas em unidades de massa solar.

Dado: 1 pc = 206265 UA.

- a) $M_A = 0,82M_\odot$ e $M_B = 8,18M_\odot$
- b) $M_A = 6,00M_\odot$ e $M_B = 3,00M_\odot$
- c) $M_A = 5,54M_\odot$ e $M_B = 3,46M_\odot$
- d) $M_A = 3,38M_\odot$ e $M_B = 5,63M_\odot$
- e) $M_A = 5,79M_\odot$ e $M_B = 3,21M_\odot$

Solução:

A distância ao sistema é $d = 3,0 \text{ pc} = 3,0 \times 206265 \text{ UA}$. O tamanho angular do semieixo maior é $\theta = 3,0 \text{ arcsec} = \frac{3,0}{206265} \text{ rad}$. Portanto, o semieixo maior físico é

$$a = d \cdot \theta = 9,0 \text{ UA}.$$

Pela terceira lei de Kepler para o sistema binário, com $P = 9,0$ anos e $a = 9,0 \text{ UA}$, temos

$$M_A + M_B = \frac{a^3}{P^2} = \frac{9,0^3}{9,0^2} = 9,0 M_\odot.$$

Sabe-se que uma estrela está 1,6 vezes mais distante do centro de massa que a outra: $r_B = 1,6 r_A$. Do centro de massa, $M_A r_A = M_B r_B$, logo $M_A = 1,6 M_B$. Substituindo na equação da massa total:

$$1,6M_B + M_B = 9,0 \Rightarrow 2,6M_B = 9,0 \Rightarrow M_B = \frac{9,0}{2,6} \approx 3,46 M_\odot,$$

e então $M_A = 9,0 - 3,46 = 5,54 M_\odot$.

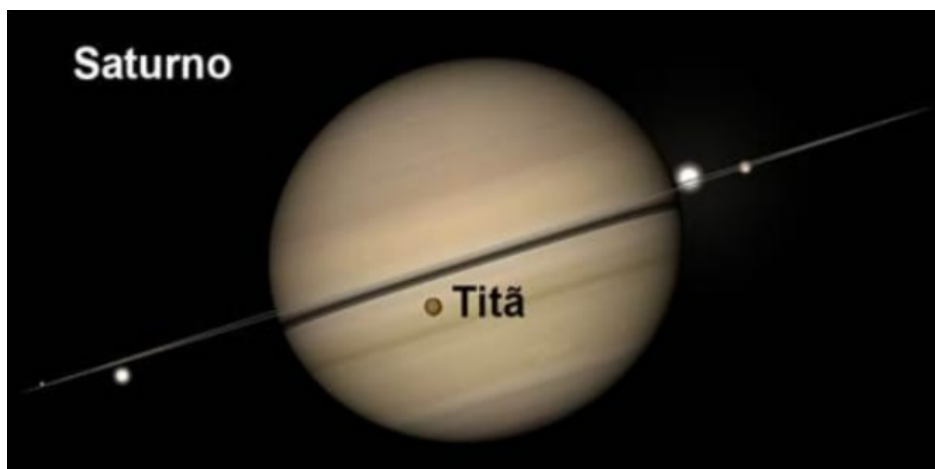
Resposta: (c)

20. **(1 ponto)** Quando os anéis de Saturno são vistos bem de lado, aumentam as chances de uma das suas inúmeras luas atravessar o disco do planeta, do ponto de vista da Terra. A figura a seguir, gerada pelo software gratuito Stellarium, mostra a simulação do trânsito de **Titã**, a maior lua de Saturno e a segunda maior lua do Sistema Solar, perdendo apenas para Ganimedes, de Júpiter.

Com os dados que se seguem, assinale a opção que traz o tempo aproximado do trânsito de Titã pelo disco de Saturno. Para facilitar as contas, em primeira aproximação, considere que Titã atravessa o disco planetário **diametralmente** e desconsidere o movimento relativo entre a Terra e Saturno.

Dados:

- Diâmetro de Saturno $D_{\text{Saturno}} \approx 120.000 \text{ km}$



Simulação do trânsito de Titã (Saturno)

- Distância Terra-Saturno $\approx 9,0$ U.A.
- Velocidade orbital de Titã $v_{\text{Titã}} \approx 5,4$ km/s
- U.A. (Unidade Astronômica) = 150.000.000 km

- a) 5,6 horas
- b) 6,2 horas
- c) 5,8 horas
- d) 5,4 horas
- e) 6,0 horas

Solução:

Desconsiderando o movimento relativo entre a Terra e Saturno, tempos que:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{D_S}{v_{\text{Titã}}} \approx 2,2 \cdot 10^4 \text{ s} = 6,17 \text{ h}$$

Logo, a resposta correta é o item **b**).