

Olimpíada Brasileira Online de Astronomia

2ª Fase - 18 e 19 de Outubro de 2025

Nome: _____

Série: _____

Nível Rubens de
Azevedo
Ensino Médio

Instruções de Prova

- I. Esta prova contém **8** questões. Cada questão vale 10 pontos, totalizando 80 pontos.
- II. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na próxima página.
- III. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
- IV. A prova tem duração de 3 horas. Todos os estudantes devem realizar a prova enquanto em uma das chamadas do Google Meet com a câmera ligada. Qualquer atividade suspeita poderá levar a eliminação do candidato.

Apoio:



Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($M_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Curiosidades:

Rubens de Azevedo (1921-2008) foi um proeminente astrônomo brasileiro, notório pela fundação da Sociedade Brasileira dos Amigos da Astronomia (SBAA) e do Observatório Popular Flamarion. Suas realizações incluem a criação do primeiro mapa lunar brasileiro e uma significativa contribuição para a popularização da astronomia no Brasil, influenciando a formação de inúmeras instituições astronômicas. Seu legado perdura com o Planetário Rubens de Azevedo em Fortaleza-CE e a homenagem do asteroide 84342, renomeado em seu centenário como "Asteroide Rubensdeazevedo".



Questão 1. Em um universo paralelo a força gravitacional tem forma

$$\vec{F}(r) = -kr^n \hat{r}$$

Onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade e r a distância entre os corpos. Para esse problema, vamos considerar dois corpos de massa m_1 e m_2 onde $m_1 \gg m_2$ e $m_1^2 \gg k$.

- a) **(2 pontos)** Considerando que os objetos orbitam em órbitas circulares ao redor do centro de massa, encontre a razão entre os raios a_1 e a_2 das órbitas dos corpos 1 e 2.
- b) **(3 pontos)** Qual seria o equivalente a Terceira Lei de Kepler (relação entre $a_1 + a_2$ e o período P do sistema) para esse universo? Deixe sua resposta em função de k , n e m_2
- c) **(5 pontos)** Qual é a Energia Mecânica total desse sistema? Deixe sua resposta em função de k , n e a_2

Dica: a energia potencial pode ser escrita como

$$U(r) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

E

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Solução:

- a) A soma entre a força gravitacional e a força centrípeta deve ser nula, portanto temos,

$$kr^n = m_1 \omega^2 a_1$$

Onde ω é a velocidade angular do sistema, r é a distância entre os corpos e a_1 é o raio da órbita do corpo 1.

Similarmente, para o corpo 2,

$$kr^n = m_2 \omega^2 a_2$$

Dividindo as expressões,

$$1 = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

- b) Agora, somando as expressões encontradas no item anterior,

$$2kr^n = \omega^2 (m_1 a_1 + m_2 a_2)$$

Porém, como vimos anteriormente, $m_1 a_1 = m_2 a_2$.

$$2kr^n = 2m_1 a_1 \omega^2$$

Resolvendo para ω ,

$$\omega^2 = \frac{kr^n}{m_1 a_1}$$

Mas a distância entre os corpos, pode ser escrita por $a_1 + a_2$ e como $m_1 \gg m_2$, $a_1 + a_2 \approx a_2$

$$\omega^2 = \frac{ka_2^n}{m_1 a_1} = \frac{ka_2^{n-1}}{m_2}$$

Por definição,

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

Substituindo,

$$\frac{4\pi^2}{P^2} = \frac{ka_2^{n-1}}{m_2}$$

$$\boxed{\frac{a_2^{1-n}}{P^2} = \frac{k}{4\pi^2 m_2}}$$

Note que para a gravitação clássica, ($n = -2$, $k = Gm_1 m_2$) a expressão se simplifica para a Terceira lei de Kepler em que estamos acostumados a ver.

c) A energia total do sistema é dada por,

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) \end{aligned}$$

Como os corpos estão em órbitas circulares, podemos escrever as velocidades como $v_i = a_i \omega$

$$E = \frac{\omega^2}{2} (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) + U(r)$$

Usando que $m_1 a_1 = m_2 a_2$ e que $a_2 \gg a_1$ é válido que $m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 \approx m_2 a_2^2$. Agora, vamos calcular o termo associado à energia potencial,

$$U(r) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int kr^n dr = \frac{kr^{n+1}}{n+1}$$

Onde $r \approx a_2$ Assim, a expressão da energia se torna,

$$E = \frac{\omega^2}{2} m_2 a_2^2 + \frac{ka_2^{n+1}}{n+1}$$

Substituindo ω ,

$$E = \frac{m_2 a_2^2}{2} \left(\frac{ka_2^{n-1}}{m_2} \right) + \frac{ka_2^{n+1}}{n+1}$$

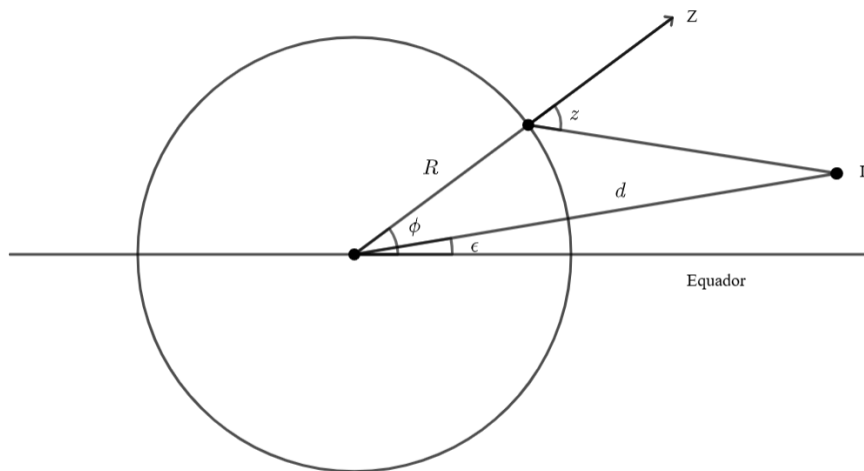
$$\boxed{E = \left(\frac{n+3}{2n+2} \right) ka_2^{n+1}}$$

Grade de Pontuação:

- a) + 1,0 Igualar força centrífuga à força gravitacional.
- a) + 0,5 Usar a aproximação $r = a_1 + a_2 \approx a_2$.
- a) + 0,5 Expressão final correta.
- b) + 2,0 Expressão para ω .
- b) + 1,0 Expressão correta em termos das variáveis requisitadas.
- c) + 1,0 Fórmula $E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + U(r)$.
- c) + 0,5 Simplificar $(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)/2 \approx m_2 a_2 \omega^2/2$.
- c) + 1,5 Energia Potencial correta.
- c) + 2,0 Energia Mecânica total correta, em função das variáveis requisitadas.

Questão 2. Dois astrônomos, um localizado em Alexandria (latitude $\phi = 31,2^\circ$ N) e outro em Nicósia (latitude $\phi = 35,2^\circ$ N), observam a Lua no mesmo instante. Ambos estão sobre o mesmo meridiano. Assim que a Lua atinge seu ponto mais alto no céu, o astrônomo em Alexandria mede que a Lua está a uma distância zenital de $25,8^\circ$, enquanto o de Rodas registra uma distância zenital de $29,9^\circ$. Estime qual a declinação da Lua no momento da observação e a razão entre a distância da Lua e o raio da Terra. Se necessário use que $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ para $\theta \ll 1$.

Solução: Observe a geometria do problema.



Pela geometria do problema, obtemos que:

$$\frac{R}{d} = \frac{\sin(z + \epsilon - \phi)}{\sin z}$$

Essa expressão permanece válida para os dois observadores, tomando o observador em Alexandria como padrão, podemos aplicar as aproximações dadas para $z' = z + \Delta z$ e $\phi' = \phi + \Delta \phi$ onde $\Delta z, \Delta \phi \ll 1$. Sendo assim:

$$\frac{\sin(z + \epsilon - \phi + \Delta z - \Delta \phi)}{\sin(z + \Delta z)} = \frac{\sin(z + \epsilon - \phi)}{\sin z} \Rightarrow$$

$$\sin z (\sin(z + \epsilon - \phi) \cos(\Delta z - \Delta \phi) + \cos(z + \epsilon - \phi) \sin(\Delta z - \Delta \phi)) = \sin(z + \epsilon - \phi) (\sin z \cos \Delta z + \cos z \sin \Delta z) \Rightarrow$$

$$\sin z (\sin(z + \epsilon - \phi) + \cos(z + \epsilon - \phi) (\Delta z - \Delta \phi)) = \sin(z + \epsilon - \phi) (\sin z + \Delta z \cos z) \Rightarrow$$

$$\sin z \cos(z + \epsilon - \phi)(\Delta z - \Delta \phi) = \sin(z + \epsilon - \phi) \Delta z \cos z \Rightarrow$$

$$\tan z \left(1 - \frac{\Delta \phi}{\Delta z} \right) = \tan(z + \epsilon - \phi).$$

A partir disso podemos calcular $\epsilon \approx 6,1^\circ$. Voltando para a primeira expressão, concluímos que $\frac{d}{D} \approx 37$.

Grade de Correção:

+2,0 Deduzir corretamente a relação geométrica inicial:

$$\frac{R}{d} = \frac{\sin(z + \epsilon - \phi)}{\sin z}$$

+4,0 Aplicar as aproximações para Δz e $\Delta \phi$ pequenos e desenvolver a expressão até chegar em:

$$\tan z \left(1 - \frac{\Delta \phi}{\Delta z} \right) = \tan(z + \epsilon - \phi)$$

+2,0 Calcular o valor da declinação da Lua: $\epsilon \approx 6,1^\circ$. +2,0 Utilizar a expressão inicial ou outra relação para estimar a razão d/R corretamente.

Questão 3. Um dos principais métodos que medimos, com precisão, o brilho de uma estrela é contando o número de fótons que recebemos dela. Atualmente, os dispositivos responsáveis por essa tarefa, são chamados CCDs. Nessa questão, vamos fazer um modelo simples para estudar os CCDs acoplados ao telescópio Perkin-Elmer, que é o maior telescópio em solo brasileiro, possuindo 1,6 m de diâmetro e localizado no Pico dos dias.

- a) (0,5 pontos) Sabendo que o Perkin-Elmer é um telescópio $f/10$ e está acoplado a um CCD de 2048x2048, formados por pixels de $10 \mu\text{m}$ de lado, calcule a escala de placa do CCD (isto é, quando " de arco são compreendidos por um pixel).
- b) (0,5 pontos) Qual a Magnitude limite do Perkin-Elmer?
- c) (1 ponto) Agora que já sabemos esses dois fatores, podemos começar a modelar a contagem de fótons do CCD. Durante uma noite de observações, Paulinago deseja observar o sistema binário HD 131218, mas antes disso, decide obter dados importantes sobre ele. Após checar o almanaque astronômico de seu superior, Klafk Júlio, Paulinago descobriu que o sistema possui magnitude aparente $m = 8,74 \text{ mag}$ e magnitude absoluta no visível $V = 4,04 \text{ mag}$. Calcule a distância de nós até o sistema.
- d) (2 pontos) Em um cenário ideal, em que o CCD captasse todos os fótons vindo do sistema e não captasse nenhum fóton vindo de ruídos externos, qual seria a contagem η de fótons por segundo?
- e) (5 pontos) Considerando que na noite da observação, o céu de fundo possuía um brilho superficial de $\mu = 20,77 \text{ mag/"}^2$, que a eficiência dos CCDs é de 80% e que cada pixel possui um ruído aleatório que obedece a fórmula $\sigma_a = 10t^2 e^{-0,01t}$ contagens/s/pixel encontre a razão sinal ruído dessa observação após 10 minutos.
- f) (1 ponto) O modelo apresentado é um bom modelo? Por que?

Solução

a) A escala de placa é dada por,

$$p = \frac{l}{f} = \frac{l}{10D}$$

Numericamente, obtemos, $p = 6,25 \cdot 10^{-7} \text{ rad/pixel} = 0,13''/\text{pixel}$

- b) A magnitude limite de um telescópio é dada por

$$m_L = 2,1 + 5 \log D[\text{mm}]$$

$$m_L = 2,1 + 5 \log 1600$$

$$m_L = 18,1 \text{ mag}$$

- c) O módulo da distância é definido por,

$$m - V = 5 \log d[\text{pc}] - 5$$

Isolando d ,

$$d = 10^{0,2(m-V+5)} \approx 87,1 \text{ pc}$$

- d) Para saber a quantidade de fótons por segundo, precisamos encontrar o fluxo vindo de HD 131218. Comparando com a magnitude do Sol e usando a fórmula de Pogson,

$$m - M_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{4\pi(10 \text{ pc})^2}{L_{\odot}} F \right)$$

Resolvendo para F ,

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi(10 \text{ pc})^2} \cdot 10^{-0,4(m-M_{\odot})}$$

$$F \approx 8,7 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

A definição de fluxo é dado por

$$F = \frac{\Delta E}{A \Delta t}$$

ΔE é a energia total, que pode ser calculada somando a energia de cada fóton. Ou seja, $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Delta n$. Substituindo na fórmula do fluxo,

$$F = \frac{hc}{A\lambda} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{hc}{A\lambda} \eta$$

Resolvendo para η ,

$$\eta = \frac{A\lambda F}{hc} = \frac{\pi D^2 \lambda}{4hc} F$$

Resultando em um valor numérico de

$$\eta = 4,8 \cdot 10^7 \text{ fótons/s}$$

- e) Para calcularmos o brilho do céu que vem para o telescópio, vamos nos lembrar que o ângulo sólido captado pelo telescópio tem forma $\Omega = \frac{A}{f^2} = \frac{\pi D^2}{4f^2} = \frac{\pi}{400} \text{ sr}$. A magnitude desse "pedaço de céu" pode ser calculada por Pogson,

$$m_{ceu} - \mu = -2,5 \log \frac{\Omega}{1''^2}$$

Assim,

$$m_{ceu} = \mu - 2,5 \log(\Omega \cdot 206265^2) = -0,54$$

Agora, vamos seguir o mesmo processo do item anterior,

$$F_{ceu} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(10 \text{ pc})^2} \cdot 10^{-0,4(m_{ceu}-M_{\odot})}$$

$$F_{ceu} \approx 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

Seguindo,

$$\eta_{ceu} = \frac{\pi D^2 \lambda}{4hc} F_{ceu} \approx 2,5 \cdot 10^{11} \text{ fótons/s}$$

Para achar a razão sinal ruído, temos que considerar os ruídos aleatórios, dados, nessa questão, por $\sigma_a = 10t^2 e^{-0,01t}$ contagens/s/pixel como a nossa grade é composta por um quadrado de lado 2048 pixels, temos,

$$\sigma_a = 10t^2 e^{-0,01t} \cdot 2048^2 \text{ contagens/s}$$

Ao final de 10 minutos,

$$\sigma_a = 10t^3 e^{-0,01t} \cdot 2048^2 \text{ contagens}$$

A razão Sinal-Ruído é dada justamente pela razão entre o número total de fótons captados e a quantidade proveniente dos ruídos. Lembrando que o CCD possui uma eficiência de 80

$$SN = \frac{0,8(\eta + \eta_{ceu})t + \sigma_a}{\sqrt{(0,8\eta_{ceu}t)^2 + \sigma_a^2}} \approx 6,3$$

- f) O modelo apresentado é um péssimo modelo, visto que a razão sinal ruído ficou extremamente baixa. Telescópios como o Perkin-Elmer deveriam ter razões sinal ruídos na ordem de 10^2 .

Grade de Correção:

- a) + 0,5 Valor numérico correto (desconto de 50% caso esteja em outra unidade diferente da solicitada)
- b) + 0,5 Valor numérico correto
- c) + 0,5 Fórmula para a distância
- c) + 0,5 Valor numérico correto
- d) + 0,3 Expressão para o Fluxo
- d) + 0,2 Valor numérico do Fluxo
- d) + 1,5 Expressão para η
- d) + 0,5 Valor numérico de η
- e) + 0,5 Cálculo correto de Ω
- e) + 1,5 Cálculo correto de m_{ceu}
- e) + 0,2 Valor numérico de η_{ceu}
- e) + 0,3 Expressão correta para σ_a após 10 minutos
- e) + 2,3 Expressão correta para a razão Sinal-Ruído
- e) + 0,2 Valor correto para a razão Sinal- Ruído
- f) + 1,0 Explicação correta

Questão 4. Nas encostas do vulcão Acatenango, na Guatemala, durante à OLAA 32. Um grupo internacional de jovens astrônomos prepara uma estação de observação em altitude. O local oferece noites muito escuras e condições estáveis para observações de alta resolução.

Foram instalados três telescópios refletivos:

- Telescópio A: 0.28m de diâmetro
 - Telescópio B: 0.52m de diâmetro
 - Telescópio Quetzal-1: 2.50m de diâmetro
- a) **(3 pontos)** Se os astrônomos apontarem o Quetzal-1 para uma estrela pontual muito distante, como a imagem se compararia com a obtida pelo telescópio A? Qual propriedade do telescópio determina essa diferença de nitidez? Estime o poder de resolução angular do Quetzal-1 em segundos de arco, considerando $\lambda = 550 \text{ nm}$.
- b) **(2 pontos)** Comparando o telescópio A com o Quetzal-1, quantas vezes a separação angular mínima que o Quetzal-1 consegue distinguir é menor que a do telescópio A? O que isso significa na prática para a observação de sistemas estelares próximos?
- c) **(3 pontos)** Durante a observação, os jovens astrônomos percebem que alguns telescópios conseguem detectar estrelas que não seriam visíveis a olho nu. Considerando que a quantidade de luz coletada aumenta com o tamanho do espelho, explique como o diâmetro do telescópio influencia a capacidade de enxergar estrelas mais fracas. Em seguida, estime numericamente qual seria a magnitude limite para os telescópios A, B e Quetzal-1.
- d) **(2 pontos)** Se um filtro especial reduzir o fluxo recebido pelo Quetzal-1 a 40% do original, como a magnitude limite do telescópio seria afetada? Indique numericamente a nova m_{lim} .

Solução a) Poder de resolução do Quetzal-1:

Fórmula:

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Para Quetzal-1 ($D = 2,50 \text{ m}$):

$$\theta_Q = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9}}{2,50} = 2,684 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$\theta_Q \text{ (arcsec)} = 2,684 \times 10^{-7} \times 206264,8 \approx 0,055''.$$

A imagem pelo Quetzal-1 será muito mais nítida que pelo telescópio A. A diferença de nitidez é determinada pelo diâmetro do espelho: quanto maior, menor o limite angular e maior a capacidade de separar detalhes.

(b) Comparação de resolução

Para A ($D_A = 0,28 \text{ m}$):

$$\theta_A = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9}}{0,28} = 2,3964 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 0,49''.$$

Razão:

$$\frac{\theta_A}{\theta_Q} \approx \frac{0,49}{0,055} \approx 8,9.$$

O Quetzal-1 consegue distinguir detalhes 9 vezes menores que A, permitindo observar sistemas estelares muito próximos com clareza.

(c) Dedução e aplicação: magnitude limite

Partindo de $\Delta m = -2,5 \log_{10}(F/F_0)$ e $F \propto D^2$ (para tempos iguais),

$$m_{\text{lim}} - m_0 = -2,5 \log_{10}\left(\frac{D^2}{D_0^2}\right) = -5 \log_{10}\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Isolando m_{lim} e reorganizando:

$$m_{\text{lim}} = m_0 + 5 \log_{10}\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Aplicando (com $m_0 = 6,0$ e $D_0 = 0,006$ m):

Para o telescópio A:

$$m_{\text{lim}_A} = 6 + 5 \log_{10}\left(\frac{0,28}{0,006}\right)$$

$$m_A \approx 14,35$$

Para o telescópio B:

$$m_{\text{lim}_B} = 6 + 5 \log_{10}\left(\frac{0,52}{0,006}\right)$$

$$m_B \approx 15,69$$

Para o telescópio Quetzal-1:

$$m_{\text{lim}_Q} = 6 + 5 \log_{10}\left(\frac{2,5}{0,006}\right)$$

$$m_Q \approx 19,10$$

(d) Efeito do filtro

Variação de magnitude:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \frac{F}{F_0}$$

$$\Delta m = -2,5 \log_{10}(0,4) \approx 0,99$$

Nova magnitude limite do Quetzal-1:

$$m'_Q \approx 19,10 - 0,99 \approx 18,11$$

O filtro reduz a magnitude limite, tornando estrelas muito fracas mais difíceis de observar, mas Quetzal-1 ainda observa muito além dos telescópios A e B.

Grade de Correção:

- a) +1,0 Explicar que a imagem pelo Quetzal-1 será mais nítida que pelo telescópio A.
- a) +1,0 Relacionar a diferença de nitidez ao diâmetro do espelho e à difração (Critério de Rayleigh).
- a) +1,0 Calcular corretamente o poder de resolução angular do Quetzal-1 em segundos de arco.
- b) +1,0 Calcular corretamente quantas vezes a separação mínima de Quetzal-1 é menor que a do telescópio A.
- b) +1,0 Interpretar o significado desta diferença para observações de sistemas estelares próximos.
- c) +1,5 Deduz corretamente a relação $m_{\text{lim}} = m_0 + 5 \log_{10}(D/D_0)$.
- c) +1,5 Aplicar corretamente a fórmula e estima m_{lim} para os telescópios A, B e Quetzal-1.
- d) +1,0 Calcular corretamente a variação de magnitude: $\Delta m = -2,5 \log_{10}(F/F_0)$.
- d) +1,0 Interpreta o efeito do filtro sobre a observação de estrelas fracas e compara com os outros telescópios.

Questão 5. A equipe IOAA 2025, passou pelo grande desafio de confeccionar um poster informativo sobre marcações de tempo. Entretidos com relógios de Sol, os cinco alunos resolveram criar um e comparar o tempo com seu relógio de pulso. Considerando que o entusiasta está no centro do fuso indiano, e sua latitude é a de Mumbai ($\phi = 19^\circ N$), ajude-o a associar a diferença entre os relógios de Sol e seu conhecimento astronômico.

- a) **(3 pontos)** Determine a diferença entre o tempo demarcado pelo relógio de Sol e o relógio de pulso. Considere que se passaram n dias desde o equinócio de áries e que a translação da Terra pode ser considerada como aproximadamente um MCU. Denote a excentricidade da eclíptica como ϵ .
- b) **(2,5 pontos)** Faça uma tabela simples com os resultados numéricos dos erros Δt associados a diferentes n 's na latitude do observador.
- c) **(2,5 pontos)** Faça um gráfico simples apenas com alguns pontos (no mínimo 8) relevantes do erro obtido anteriormente no decorrer de um ano. Onde os eixos das ordenadas deve ser o erro em minutos e o das abscissas os dias do ano a partir do equinócio de áries.
- d) **(2 pontos)** A expressão que você encontrou nos dois itens anteriores tem uma grande importância na astronomia de tempo. Este "erro" apresenta uma famosa denominação, como é o nome usual desse erro associado a diferença dentre esses dois tempos?

Solução

- a) O tempo demarcado pelo relógio de pulso corresponde ao tempo do Sol Médio, ou seja, sem considerar a obliquidade da órbita ou a inclinação da eclíptica. Já o tempo demarcado pelo relógio de Sol, corresponde ao tempo do Sol verdadeiro, considerando os efeitos acima. A diferença entre esses dois tempos, pode ser denotada pela diferença entre as ascensões retas.

$$\Delta t = H_{\odot V} - H_{\odot M} = \alpha_{\odot M} - \alpha_{\odot V}$$

Considerando que o Sol médio possui uma velocidade angular constante, uma órbita coplanar ao Equador (sem inclinação) e que no momento do equinócio de Áries, a ascensão reta do Sol é zero, podemos escrever:

$$\alpha_{\odot m} = \omega_{\odot} n$$

Em relação ao Sol verdadeiro, precisaremos usar trigonometria esférica. Podemos denotar o triângulo de posição da intersecção dos seguintes círculos máximos: meridiano do astro, eclíptica e equador.

Com polos no Sol, no ponto de áries e na interseção do meridiano do astro com o Equador.

Utilizando a lei dos quatro elementos, podemos deduzir:

$$\cot l \sin \alpha = \cot 90^\circ \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \tan l \cos \varepsilon$$

$$l = \omega_\odot n$$

$$\alpha_{\odot V} = \tan^{-1} (\tan \omega_\odot n \cos \varepsilon)$$

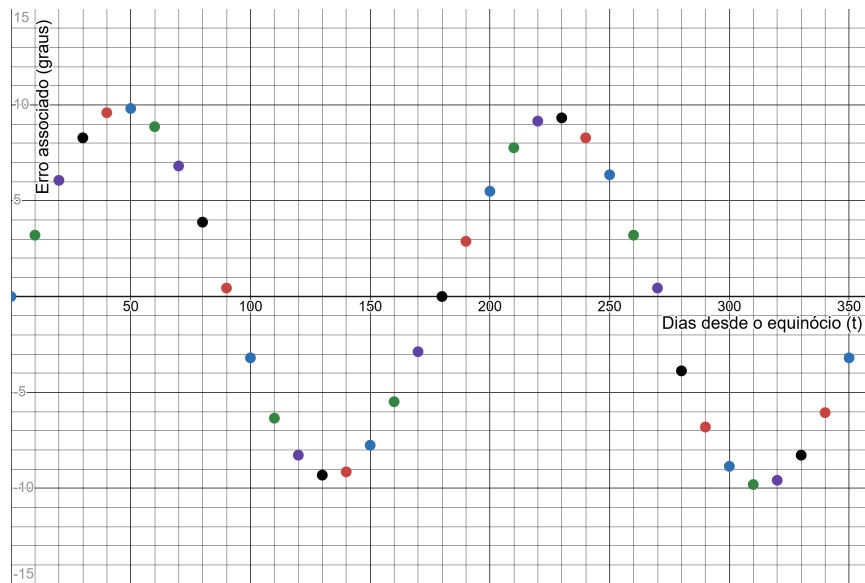
Assim, juntando as duas equações, podemos escrever:

$$\Delta t = \omega_\odot n - \tan^{-1} (\tan \omega_\odot n \cos \varepsilon)$$

b) Tabela de Δt em intervalos de 10 dias:

Dia do ano n	Δt (min)
0	0.00
10	3.20
20	6.06
30	8.28
40	9.59
50	9.81
60	8.86
70	6.81
80	3.88
90	0.44
100	-3.20
110	-6.35
120	-8.28
130	-9.32
140	-9.15
150	-7.76
160	-5.49
170	-2.88
180	0.00
190	2.88
200	5.49
210	7.76
220	9.15
230	9.32
240	8.28
250	6.35
260	3.20
270	0.44
280	-3.88
290	-6.81
300	-8.86
310	-9.81
320	-9.59
330	-8.28
340	-6.06
350	-3.20
360	0.00

c) Exemplo de gráfico com pontos viáveis:



- d) A diferença entre o Sol verdadeiro e o Sol médio é conhecida como **Equação do Tempo**. Este "erro" é usado para corrigir leituras de relógios de Sol, elaborar efemérides astronômicas e entender o movimento aparente do Sol ao longo do ano.

Grade de Correção:

- a) +1,5 reconhecer e determinar corretamente o triângulo esférico.
- a) +1,5 Expressão final correta.
- b) +2,0 Valores no gráfico (mínimo de cinco valores, para pontuar. 0,20 pontos por dado.).
- b) +0,5 Títulos e unidades.
- c) +1,0 Construção do gráfico (0,1 pontos por ponto).
- c) +0,5 Títulos, escala e unidades.
- c) +1,0 Formato correto do gráfico.
- d) +2,0 Resposta final correta

Questão 6. Observações em comprimento de onda de rádio da nuvem de gás que orbita um buraco negro no centro da nossa galáxia revelam radiação da transição spin-flip do hidrogênio (cuja frequência de repouso é 1420,41 MHz), detectando uma frequência de 1421,23 MHz. As medições nos dizem que essa nuvem de gás está localizada a uma distância de 0,2 pc do buraco negro e orbita em um círculo:

- a) (2 pontos) Determine a velocidade da nuvem.
- b) (1 ponto) Ela está se aproximando ou se afastando de nós?
- c) (4 pontos) Calcule a massa do buraco negro.
- d) (3 pontos) Calcule o raio do buraco negro

Solução:

- a) Utilizando o efeito doppler:

$$v = c \frac{f_0 - f}{f} = -173 \text{ km/s}$$

- b) Como a frequência está aumentando, o comprimento de onda diminui, fenômeno conhecido como blueshift, quando os objetos estão se aproximando de nós

c) Como temos uma órbita circular, podemos usar a equação vis-viva:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow M = \frac{rv^2}{G} = 2,77 \times 10^{36}$$

d) Utilizando a fórmula do raio de Schwarzschild

$$R_{sch} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2}} = 64km$$

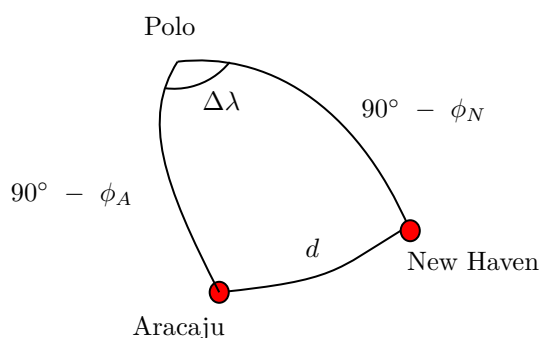
Grade de Correção:

- a) +1,0 Expressão para o Redshift.
- a) +1,0 Valor numérico correto.
- b) +1,0 Explicar o fenômeno por blueshift ou argumento análogo ao efeito doppler. **Atenção:** Argumentos pelo sinal da fórmula do efeito doppler não serão aceitos.
- c) +3,0 Expressão para a massa.
- c) +1,0 Valor numérico correto.
- d) +2,0 Expressão para o Raio de Schwarzschild
- d) +1,0 Valor numérico correto.

Questão 7. (10 ponto) Maui é um personagem do filme *Moana* que deseja viajar da cidade de Aracaju ($\phi_S = 10.9095^\circ\text{S}$, $\lambda_S = 37.0748^\circ\text{O}$) até a cidade de New Haven ($\phi_A = 41.3083^\circ\text{N}$, $\lambda_A = 72.9279^\circ\text{O}$). Diferentemente dos carros, cuja velocidade é medida em km/h, Maui é extremamente rápido e viaja a $^\circ/\text{s}$, sendo $^\circ$ a quantidade de graus na superfície terrestre que ele deve percorrer.

Sabendo que a distância angular entre dois pontos na superfície da Terra pode ser determinada a partir de suas coordenadas geográficas, determine a velocidade que Maui deve manter para chegar ao seu destino em apenas 3 horas.

Solução: Desenhando a situação com trigonometria esférica:



Aplicando a fórmula da lei dos cossenos:

$$\cos d = \cos(90^\circ - \phi_S) \cos(90^\circ - \phi_A) + \sin(90^\circ - \phi_S) \sin(90^\circ - \phi_A) \cos(\lambda_A - \lambda_S)$$

$$\cos d = \sin \phi_S \sin \phi_A + \cos \phi_S \cos \phi_A \cos(\lambda_A - \lambda_S)$$

Substituindo os valores do enunciado:

$$d \approx 61.77^\circ$$

O tempo desejado é $t = 3 \text{ h} = 3 \cdot 3600 = 10800 \text{ s}$.

A velocidade angular requerida é

$$\omega = \frac{d}{t} = \frac{61.7770693^\circ}{10800 \text{ s}} \rightarrow \boxed{\omega \approx 5.72 \cdot 10^{-3} \frac{^\circ}{\text{s}}}$$

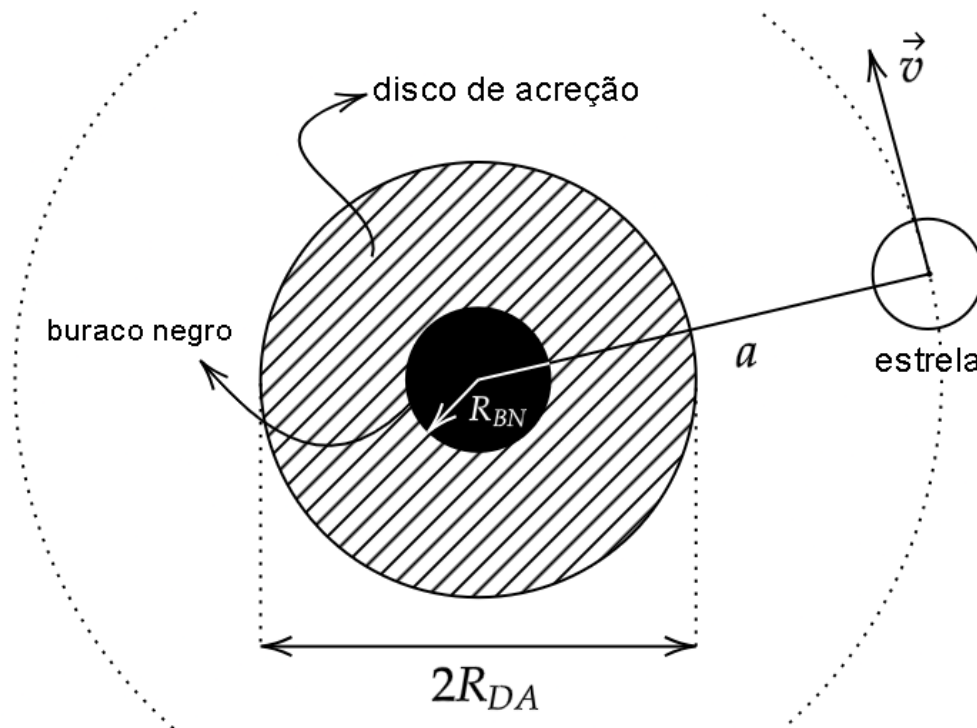
Grade de Correção:

- +3,0 Desenhar a situação com trigonometria esférica
- +4,0 Aplicar corretamente a lei dos cossenos
- +1,0 Encontrar o valor numérico correto de d
- +1,0 Escrever $\omega = \frac{d}{t}$
- +1,0 Valor numérico de ω correto

Questão 8. A acreção de massa em objetos compactos — como anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros — constitui um dos mecanismos mais eficientes de conversão de energia gravitacional em radiação. Quando matéria é capturada pela intensa gravidade desses corpos, ela não cai de forma radial diretamente sobre a superfície (ou horizonte de eventos, no caso de buracos negros). Em vez disso, devido à conservação do momento angular, o material forma um disco de acreção em torno do objeto central.

Nesse disco, a matéria orbita em trajetórias quase keplerianas, perdendo energia e momento angular por meio de diferentes processos físicos. À medida que o gás espirala para órbitas internas, parte significativa da energia potencial gravitacional é dissipada em forma de calor. Esse aquecimento eleva a temperatura do disco a níveis extremos, produzindo radiação que pode variar do ultravioleta ao raio-X, dependendo da massa do objeto compacto e da taxa de acreção.

Nesta questão, estudaremos um modelo simplificado para a acreção de matéria, e trabalharemos com base em uma sistema binário hipotético formado por um buraco negro de massa $M_{BN} = 2,6 \cdot 10^3 M_\odot$ e por uma estrela de massa $M_\star = 1,4 M_\odot$ que o orbita em uma trajetória circular de raio a . Ademais, é importante mencionar que a estrela possui fortes ventos estelares, de modo a perder uma massa $\Delta M_\star$ a cada ano.



Parte I: Perda de Massa por Vento Estelar (4 pontos)

Durante o período de um ano, pode-se observar que raio orbital da estrela aumentou em $\Delta a = 2 \cdot 10^{-4}$ UA. Isso é consequência da conservação de momento angular, em que, para "remediar" o efeito da perda de massa por parte da estrela, o semi-eixo maior deve aumentar, de modo a manter a quantidade de movimento angular constante.

- a) **(3 pontos)** Demonstre que o produto entre o quadrado da massa da estrela (M_*) e o raio de sua órbita (a) é uma constante:

$$M_*^2 \cdot a = \text{constante}$$

Lembre-se que $M_{BN} \gg M_*$ e considere que, por simplificação, a massa do buraco negro seja constante.

- b) **(1 pontos)** Com base no resultado do item acima, calcule a perda anual de massa da estrela (em $M_\odot/\text{ano}$).

Parte II: Modelando a Acreção de Massa (6 pontos)

Agora, partiremos para o objetivo da questão. Em consonância com o que foi dito anteriormente, a energia perdida por parte da massa acretada pelo buraco negro é dissipada em forma de energia luminosa, dando origem à luminosidade do disco de acreção.

- c) **(2 pontos)** Considere uma massa m em uma órbita circular de raio r em torno do buraco negro. Demonstre que, para uma diminuição Δr no raio da órbita, haverá uma variação ΔE na energia mecânica da massa conforme a expressão:

$$\Delta E = \frac{GM_{BN}m}{2r^2} \Delta r$$

Dica: Utilize que, para $\Delta x \ll x$, é válida a aproximação:

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n \left(1 + \frac{n\Delta x}{x} \right)$$

Dividindo a equação acima por um intervalo de tempo Δt , teremos a energia dissipada por unidade de tempo, a qual estará em função de $\frac{\Delta M_\star}{\Delta t}$. Integrando essa equação, isto é, somando as contribuições de todas as partes do disco de acreção para a luminosidade do mesmo, obtemos a seguinte expressão:

$$L_{DA} = \frac{GM_{BN}}{2} \left(\frac{1}{R_{BN}} - \frac{1}{R_{DA}} \right) \frac{\Delta M_\star}{\Delta t}$$

Para o sistema estudado, foi constatado que a luminosidade do disco de acreção vale $L = 6,8 \cdot 10^{35} \text{ W}$

- d) (3 pontos)** Com base na equação supracitada, calcule o raio do disco de acreção (em km).
- e) (1 ponto)** Analisando o espectro de emissão do disco de acreção, observa-se um pico em $\lambda_{\text{pico}} = 0,68 \text{ nm}$. Com base nisso, calcule a temperatura do disco (em K).

Solução:

- a)** Considerando uma órbita circular kepleriana, e sabendo que $M_{BN} \gg M_\star$, podemos escrever o momento angular da estrela da seguinte forma:

$$L_\star = M_\star a v \implies L_\star = M_\star a \sqrt{\frac{GM_{BN}}{a}}$$

$$L_\star = M_\star \sqrt{GM_{BN} a}$$

Manipulando a expressão:

$$L_\star^2 = M_\star^2 GM_{BN} a$$

$$\implies M_\star^2 \cdot a = \frac{L_\star^2}{GM_{BN}}$$

Como o momento angular é constante, podemos concluir que:

$$\boxed{M_\star^2 \cdot a = \text{constante}}$$

- b)** Como o item produto mencionado no item (a) é constante, podemos escrever que:

$$M_\star^2 \cdot a = (M_\star - \Delta M_\star)^2 (a + \Delta a)$$

Isolando $\Delta M_\star$:

$$\Delta M_\star = M_\star \left(1 - \sqrt{\frac{a}{a + \Delta a}} \right)$$

$$\Delta M_\star \approx 5,6 \cdot 10^{-4} M_\odot \text{ (massa perdida em 1 ano)}$$

$$\boxed{\frac{\Delta M_\star}{\Delta t} \approx 5,6 \cdot 10^{-4} M_\odot / \text{ano}}$$

- c)** Para uma órbita circular, temos que a energia mecânica em função do raio orbital é dada por:

$$E = -\frac{GM_{BN}m}{2r}$$

Imaginando que haja uma pequena variação ΔE na energia, haverá também uma variação Δr no raio orbital:

$$E + \Delta E = -\frac{GM_{BN}m}{2(r + \Delta r)}$$

Utilizando a aproximação fornecida:

$$E + \Delta E = -\frac{GM_{BN}m}{2(r + \Delta r)} = -\frac{GM_{BN}m}{2}(r + \Delta r)^{-1} \approx -\frac{GM_{BN}m}{2r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$$

Desenvolvendo a expressão:

$$\cancel{E} + \Delta E \approx -\cancel{\frac{GM_{BN}m}{2r}} + \frac{GM_{BN}m}{2r^2} \Delta r$$

$$\Delta E \approx \frac{GM_{BN}m}{2r^2} \Delta r$$

d) Calculando o raio do buraco negro:

$$R_{BN} = \frac{2GM_{BN}}{c^2}$$

$$R_{BN} \approx 7,7 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Isolando R_{DA} na expressão da luminosidade:

$$R_{DA} = \left(\frac{1}{R_{BN}} - \frac{2L_{DA}}{GM_{BN}} \frac{\Delta t}{\Delta M_{\star}} \right)^{-1}$$

Calculando:

$$R_{DA} \approx 5,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

e) Aplicando a Lei de Wien:

$$T_{DA} = \frac{b}{\lambda_{\text{pico}}}$$

$$T_{DA} \approx 4,3 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Grade de Correção:

- a) +1,0 Expressão para o momento angular da estrela.
- a) +1,0 Expressão para a velocidade orbital da estrela em função do raio de sua órbita.
- a) +1,0 Indicar que o momento angular da estrela se conserva.
- b) +0,5 Expressão para $\Delta M_{\star}$ em função de Δa .
- b) +0,5 Valor numérico correto.
- c) +1,0 Expressão para a energia mecânica de uma órbita circular kepleriana.
- c) +1,0 Utilizar corretamente a aproximação binomial indicada para encontrar a expressão requisitada.
- d) +1,0 Utilizar a expressão do raio de Schwarzschild para cálculo de R_{BN} .
- d) +1,0 Isolar R_{DA} na expressão fornecida.
- d) +1,0 Valor numérico final correto: $R_{DA} \approx 5,2 \cdot 10^4 \text{ km}$.
- e) +0,5 Usar Lei de Wien para cálculo da temperatura.
- e) +0,5 Valor numérico final correto: $T_{DA} \approx 4,3 \cdot 10^6 \text{ K}$.