

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Movimento Harmônico Simples

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia

Revisão

Felipe Maia

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projeto noic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 3

Movimento Harmônico Simples

pr 1. Encontre uma expressão para a amplitude A e a fase ϕ de um MHS em função da posição inicial x_0 do objeto, de sua velocidade inicial v_0 , e da frequência ω de oscilação.

Solução: A solução geral de um MHS tem forma,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Assim, $v(t) = dx(t)/dt = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

Substituindo as condições iniciais,

$$x_0 = A \cos \phi$$

$$v_0 = -\omega A \sin \phi$$

Dividindo ambas as expressões,

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan \phi \rightarrow \phi = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{\omega x_0} \right)$$

Utilizando,

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \phi} - 1}$$

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \phi}}$$

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_0^2}{\omega^2 x_0^2}}}$$

Assim, substituindo na primeira expressão,

$$x_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + (v_0/\omega x_0)^2}}$$

Isolando,

$$A = x_0 \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\omega^2 x_0^2}}$$

pr 2. Considere um planeta em forma de um disco fluido de espessura pequena e densidade de massa ρ , como na figura a seguir. Uma massa m é posta dentro do planeta e oscila sem nenhuma resistência por parte do fluido. Encontre o período de oscilação.

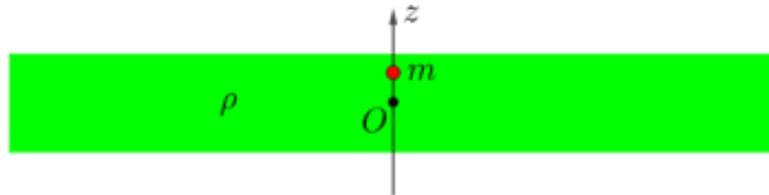


Figura 3.1: Caption

Solução: Utilizando a Lei de Gauss,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{int}$$

Aqui, a superfície que integraremos serão as "pillboxes" de Gauss,

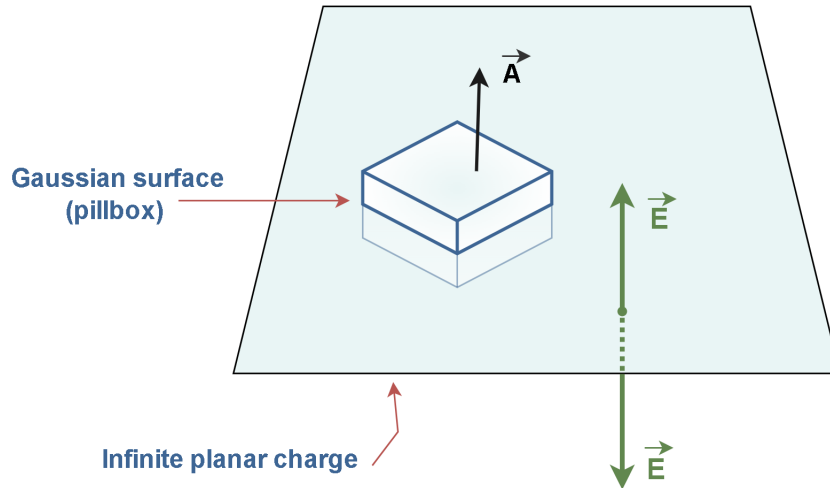


Figura 3.2: Exemplo do eletromagnetismo (análogo à gravitação)

Pela Lei de Gauss,

$$g \cdot 2A = 4\pi G(\rho Az)$$

Resolvendo para g ,

$$g = 2\pi G\rho z$$

Mas note que g equivale à aceleração em $-z$, ou seja $g = -\ddot{z}$

A E.D.O. se torna,

$$\ddot{z} = -2\pi G\rho z$$

Isso é a equação de um M.H.S que tem $\omega^2 = 2\pi G\rho$, portantono,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi}{G\rho}}$$

pr 3. Considere que um túnel é escavado através da Terra, como mostra a figura a seguir (fora de escala).

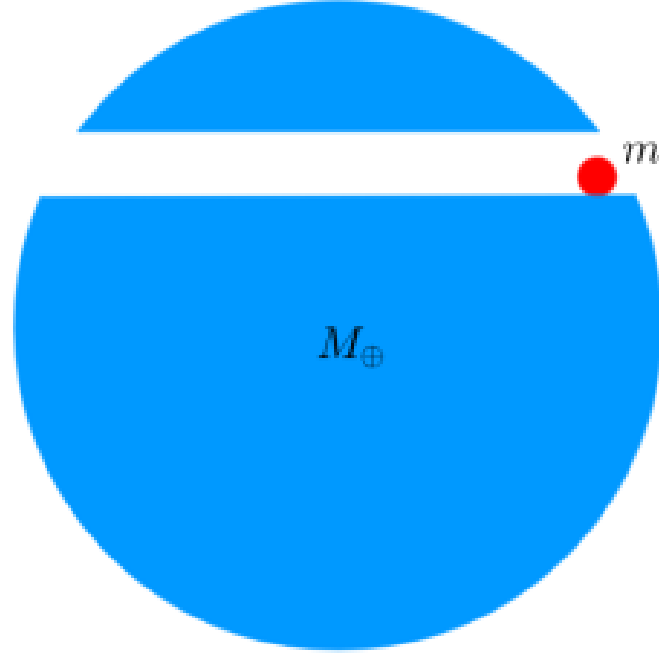


Figura 3.3: Caption

Uma massa m é solta a partir do repouso da superfície terrestre. Mostre que ela executa em um MHS e obtenha a equação horária de seu movimento. Considere que o túnel possui comprimento l e que ele não afeta de forma significativa o formato e a massa da Terra.

Solução: Seja o centro da Terra o ponto O , o ponto Q divide o túnel exatamente na metade e o ponto P representa a posição da massa, cujo, vamos denotar $\overline{QP} = x$. A distância entre O e P , $\overline{OP} = r$ e a distância $\overline{OQ} = y$. Analizando o caso limite, em que P está na "borda" do túnel, temos $r = R_\oplus$ e conseqüentemente, pelo teorema de pitágoras,

$$y = \sqrt{R_\oplus^2 - (l/2)^2}$$

Como a distância em y é fixa, podemos escrever r em função de um x arbitrário.

$$r^2 = y^2 + x^2 = R_\oplus^2 - (l/2)^2 + x^2$$

Em uma distância r do centro do planeta, a gravidade tem valor,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{int} = -4\pi G M_{\oplus} \frac{r^3}{R_{\oplus}^3}$$

Resolvendo a integral,

$$g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G M_{\oplus} \frac{r^3}{R_{\oplus}^3}$$

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} r$$

A força resultante será somente na linha $\overline{QP}$, então, considerando o triângulo $\triangle OQP$, se definirmos $\theta = \angle QOP$ temos $g_x = g \sin \theta = \frac{x}{r} g$

A equação do MHS se torna então,

$$g_x = -\ddot{x}$$

$$\frac{x}{r} \left(\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} r \right) = -\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} x$$

Que tem solução geral

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3}} t + \phi \right)$$

Note que quando $t = 0$, a massa se encontra na "borda" do túnel ($x = l/2$), portanto $A \cos \phi = l/2$. Por simetria, quando estiver em $1/4$ do período, ela estará no meio do túnel, isto é $x = 0$. Ou seja, $A \cos(\pi/2 + \phi) = 0$, o que sugere $\phi = 0$ e consequentemente $A = l/2$, assim, a equação do MHS é dado por,

$$\boxed{x(t) = \frac{l}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3}} t \right)}$$

pr 4. (Vinhedo 2023) Com o objetivo de estudar mais a fundo a fotosfera do Sol, um certo grupo de cientistas decide construir uma vela solar que ficaria estacionária, no espaço, a 6,30 milhões de quilômetros acima da superfície da estrela. Como essa vela

ficará submetida a uma temperatura de 4430 K em sua posição final, ela é feita de um material com ponto de fusão, coeficiente de dilatação superficial $\beta = 9,00 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ e superfície perfeitamente refletora. Além disso, ela ficará sempre voltada para a estrela, de forma que a luz chegue perpendicularmente à sua superfície. Por fim, a maior parte da massa da vela está concentrada em um computador de 8 kg em seu centro. Para os cálculos abaixo, desconsidere o arrasto e a atração gravitacional dos planetas.

a) Ajude esses cientistas e calcule com qual área essa vela precisa ser fabricada, considerando que a confecção será feita em um laboratório na Terra, a uma temperatura de 15°C. Devido a um erro em sua construção, a vela foi fabricada com aproximadamente 95% da área calculada no item anterior.

b) Suponha que a vela parta do repouso na posição em que fora inicialmente projetada para se manter em equilíbrio. Considerando, a priori, que a temperatura não varia em função da distância à estrela, estime quanto tempo demoraria para que a vela chegue à fotosfera.

Na verdade, uma análise mais detalhada deve considerar que a temperatura, de fato, varia.

em função da distância à estrela. Podemos considerar que, dentro de uma faixa, essa relação segue a função:

$$T = T' - qr^2(r - r_0)$$

Em que T' , q e r_0 são constantes, e r é a distância até o centro da estrela.

c) Sabe-se que o movimento, nessa faixa, é um MHS entorno da distância de $6,82 \cdot 10^9$ m até o centro da estrela. Também é sabido que o ponto no qual a vela fora inicialmente projetada para repousar pertence a essa faixa. Visto isso, calcule T' , q e r_0 .

d) Qual é o período desse MHS?

Solução: Solução oficial [aqui](#) (questão 8).

pr 5. (IOAA 2023) Considere um disco plano de massa M de raio interno r e raio externo R .

a) Uma massa puntual m está localizada no eixo de simetria do disco a uma distância x do plano do disco (assumiremos que a massa m permanece no eixo de simetria e está livre para se mover na direção vertical). Qual é a força gravitacional exercida sobre a massa puntual?

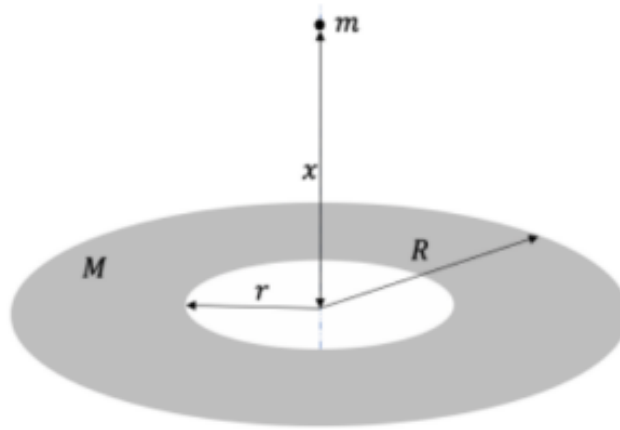


Figura 3.4: Caption

b) Qual será a frequência de pequenas oscilações do sistema

Solução:

a) Considere um elemento de massa dm no disco. Temos,

$$dF = -\frac{Gmdm}{r^2 + x^2}$$

Porém, após integrar a força, devido a simetria, a resultante será apenas na direção x (entrando no disco), desse modo,

$$dF_x = dF \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} dF$$

Note que também podemos escrever dm em função da área superficial $\sigma = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}$ da maneira $dm = \sigma dA = 2\pi\sigma r dr$. Assim,

$$dF_x = \frac{2\pi\sigma x G m r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr$$

Agora podemos integrar para conseguir a força total. Já deixando de fora os termos constantes da integral,

$$F_x = 2\pi\sigma x G m \int_r^R \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr$$

Trabalhando apenas na integral, vamos simplificar um pouco,

$$\int \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} dr = \int \frac{dr}{r^2(1 + (x/r)^2)^{3/2}}$$

Fazendo a substituição $u = x/r \rightarrow du = -x/r^2 dr \rightarrow dr = -r^2 du/x$ temos,

$$\int \frac{dr}{r^2(1 + (x/r)^2)^{3/2}} = -\frac{1}{x} \int \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}}$$

Resolvendo a integral elementar da direita,

$$-\frac{1}{x} \int \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} = -\frac{u}{x\sqrt{1 + u^2}}$$

Substituindo $u = x/r$

$$-\frac{u}{x\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{1}{r\sqrt{1 + (x/r)^2}}$$

Assim,

$$F_x = -2\pi\sigma x Gm \left. \frac{1}{r\sqrt{1 + (x/r)^2}} \right|_r^R$$

$$F_x = -2\pi\sigma x Gm \left(\frac{1}{R\sqrt{1 + (x/R)^2}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + (x/r)^2}} \right)$$

Substituindo $\sigma = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}$

$$F_x = \frac{2GMm}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) x$$

- b) Para pequenas oscilações $x \ll r, R$ temos que $r^2 + x^2 \approx r^2$ e $R^2 + x^2 \approx R^2$.
Simplificando a expressão de F_x ,

$$F_x = \frac{2GMm}{R^2 - r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) x = \frac{2GMm}{(R + r)(R - r)} \frac{R - r}{Rr} x = \frac{2GMmx}{(R + r)Rr}$$

Que é um MHS com frequencia,

$$\omega = \sqrt{\frac{2GM}{Rr(R+r)}}$$