

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Mecânica Celeste

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia
Franklin Costa

Revisão

Felipe Maia
Franklin Costa
Luis Fernando
Giovanna Queiroz

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projeto noic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 2

Mecânica Celeste

pr 1. Encontre a energia potencial gravitacional de uma estrela de massa M e raio R , com densidade uniforme.

Solução:

Imagine uma porção dm da massa da estrela localizada a uma distância r do centro da estrela. A energia potencial entre esses dois é dada por:

$$dU = -\frac{GM(r)dm}{r}$$

Em função da densidade: $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$; $dm = \rho 4\pi r^2 dr$. Substituindo na formula:

$$dU = -\frac{G(4\pi\rho)^2 r^4 dr}{3}$$

Performando a integral:

$$U = -\frac{G(4\pi\rho)^2}{3} \int r^4 dr = -\frac{G}{3} \left(\frac{3M}{R^3} \right)^2 \frac{R^5}{5} \therefore \boxed{U = -\frac{3GM^2}{5R}}$$

pr 2. (200 More PPP - Adaptado) Um planeta longo e cilíndrico chamado Wattson possui um satélite orbitando-o. A densidade média ρ do planeta é igual à da Terra, assim como seu raio R . Assim, calcule:

- a) Uma expressão que relaciona o período P com a distância do satélite ao centro do planeta. A velocidade de escape de um corpo é definida por aquela que, caso seja alcançada, faz com que este corpo fique no infinito com uma velocidade

nula. Desta forma ele nunca volta para sua órbita inicial. Sabendo disso analise, possivelmente dando o valor, tais grandezas:

- b) A velocidade de escape para um corpo na superfície da Terra.
- c) A velocidade de escape para um corpo na superfície de Wattson.

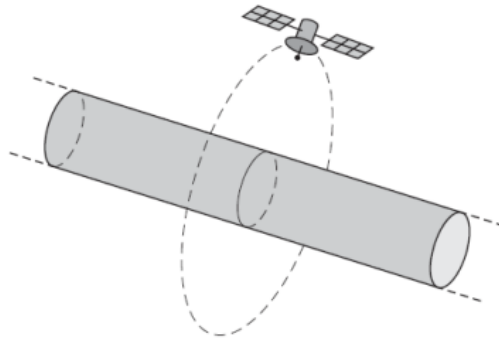


Figura 2.1: Ilustração do planeta Wattson e seu satélite.

Solução:

a) Seja r a distância do corpo ao planeta. Utilizando uma superfície Gaussiana em formato de cilindro com raio r e largura L , igual a do planeta, temos:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{int}$$

$$2\pi r L g = -4\pi G \rho \pi R^2 L$$

Resolvendo para g :

$$g = -\frac{2\pi G \rho R^2}{r}$$

Para encontrar o período, vamos relacionar o valor de g com a aceleração centrípeta.

$$|g| = \omega^2 r \rightarrow \frac{2\pi G \rho R^2}{r} = \frac{4\pi^2}{P^2} r$$

Isolando P :

$$P^2 = \frac{2\pi r^2}{G \rho R^2} \therefore P = \frac{r}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{G \rho}}$$

b) Para calcular a velocidade de escape de um corpo, temos que este chegará ao infinito

com velocidade $v = 0$. Em outras palavras, a sua energia mecânica é 0. Para um corpo na superfície da Terra com certa velocidade, temos:

$$E = K + U$$

Na condição de escape:

$$K = -U \rightarrow \frac{mv^2}{2} = - \left(-\frac{GM_{\oplus}m}{R} \right)$$

Isolando v :

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R}} = \boxed{\sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho R^2}}$$

c) Primeiramente, precisamos achar U para um corpo na superfície de Wattson. Por definição:

$$U = - \int F dr = - \int mg dr = 2\pi Gm\rho R^2 \int \frac{dr}{r}$$

Precisamos pensar nos limites de integração. Ao se tratar de potenciais (tanto elétricos como gravitacionais), é comum colocar como ponto de referência o infinito. O que também é razoável ao se trabalhar com velocidades de escape. Ao fazer isso, teríamos:

$$U = -2\pi G\rho m R^2 \int_{\infty}^R \frac{dr}{r} = -\infty$$

Ou seja, a rigor, a Energia potencial gravitacional em um corpo cilíndrico é $-\infty$. Ou seja, não é possível escapar.

pr 3. (Vinhedo 2022) Considere que o disco de uma galáxia tenha uma espessura igual a $2H$, que é muito menor que o raio do disco. Sendo h o módulo da altura de um ponto em relação ao plano central do disco galáctico, considere que a distribuição de massa do disco em qualquer instante é tal que a densidade $\rho(h)$ nesse ponto com $h \leq H$ é dada por:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H} \right)$$

Inicialmente, grandes nuvens de gás hidrogênio estão em uma altura $h_0 = 2,0$ kpc. Em certo momento elas se colidem, dissipando energia, e começam a cair em direção ao plano central galáctico unicamente pela influência gravitacional do disco. Considerando

que a temperatura inicial do gás é desprezível, encontre a temperatura $T(h_0)$ do gás quando ele chegar no plano central galáctico em função de h_0 , ρ_0 , H e da massa m_p das partículas do gás, além de constantes físicas. Após isso, substitua o valor de h_0 e encontre o valor numérico de T . **Dados:** $\rho_0 = 0,5 \text{ M}_\odot/\text{pc}^3$, $H = 2,5 \text{ kpc}$ e a massa do átomo de hidrogênio é $m_H = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Solução:

Primeiramente, vamos encontrar uma expressão para o valor da aceleração gravitacional em função de h . Utilizando uma superfície gaussiana cilíndrica:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM$$

A nossa superfície, deve englobar o disco e uma altura $\pm h$. Como a densidade varia com h , temos:

$$M = \int_{-h}^h \rho(h) dV = 2\rho_0 \int_0^h \left(1 - \frac{h}{H}\right) dV$$

Seja S a área da base do cilindro, então $dV = Sdh$. Substituindo:

$$M = 2\rho_0 S \int_0^h \left(1 - \frac{h}{H}\right) dh = 2\rho_0 S h \left(1 - \frac{h}{2H}\right)$$

Voltando para a Lei de Gauss:

$$\oint \mathbf{g} \cdot \mathbf{S} = -2gS$$

O sinal negativo vem devido aos vetores apontarem em direção oposta. O fator 2 vem, pois a superfície gaussiana possui uma área de "tampa" em cima e em baixo. Sendo assim:

$$-2gS = -8\pi G\rho_0 S h \left(1 - \frac{h}{2H}\right)$$

$$g = 4\pi G\rho_0 h \left(1 - \frac{h}{2H}\right)$$

Assumindo que a nuvem possui N partículas de gás, temos que a força que a gravidade aplica na nuvem é dada pela forma de:

$$F = mg$$

O nosso interesse é descobrir o tanto de energia que o Gás irá adquirir durante a sua

queda. Por definição:

$$U(0) - U(h_0) = \int_0^{h_0} F dh = 4\pi G \rho_0 m \int_0^{h_0} \left(h - \frac{h^2}{2H} \right) dh$$

$$U(h_0) - U(0) = 4\pi G \rho_0 m \left(\frac{h_0^2}{2} - \frac{h_0^3}{6H} \right) = 2\pi G \rho_0 m h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H} \right)$$

Por conservação energia:

$$U(h_0) + K(h_0) = U(0) + K(0)$$

Para $K(h_0)$ temos que a energia é desprezível, então $K(h_0) = 0$.

$$K(0) = U(h_0) - U(0)$$

Para um gás ideal monoatômico, temos:

$$\frac{3}{2} N k_B T = 2\pi G \rho_0 m h_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{3H} \right)$$

Isolando T :

$$T = \frac{4\pi G \rho_0 m h_0^2}{3N k_B} \left(1 - \frac{h_0}{3H} \right)$$

Note que para cada proton haverá um elétron (átomo de hidrogênio), logo $N = \frac{m}{(m_h + m_e)/2} = \frac{2m}{m_p}$.

$$T = \frac{2\pi G \rho_0 m_p h_0^2}{3k_B} \left(1 - \frac{h_0}{3H} \right)$$

Substituindo numericamente: $T \approx 1,6 \cdot 10^6 K$

pr 4. Vejamos como aplicar a ideia 1.

- a) Considere um planeta na forma de prisma triangular equilátero reto com aresta da base medindo a . Sabendo que sua densidade de massa volumétrica é ρ e que sua altura l é muito maior que a , encontre o valor da aceleração gravitacional em uma de suas arestas laterais.
- b) Considere o mesmo planeta do item anterior, mas com sua massa redistribuída

entre suas três faces laterais, de forma que elas possuam densidades de massa superficial σ_1 , σ_2 e σ_3 . Encontre o valor da aceleração gravitacional no eixo do planeta.

Solução: a) Note que pela simetria, para um observador em uma das arestas, o ângulo sólido compreendido pelo planeta será de $\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Uma vez que para "acabar de cercá-lo" seriam precisos outros 5 planetas desse tipo (i.e.: cada um deles ocupa 1/6 do ângulo sólido total). Com isso em mente, podemos aplicar a fórmula:

$$g = G\sigma\Omega$$

Como o planeta é maciço, vamos imaginá-lo como sendo vários planos, um em cima do outro. A densidade superficial de cada um, seria tal que:

$$\sigma = \rho h = \rho a \sqrt{3}/2$$

Portanto:

$$g = \frac{\sqrt{3}}{2} G \rho a \frac{2\pi}{3} \rightarrow \boxed{g = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} G \rho a}$$

b) Agora, para um observador no centro, o ângulo sólido total é dividido entre 3 faces simétricas, logo, cada uma das faces possui um ângulo sólido de

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, o módulo da força que cada um deles irá produzir é de:

$$g_i = \frac{4\pi}{3} G \sigma_i$$

Sejam a, b e c as faces que possuem respectivamente, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sendo assim o esquema é:

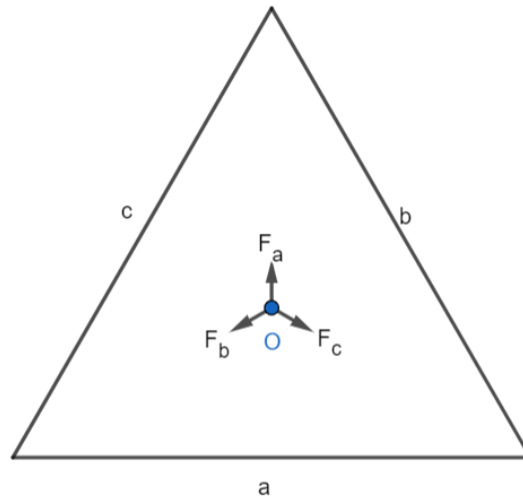


Figura 2.2: Representação dos Vetores Força.

Vamos definir um eixo x paralelo à face a e y ortogonal ao mesmo. Pelo princípio da superposição:

$$\mathbf{g}_r = \sum \mathbf{g}_i = \frac{4\pi}{3}G [(\sigma_c - \sigma_b) \cos 30^\circ \hat{x} + (\sigma_a - (\sigma_b + \sigma_c) \sin 30^\circ) \hat{y}]$$

Para acharmos o módulo total da aceleração, temos que $|\mathbf{g}| = \sqrt{(g\hat{x})^2 + (g\hat{y})^2}$ com um pouco de álgebra, chegamos em:

$$|\mathbf{g}| = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}$$

pr 5. Prove (para órbitas circulares) que quando m não é desprezível, a 3ª Lei de Kepler pode ser reescrita como

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

Onde a_1 e a_2 são, respectivamente, as distâncias de M e m ao CM do sistema.

Solução: Olhe o seguinte esquema:

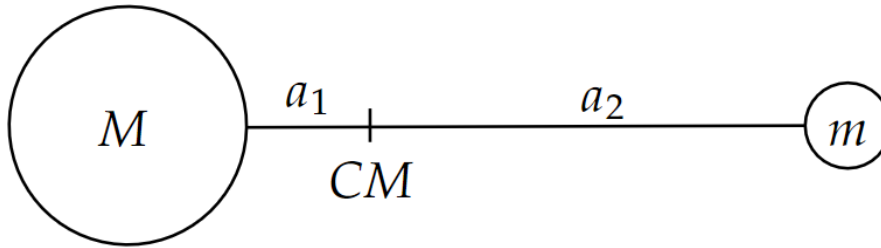


Figura 2.3: Esquema da órbita

Ambos os corpos orbitam o centro de massa do sistema, sendo assim, temos: Para M :

$$F_G = F_c \rightarrow \frac{GMm}{(a_1 + a_2)^2} = M\omega^2 a_1$$

$$\frac{Gm}{(a_1 + a_2)^2} = \omega^2 a_1$$

De maneira similar, para a massa m , teremos:

$$\frac{GM}{(a_1 + a_2)^2} = \omega^2 a_2$$

Somando as equações:

$$\frac{G(M + m)}{(a_1 + a_2)^2} = \omega^2(a_1 + a_2) \rightarrow \frac{G(M + m)}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Reorganizando:

$$\boxed{\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}}$$

■

pr 6. Demonstre a *equação de Binet* para uma força central com potencial V :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} V(u)$$

Onde L é o momento angular e $u = 1/r$.

Solução:

A energia mecânica de uma órbita elíptica pode ser escrita como:

$$E = V(r) + \frac{1}{2}mv^2 = V(r) + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$$

O momento angular de uma partícula é:

$$L = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Substituindo:

$$E = V(r) + \frac{1}{2}m \left(\frac{L^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \right)$$

Separando as variáveis e substituindo $r = 1/u$

$$E = V(u) + \frac{L^2}{2m}u^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Agora, nossa maior preocupação é escrever $\dot{r}$ em termos das variáveis disponíveis. Equacionando:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta}$$

Do primeiro diferencial:

$$\frac{dr}{du} = \frac{d}{du} \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}$$

O segundo já foi calculado anteriormente e vale Lu^2/m . Já o terceiro, continua como variável, contudo:

$$\dot{r} = \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right)$$

Voltando a equação inicial:

$$E = V(u) + \frac{L^2}{2m}u^2 + \frac{L^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2$$

Derivando os dois lados por θ e utilizando o fato de que a energia é conservada:

$$\frac{L^2}{2m} \frac{d}{d\theta} u^2 + \frac{L^2}{2m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = -\frac{d}{d\theta} V(u)$$

$$\frac{L^2}{2m} \frac{d}{d\theta} u^2 + \frac{L^2}{m} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{d}{d\theta} V(u)$$

Dividindo a equação por $d\theta/du$, temos:

$$\frac{L^2}{m}u + \frac{L^2}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{d}{du}V(u)$$

E por fim:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du}V(u)$$



pr 7. (NBPhO 2019) Um satélite movido a energia solar é lançado da Terra com velocidade inicial v_0 em uma órbita elíptica heliocêntrica com o objetivo de coletar o máximo de energia possível. O ângulo de lançamento pode ser alterado de forma livre.

- Qual é a velocidade mínima v_m necessária para que o satélite alcance qualquer órbita heliocêntrica?
- Qual é a velocidade do satélite logo após escapar do campo gravitacional terrestre?
- Expresse a média temporal da irradiância solar do satélite em termos de seu semieixo maior a , momento angular J , período orbital T e massa m .
- Qual é a máxima irradiância solar média que o satélite consegue coletar e qual é o ângulo de lançamento necessário em relação ao movimento da Terra?

A massa do Sol é $M_\odot$, o raio orbital da Terra $a_\oplus$, a aceleração gravitacional na Terra g , o raio da Terra $R_\oplus$ e a luminosidade do Sol $L_\odot$.

Solução:

- A velocidade mínima para isso acontecer é a velocidade mínima para o satélite sair da órbita da Terra, também conhecida pela velocidade de escape. Dada por:

$$v_m = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

- Por conservação de energia:

$$-\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2}$$

Resolvendo para v_f :

$$v_f = \sqrt{v_0^2 - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

c) A potência absorvida é:

$$P_{abs} = FA = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} A$$

A irradiância solar é $I = \frac{P_{abs}}{A}$. E por definição, sua média temporal é:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{L_{\odot}}{4\pi T} \int_0^T \frac{dt}{r^2}$$

Já o momento angular, J , é: $J = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dt}{r^2} = m d\theta / J$. Aplicando a substituição:

$$\bar{I} = \frac{L_{\odot}}{4\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{m}{J} d\theta = \frac{L_{\odot} m}{2JT}$$

Vamos substituir o período:

$$T = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\odot}} \right)}$$

$$\bar{I} = \frac{L_{\odot} m}{4\pi J} \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a^3}}$$

d) Perceba que quanto maior $\bar{I}$, menor deve ser a quantidade $Ja^{3/2}$. No referencial do Sol a velocidade do satélite, $\vec{v}$ é dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\oplus}$$

Onde $v_{\oplus}$ é a velocidade da Terra em relação ao Sol. O valor que minimiza a quantidade J é tal que $\vec{v}$ é mínimo, ou seja, o satélite é lançado na direção oposta ao movimento da Terra. O valor de a é independente do ângulo de lançamento. Alterá-lo, apenas muda a excentricidade da órbita que o satélite irá seguir e com isso, mudará o seu momento angular. Para encontrarmos o valor do semi eixo maior, devemos conservar energia. Por conservação de energia:

$$-\frac{GM_{\odot}m}{2a} = -\frac{GM_{\odot}m}{a_{\oplus}} + \frac{m(\vec{v}_0 + \vec{v}_{\oplus})^2}{2}$$

Seja $v_2 = v_0 - v_\oplus$ e $v_\oplus^2 = GM_\odot/a_\oplus$:

$$-\frac{GM_\odot}{2a} = -\frac{GM_\odot}{a_\oplus} + \frac{v_2^2}{2} \rightarrow -\frac{GM_\odot}{a} = -2v_\oplus^2 + v_2^2$$

Definindo $x = v_2/v_\oplus$:

$$\frac{GM_\odot}{av_\oplus^2} = 2 - x^2 \rightarrow \frac{a_\oplus}{a} = 2 - x^2 \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2 - x^2}{a_\oplus}$$

Voltando a equação de $\bar{I}$:

$$\bar{I} = \frac{L_\odot m}{4\pi J} \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus^3}} (2 - x^2)^{3/2}$$

No momento inicial, $J = ma_\oplus v_2$, logo:

$$\bar{I} = \frac{L_\odot v_\oplus}{4\pi a_\oplus^2 v_2} (2 - x^2)^{3/2}$$

$$\boxed{\bar{I} = \frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \frac{(2 - x^2)^{3/2}}{x} ; x = \sqrt{\frac{a_\oplus}{GM_\odot}} \sqrt{v_0^2 - 2gR_\oplus - 1} ; \theta = \pi}$$

pr 8. (Vinhedo 2022) Em sua rotina de apagar incêndios pelo universo, o astronauta Eduardo viaja pelo cosmos em sua moderna espaçonave de bombeiro, quando avista então o exoplaneta 2018 LLHES, do sistema V-4550-UR45. Ele possui massa $M = M_\oplus$ e raio $R = R_\oplus$, idênticos aos da Terra. Instigado, ele resolve seguir curso até o planeta, quando entra em desespero ao notar uma falha no sistema mecânico da nave, forçando-o a permanecer o tempo todo com o motor desligado, i.e., o movimento da nave é influenciado somente pela gravidade do planeta. Considere que, inicialmente, a nave encontrava-se a uma grande distância do planeta (no infinito), e movia-se com velocidade de módulo $v_\infty = 5,00 \text{ km/s}$ em relação a ele, com um parâmetro de impacto $b = 1,5R$, conforme ilustra a figura a seguir.

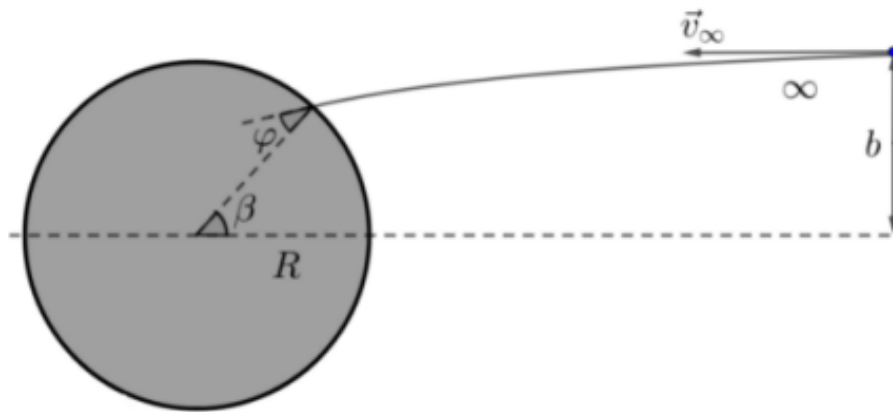


Figura 2.4: Ilustração da trajetória

- À medida que a nave se aproxima cada vez mais do planeta, Eduardo resolve-se acalmar e aceitar seu destino cruel. Em um certo momento, a espaçonave colide com a superfície do astro. Definimos φ como sendo o menor ângulo entre o vetor velocidade da nave imediatamente antes do choque e a linha radial do planeta. Calcule o ângulo φ .
- Calcule o ângulo β , que caracteriza o ponto de colisão da nave com o planeta.
- Para a surpresa (e alívio) de Eduardo, ele continua vivo após o choque, e a espaçonave adentra o planeta. Lá dentro, ele percebe que o planeta é, na verdade, oco. Eventualmente, a nave deixa o planeta depois de certo tempo, e continua viajando indefinidamente pelo espaço. Calcule o ângulo de desvio δ na trajetória da nave, i.e., o menor ângulo entre o vetor velocidade inicial $\vec{v}_\infty$ e o vetor velocidade da nave depois de muito tempo.

OBS: Considere que a velocidade da nave é inalterada logo antes e logo após colisões com as paredes internas ou externas do planeta.

Solução: a) Por conservação de momento angular:

$$v_\infty b = v_f R \sin \varphi$$

Por conservação de energia:

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_f^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Isolando v_f :

$$v_f = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM}{R}}$$

Substituindo na expressão do momento angular:

$$\sin \varphi = \frac{v_\infty b}{v_f R} = \frac{v_\infty b}{R} \sqrt{\frac{1}{v_\infty^2 + 2GM/R}} = \frac{b}{R} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2GM}{Rv_\infty^2}}}$$

Substituindo numericamente, encontramos:

$$\boxed{\varphi \approx 37,7^\circ}$$

b) Utilizando o teorema do Impulso, temos que a mudança no momento linear nos eixos x e y são respectivamente:

$$I_x = \int F_x dt \quad ; \quad I_y = \int F_y dt$$

Onde vamos definir o eixo x como sendo a linha pontilhada e y sendo perpendicular a está, com a origem sendo o centro do planeta. Seja ψ o ângulo entre o vetor posição (vetor que liga o centro do planeta e a nave de Eduardo). Então:

$$F_x = \frac{GMm}{r^2} \cos \psi \quad ; \quad F_y = \frac{GMm}{r^2} \sin \psi$$

Integrando:

$$m(v_x - v_\infty) = GMm \int \frac{\cos \psi}{r^2} dt \quad ; \quad mv_y = GMm \int \frac{\sin \psi}{r^2} dt$$

O momento angular pode ser escrito por:

$$L = mr^2 d\psi/dt \rightarrow dt/r^2 = m d\psi/L$$

Aplicando a mudança de variável:

$$v_x - v_\infty = \frac{GMm}{L} \int_0^\beta \cos \psi d\psi \quad ; \quad v_y = \frac{Gmm}{L} \int_0^\beta \sin \psi d\psi$$

Resolvendo as integrais e usando $L = mv_\infty b$:

$$v_x - v_\infty = \frac{GM}{v_\infty b} \sin \beta \quad ; \quad v_y = \frac{GM}{v_\infty b} (1 - \cos \beta)$$

Definindo $\kappa = \frac{GM}{v_\infty^2 b}$ temos:

$$v_x = v_\infty (1 + \kappa \sin \beta)$$

$$v_y = v_\infty \kappa (1 - \cos \beta)$$

Pelo teorema de Pitágoras, a velocidade ao colidir com o planeta é:

$$v_f^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$1 + \frac{2b\kappa}{R} = (1 + \kappa \sin \beta)^2 + \kappa^2 (1 - \cos \beta)^2$$

Com um pouco de algebra e utilizando que $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ chegamos em:

$$\kappa - \frac{b}{R} = \kappa \cos \beta - \sin \beta$$

Definindo o ângulo θ como sendo o ângulo entre a assíntota e o eixo x é tal que:

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{v_\infty^2 b}{GM} = \frac{1}{\kappa}$$

Ou seja:

$$\cos \theta = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}}$$

Multiplicando a expressão anterior por $\cos \theta$, chegamos em:

$$\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \frac{\kappa \cos \beta}{\sqrt{1 + \kappa^2}} - \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + \kappa^2}}$$

$$\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \cos \theta \cos \beta - \cos \theta \sin \beta = \cos(\theta + \beta)$$

Resolvendo para β temos:

$$\boxed{\beta = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \theta = \arccos \left(\frac{\kappa - \frac{b}{R}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\kappa} \right) = 54,1^\circ}$$

c) Para resolver essa questão, vamos utilizar as equações de momento nos eixos x e y novamente. Perceba que ao sair do planeta, o ângulo ψ é dado por $\psi_0 = \pi - 2\varphi + \beta$: e

ao chegar ao infinito o ângulo será: $\psi_\infty = \pi + \delta$. No infinito, também temos:

$$v_x = v_\infty \cos \delta \quad ; \quad v_y = v_\infty \sin \delta$$

Logo:

$$v_\infty \cos \delta - v_x = v_\infty \kappa \int_{\pi-2\varphi+\beta}^{\pi+\delta} \cos \psi d\psi$$

$$v_\infty \sin \delta - v_y = v_\infty \kappa \int_{\pi-2\varphi+\beta}^{\pi+\delta} \sin \psi d\psi$$

Resolvendo as integrais, chegamos em:

$$v_\infty \cos \delta - (1 + \kappa \sin \beta) v_\infty = \kappa v_\infty [\sin(\pi + \delta) - \sin(\pi + \beta - 2\varphi)]$$

$$v_\infty \sin \delta - \kappa(1 - \cos \beta) v_\infty = \kappa v_\infty [-\cos(\pi + \delta) + \cos(\pi + \beta - 2\varphi)]$$

E desenvolvendo as mesmas:

$$\cos \delta + \kappa \sin \delta = 1 + \kappa [\sin(\beta - 2\varphi) + \sin \beta]$$

$$\sin \delta - \kappa \cos \delta = \kappa [1 - \cos \beta - \cos(\beta - 2\varphi)]$$

Resolvendo qualquer uma das duas, chegamos em:

$$\boxed{\delta = 2(\beta - \varphi) = 32,8^\circ}$$

pr9. Um fóton de frequência f (despreze seu redshift) é emitido por uma supernova distante na direção da Terra. Porém, quando ele chega ao sistema solar, ele passa bem perto do Sol e acaba sendo desviado. Para ter uma ideia do que acontece nesse fenômeno da relatividade geral, trataremos o problema classicamente, assumindo que o fóton possui massa m .

- Assumindo que a energia do fóton é igual à sua energia de repouso, encontre uma expressão para sua massa m .
- Suponha que o fóton possui parâmetro de impacto b grande o suficiente para não se chocar com a superfície solar. Encontre uma expressão aproximada para o ângulo φ de desvio da trajetória do fóton, assumindo que ele seja muito pequeno.

Nota: Seu resultado deve ser parecido com aquele previsto pela relatividade geral,

$$\varphi = \frac{4GM}{bc^2}$$

Solução:

a) Utilizando a equivalência massa energia:

$$mc^2 = hf \rightarrow \boxed{m = \frac{hf}{c^2}}$$

b) Um esquema da situação é a seguinte:

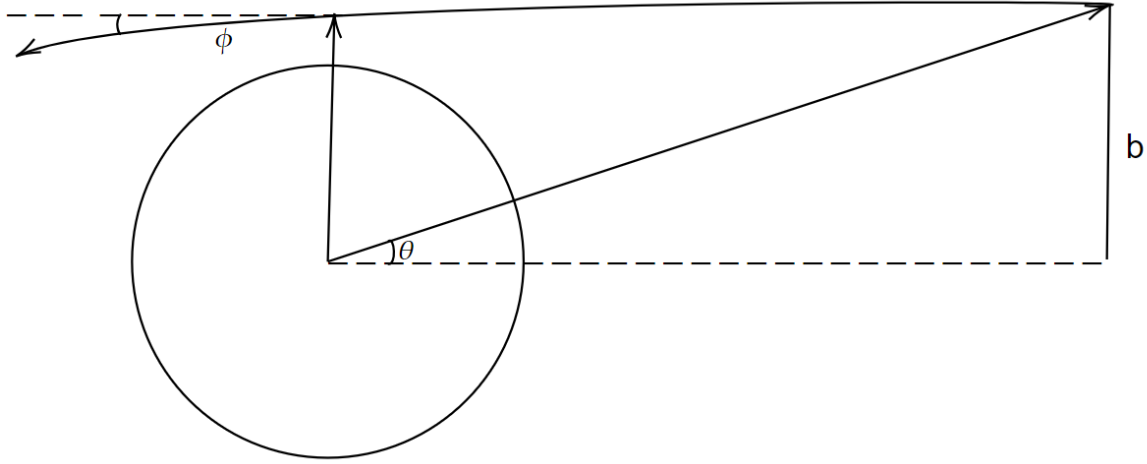


Figura 2.5: Esquema da trajetória do fóton

Utilizando o Teorema do Impulso nos eixos x e y , temos:

$$I_x = GMm \int \frac{\cos \theta}{r^2} dt \quad ; \quad I_y = GMm \int \frac{\sin \theta}{r^2} dt$$

Utilizando a mesma mudança de variável do item anterior, onde $L = mbc \equiv mr^2 d\theta/dt$:

$$I_x = \frac{GMm^2}{L} \int \cos \theta d\theta \quad ; \quad I_y = \frac{GMm^2}{L} \int \sin \theta d\theta$$

No momento inicial, no infinito, o ângulo θ , vale $\theta_0 = 0$ e no momento final, $\theta_f = \pi - \phi$, integrando:

$$I_x = \frac{GMm^2}{L} (\sin \phi - \sin 0) \approx \frac{GMm^2 \phi}{L}$$

$$I_y = \frac{GMm^2}{L}(\cos \phi + \cos 0) \approx \frac{2GMm^2}{L}$$

Aqui utilizamos que $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$, $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, $\sin \phi \approx \phi$ e $\cos \phi \approx 1$. Perceba que o impulso em x é desprezível, então a velocidade do fóton não é alterada nesse jeito. Já no eixo y :

$$v_y = \frac{2GMm}{L}$$

Pelo vínculo geométrico:

$$\tan \phi \approx \phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2GMm}{Lc} \rightarrow \boxed{\phi = \frac{2GM}{bc^2}}$$

pr 10. Cylindrical Land é um universo em que todos os corpos são cilíndricos. Nele, as Leis de Newton ainda são válidas. Um dos fenômenos que mais encantam os físicos e astrônomos da Cylindrical Land são as lentes gravitacionais. Paulinho, cientista desse universo, decidiu modelar o funcionamento desses fenômenos. Para isso, ele precisa de sua ajuda para responder os seguintes itens:

- a) Mostre que uma partícula que se aproxima de um corpo cilíndrico supermassivo de massa M e comprimento muito grande L com velocidade v a partir de um parâmetro de impacto b é desviada de sua trajetória inicial por um ângulo muito pequeno

$$\theta = \frac{kGM}{v^2 L}$$

e encontre o valor numérico de k .

- b) Considere agora um sistema caótico composto por diversos corpos cilíndricos idênticos de massa M e comprimento muito grande L que orbitam desordenadamente entre si. À todo instante, a separação entre dois corpos vizinhos é l e eles estão sempre no mesmo plano. Uma partícula aproxima-se do sistema com velocidade v a partir de um parâmetro de impacto b . Sabe-se que a distância l é infinitesimalmente pequena quando comparada à trajetória da partícula, mas grande o suficiente para que, a todo momento, a partícula sofra apenas interação gravitacional do corpo momentaneamente mais próximo.

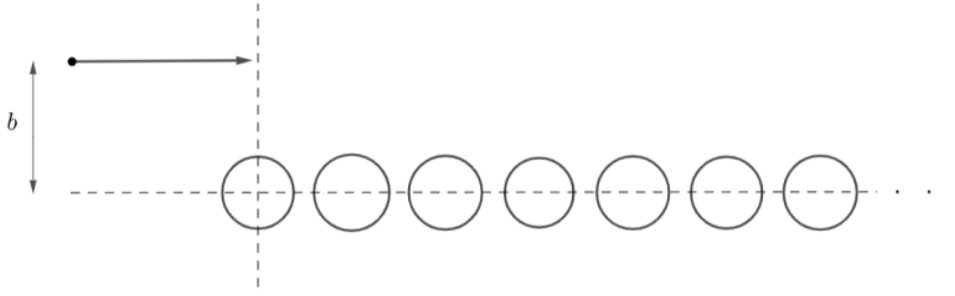


Figura 2.6: Esquema do sistema Caótico

Com base nisso, deduza uma equação para trajetória da partícula e comente sobre o movimento apresentado.

Solução: a) Aplicando a lei de Gauss para cilindros:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{in}$$

$$2\pi r L g = 4\pi GM_{in}$$

$$g = \frac{2GM_{in}}{Lr}$$

Onde r é a distância ao eixo do cilindro. Pelo mesmo raciocínio da questão anterior, podemos afirmar que a mudança de impulso no eixo x é irrelevante, sendo assim, vamos analisar apenas o eixo y .

$$I_y = mv_y = \int mg dt = \frac{2GMm}{L} \int \frac{\sin \theta}{r} dt$$

Pelo vínculo geométrico, $\sin \theta = b/r$, temos:

$$v_y = \frac{2GM}{L} b \int \frac{dt}{r^2}$$

Seja J o momento angular da órbita, então:

$$v_y = \frac{2GMm}{LJ} b \int_0^{\pi-\theta} d\theta \approx \frac{2\pi GMm}{LJ} b = \frac{2\pi GM}{v_0 L}$$

Logo:

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2\pi GM}{v_0^2 L}$$

Com isso, concluimos que:

$$k = 2\pi$$

b) Após caminhar uma distância x , a partícula passa por $N = x/l$ cilindros, desviando sua órbita em um ângulo $N\phi$ "para baixo", ou seja, em $-N\phi$. Perceba que este é o coeficiente angular da trajetória, portanto:

$$\frac{dy}{dx} = -\tan N\phi \approx -\frac{\phi}{l}x$$

Separando as variáveis e integrando:

$$y = -\frac{\pi GM}{v_0^2 L l} x^2 + C$$

O valor da constante de integração, C , pode ser encontrado analisando as condições iniciais. Perceba que quando $x = 0$, temos $y = b$, com isso, podemos concluir que $C = b$. Por fim:

$$y = b - \frac{\pi GM}{v_0^2 L l} x^2$$

Ou seja, a trajetória é uma parábola.

pr 11. (Vinhedo 2022) Um satélite em uma órbita circular com velocidade v vai sofrer um pequeno impulso instantâneo na direção de seu movimento. Assim, a sua velocidade vai sofrer um incremento $\Delta v \ll v$, alterando a órbita. Utilize que $(1+x)^n \approx 1+nx$, para $x \ll 1$ e que $\beta = \Delta v/v$.

a) Mostre que a excentricidade da órbita resultante é aproximadamente:

$$e = 2\beta$$

b) Mostre que o incremento no período orbital é aproximadamente:

$$\Delta T = 3T_0\beta$$

Onde T_0 é o período da órbita inicial.

Solução: a) Após o impulso, sua velocidade é $v' = v + \Delta v = v(1 + \beta)$. Como o impulso é tangencial, esse ponto se torna o novo periélio da órbita. A velocidade do periélio é

dada por:

$$v' = v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$v^2(1+\beta)^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$v^2(1+\beta)^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a}$$

Agora, vamos a dois pontos importantes: - Pela equação vis-visa, $v^2 = GM/r$ - Como a nova órbita possui r como periélio, temos:

$$r = a(1-e) \rightarrow a = r/(1-e)$$

Aplicando essas mudanças, temos:

$$v^2(1+\beta)^2 = 2v^2 - v^2(1-e) = v^2(1+e)$$

$$(1+\beta)^2 = (1+e)$$

Aplicando a aproximação $(1+x)^n = 1+nx \quad \forall x \ll 1$, temos:

$$1+2\beta = 1+e$$

e assim, chegamos a expressão desejada:

$$\boxed{e = 2\beta}$$

b) O período inicial é dado por:

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}} r^{3/2} \equiv \kappa r^{3/2}$$

Já, o período após a colisão, é:

$$T = \kappa \left(\frac{r}{1-e} \right)^{3/2} = T_0(1-e)^{-3/2} = T_0(1 + \frac{3}{2}e) = T_0(1+3\beta)$$

Por fim:

$$T - T_0 = T_0(1+3\beta) - T_0$$

$$\Delta T = 3T_0\beta$$

pr 12. Considere uma espaçonave que orbita o Sol em um círculo de raio igual ao raio $a_{\oplus}$ da órbita terrestre. Queremos transferi-la para uma órbita com raio igual ao da de Marte, a_M . Para isso, utiliza-se a órbita de transferência de Hohmann.

- Encontre uma expressão para ambas as variações de velocidade, Δv_1 e Δv_2 , necessárias para realizar a transferência.
- Encontre o tempo total necessário para realizar a transferência entre as órbitas inicial e final.

Solução: A seguinte imagem, ilustra a transferência de Hohmann:

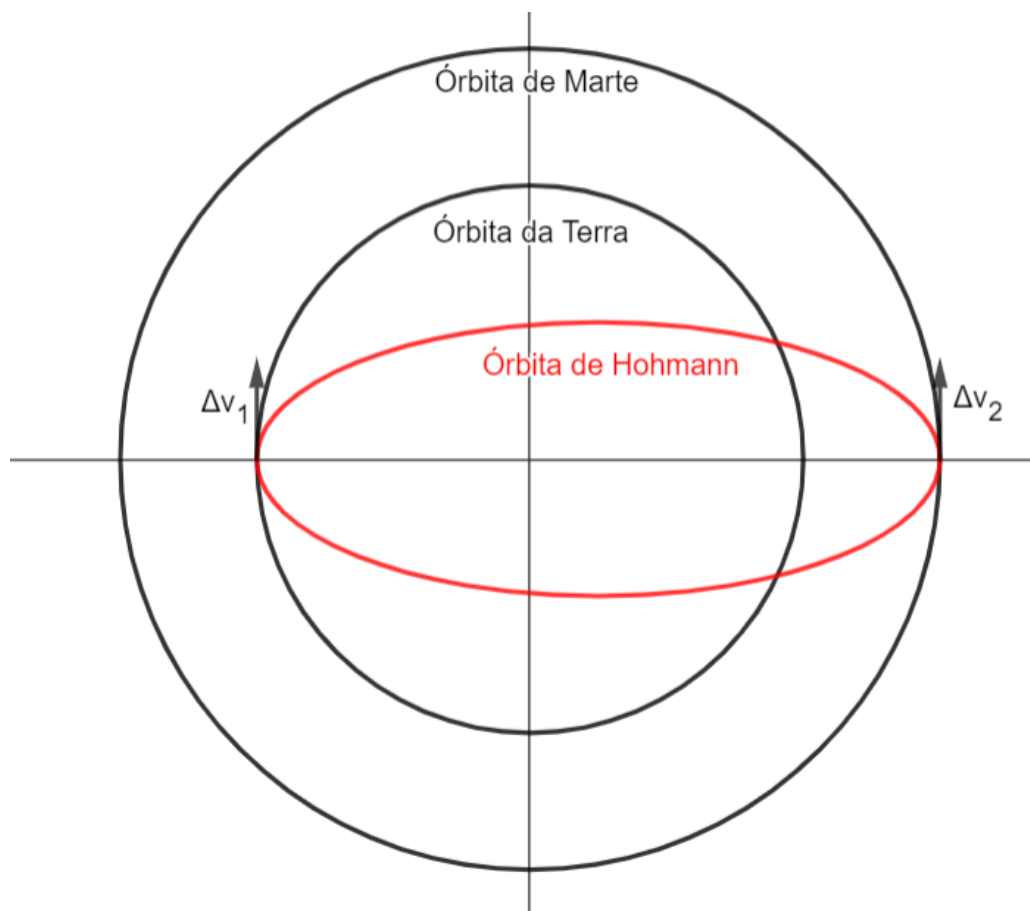


Figura 2.7: Transferência de Hohmann.

a) Perceba as etapas da mudança de órbita:

- A nave recebe um impulso Δv_1 , fazendo com que essa saia da órbita da Terra e entre no periélio na órbita de Hohmann.
- No afélio da órbita de Hohmann, a órbita recebe um impulso Δv_2 , fazendo com que está entre na órbita de Marte.

Com isso em mente, vamos aos cálculos: Perceba que a órbita de Hohmann possui semi-eixo maior $a_H = (a_\oplus + a_M)/2$, seu periélio dista $a_\oplus$ e seu afélio dista a_M do Sol. Logo, $\Delta v_1 = v_p - v_\oplus$, utilizando a equação vis-visa, temos:

$$\Delta v_1 = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{a_\oplus} - \frac{2}{a_\oplus + a_M} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{a_\oplus}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_\oplus + a_M}} - 1 \right)$$

Utilizando o mesmo raciocínio para encontrar Δv_2 , chegamos em:

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} \left(1 - \sqrt{\frac{2a_\oplus}{a_\oplus + a_M}} \right)$$

b) O caminho percorrido durante a transferência é metade da órbita de Hohmann, então, o tempo decorrido entre o momento inicial é:

$$\Delta T = \frac{T_H}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_\odot}} a_H^3$$

Substituindo a_H :

$$\Delta T = \pi \sqrt{\frac{(a_\oplus + a_M)^3}{8GM_\odot}}$$

pr 13. (Vinhedo 2022) Cientistas do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) pretendem enviar um satélite, inicialmente na Terra, para realizar uma órbita ao redor de Júpiter. Para isso, eles vão utilizar uma transferência bi-elíptica, necessitando, portanto, que a aeronave receba 3 impulsos. Sabendo que o eixo maior da primeira órbita elíptica de transferência é de 12 U.A., responda:

- Esquematize esta manobra e calcule os 3 impulsos necessários (ΔV_1 , ΔV_2 e ΔV_3), incluindo no desenho os pontos onde eles são realizados e seus sentidos.
- Calcule quanto tempo demoraria esse trajeto.
- Desenhe qual deve ser a configuração da Terra, Sol e Júpiter no início da manobra, deixando claro qual o ângulo entre a linha Sol-Terra e a Sol-Júpiter.

Solução:

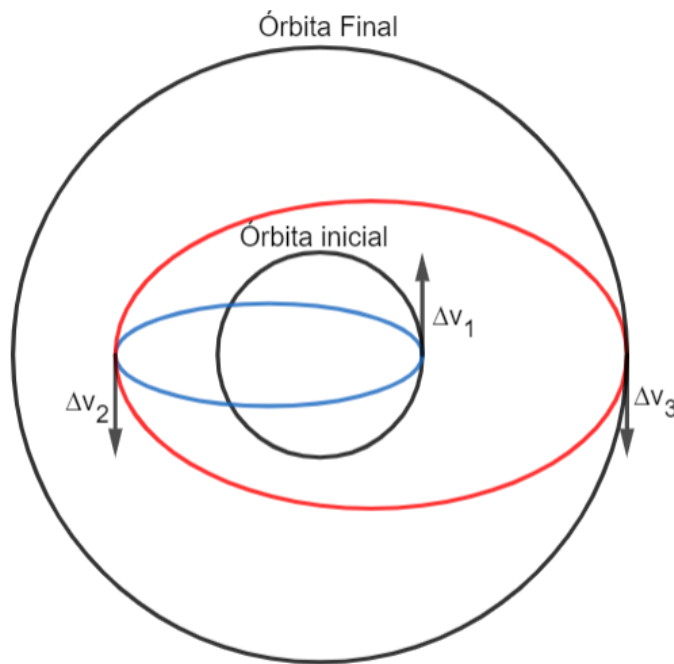


Figura 2.8: Trnasferência bi-elíptica

A nave parte da órbita inferior (preta), sofre um impulso ΔV_1 , parte para a primeira elipse (azul), após concluir meio período na primeira elipse a nave sofre outro impulso ΔV_2 e parte para a segunda elipse (vermelha), por fim, a nave sofre um último impulso ΔV_3 e chega a órbita superior (preta). Denotaremos por a_1 e a_2 os semi-eixos maiores da primeira e segunda elipse, respectivamente, e por r_{a_1} e r_{a_2} as distâncias entre o afélio e o Sol. a) Equacionando temos:

$$\Delta V_1 = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{1}{a_1} \right)} - \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_{a_1}} - \frac{1}{a_2} \right)} - \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_{a_1}} - \frac{1}{a_1} \right)}$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_J}} - \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_{a_2}} - \frac{1}{a_2} \right)}$$

Antes do algebrismo, agora temos que encontrar r_{a_1} e r_{a_2} . O enunciado nos fornece o valor de a_1 , então para a primeira elipse temos:

$$a_\oplus = a_1(1 - e_1)$$

Isolando e_1 :

$$e_1 = 1 - \frac{a_\oplus}{a_1}$$

A distância do afélio é dada por $r_{a_1} = a_1(1 + e_1)$, logo:

$$r_{a_1} = a_1 \left(2 - \frac{a_\oplus}{a_1} \right) = 2a_1 - a_\oplus$$

Perceba que r_{a_2} vale o mesmo que a_J , com isso:

$$r_{a_2} = a_J = a_2(1 + e_2)$$

E também que o periélio da segunda órbita está no mesmo ponto que o afélio da primeira, logo:

$$r_{a_1} = 2a_1 - a_\oplus = a_2(1 + e_2)$$

Resolvendo esse sistema para a_2 , chegamos em:

$$a_2 = \frac{1}{2}(2a_1 - a_\oplus + a_J)$$

Agora podemos começar a "ajeitar" e a resolver as equações.

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} \left(1 - \frac{a_\oplus}{a_1} \right)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{GM_\odot} \left(\sqrt{\frac{2}{r_{a_1}} - \frac{1}{a_2}} - \sqrt{\frac{2}{r_{a_1}} - \frac{1}{a_1}} \right)$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{GM_\odot} \left(\sqrt{\frac{1}{a_J}} - \sqrt{\frac{2}{r_{a_2}} - \frac{1}{a_2}} \right)$$

Substituindo os valores numéricos, chegamos em:

$$\Delta V_1 \approx 10571 \text{ m/s} \quad \Delta V_2 \approx 3540 \text{ m/s} \quad \Delta V_3 \approx 2162 \text{ m/s}$$

b) Perceba que, durante a transição, a nave percorre metade da primeira elipse e metade da segunda elipse, com isso em mente:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{\pi}{\sqrt{GM_\odot}}(a_1^{3/2} + a_2^{3/2}) \approx 18,9 \text{ anos}$$

c) Seja θ o ângulo entre Terra-Sol-Júpiter. A configuração deve ser tal que em 18,9 anos Júpiter se desloque esse ângulo.

$$\theta = \omega_J \Delta T = \Delta T \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_J^3}} \approx 212,5^\circ$$

pr 14. Considere uma espaçonave em uma órbita elíptica em torno de um exoplaneta distante. Para permitir a melhor observação de determinada parte do exoplaneta, deseja-se rotacionar essa órbita, mantendo seus parâmetros constantes. Qual é a direção do impulso necessário para executar essa rotação? Encontre o ângulo rotacionado pela órbita em função da anomalia verdadeira θ na qual a manobra é realizada.

Solução:

Para não alterar o momento angular, o impulso deve ser radial. Para não alterar os outros parâmetros orbitais, a anomalia verdadeira deve ser a mesma antes e depois. Ou seja, a órbita rotacionada deve "girar" um ângulo de 2θ , portanto a resposta é:

$$\text{radial ; } \eta = 2\theta$$

pr 15. (Vinhedo 2021) Após uma guerra nuclear e um experimento fracassado de geoengenharia no final do século XXII, o planeta Terra tornou-se um lugar inabitável. Uma nave inicialmente em órbita geoestacionária tem esperanças de escapar para Titã, uma próspera colônia humana. Para economizar combustível, os tripulantes da nave pretendem usar uma órbita de transferência Hohmann até Júpiter e depois um estilingue gravitacional no planeta, antes de prosseguirem para o satélite de Saturno.

a) Obtenha uma expressão para a variação no módulo da velocidade Δv causada

por um estilingue gravitacional em uma nave com velocidade inicial v_0 que faz um ângulo θ com a velocidade orbital de Júpiter, v_J .

- b) Para a missão ter sucesso, o impulso inicial deve ser dado no mesmo sentido da translação da Terra ou no sentido oposto? Explique o seu raciocínio.
- c) A nave tem combustível suficiente para um impulso de até 8×10^4 m/s na velocidade dela. A tripulação conseguirá escapar seguindo essa trajetória até os arredores de Titã? Justifique.
- d) Essa trajetória seria realmente o método mais econômico de ir a Titã? Explique brevemente.
- e) Suponha que o feito seja possível. Adotando um referencial heliocêntrico anti-horário com $\theta = 0$ para a Terra logo antes da nave iniciar a viagem, calcule a posição angular de Saturno θ_S quando a nave se aproxima de Saturno.

Dados:

- Semieixo maior de Júpiter, $a_J = 5,204$ UA.
- Semi eixo maior de Saturno, $a_S = 9,582$ UA
- Considere que todas as órbitas são coplanares com as dos planetas circulares, e que a nave precisa só chegar aos arredores de Saturno para ser resgatada.

solução:

- a) na situação do estilingue gravitacional temos:

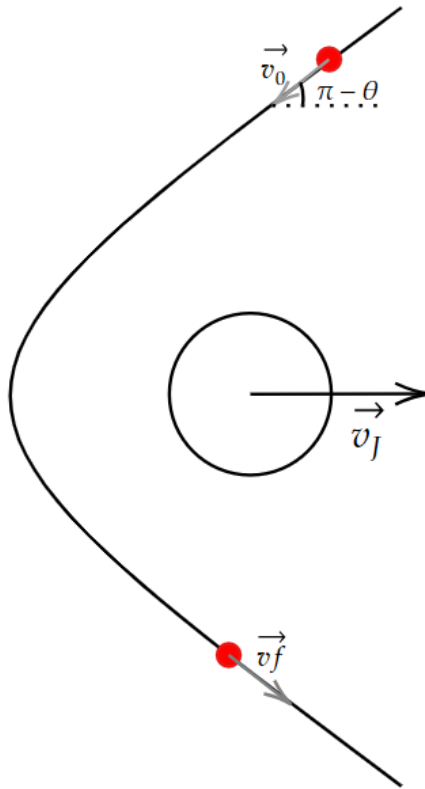


Figura 2.9: Estilingue gravitacional

Conservando momento no eixo y , podemos imediatamente dizer que

$$v_{0y} = v_{fy}$$

Agora, conservando momento no eixo x e energia temos:

$$mv_0^2 + m_J v_{J0}^2 = mv_f^2 + m_J v_{Jf}^2$$

$$-mv_{0x} + m_J v_{J0} = mv_{fx} + m_J v_{Jf}$$

Podemos escrever $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ fazendo a expressão da energia ficar assim:

$$m(v_{0x}^2 - v_{fx}^2) + m(v_{0y}^2 - v_{fy}^2) = m_J(v_{Jf}^2 - v_{J0}^2)$$

Como $v_{0y} = v_{fy}$, podemos simplificar:

$$m(v_{0x}^2 - v_{fx}^2) = m_J(v_{Jf}^2 - v_{J0}^2)$$

Agrupando os termos da expressão do momento:

$$-m(v_{0x} + v_{fx}) = m_J(v_{Jf} - v_{J0})$$

Podemos simplificar mais ainda, utilizando o fato de que $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ e dividindo uma equação pela outra:

$$-(v_{0x} - v_{fx}) = (v_{Jf} + v_{J0})$$

Como $m_J \gg m$ a velocidade de Júpiter é praticamente a mesma antes e depois. Também temos que $v_{0x} = -v_0 \cos \theta$, logo:

$$v_0 \cos \theta + v_{fx} = 2v_J \rightarrow v_{fx} = 2v_J - v_0 \cos \theta$$

Como os componentes em y são iguais:

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{(2v_J - v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta)^2}$$

$$v_f = \sqrt{4v_J^2 + v_0^2 - 4v_J v_0 \cos \theta}$$

Sendo assim:

$$\Delta v = v_f - v_0 = \sqrt{4v_J^2 + v_0^2 - 4v_J v_0 \cos \theta} - v_0$$

b) Perceba que para o estilingue gravitacional ser o mais eficiente possível, a nave deve chegar no sentido oposto ao de Júpiter. Como os planetas orbitam no mesmo sentido, o impulso deve ser dado no sentido oposto ao da Terra.

c) A pergunta do item tem duas partes. Primeiro, precisamos verificar se esse impulso é suficiente para a transferência até Júpiter. Segundo, se o estilingue gravitacional em Júpiter possibilitará de fato a ida a Titã e Saturno.

Para minimizar o impulso, usaremos o momento em que a velocidade da órbita geostacionária está exatamente oposta à velocidade de translação terrestre. Além disso, o semieixo maior da órbita de transferência é $a = (a_{\oplus} + a_J)/2 = 3,102 \text{ UA}$.

Pela terceira lei de Kepler, a órbita inicial geostacionária tem semieixo maior:

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{P^2 G M_{\oplus}}{4\pi^2}} = 4,22 \times 10^7 \text{ m}$$

A velocidade dessa órbita é:

$$u_0 = \frac{2\pi a_0}{P} = 3,07 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Após escapar da esfera de influência da Terra, a nave deve atingir velocidade u' , dada pela equação vis-viva:

$$u' = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_{\oplus}} - \frac{1}{a} \right)} = 3,86 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Podemos conservar a energia do sistema nave-Terra entre logo depois do impulso e quando a nave escapa a Terra, onde a energia potencial gravitacional é zero:

$$\frac{m(u' + v_{\oplus})^2}{2} = \frac{mu^2}{2} = \frac{GM_{\oplus}m}{a_0}$$

onde representamos $v_{\oplus} = \sqrt{GM_{\odot}/a_{\oplus}} = 2,98 \times 10^4 \text{ m/s}$ como a velocidade orbital da Terra e u como a velocidade logo após o impulso.

Substituindo valores, obtemos $u = 6,85 \times 10^4 \text{ m/s}$. A variação de velocidade é

$$\Delta u = u - u_0 = 6,54 \times 10^4 \text{ m/s} \approx 8 \times 10^4 \text{ m/s}$$

. Assim, é possível entrar na transferência para Júpiter.

Agora, vamos verificar a segunda parte. Na equação do item a, nessa situação, $\theta = 180^\circ$ e $v = v_0 + 2v_{\oplus}$. Podemos calcular v_0 pela equação vis-viva:

$$v_0 = \sqrt{GM_{\odot} \left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a} \right)} = 7,41 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Também, $v_J = \sqrt{GM_{\odot}/a_J} = 1,31 \times 10^4 \text{ m/s}$. Logo, $v = 3,35 \times 10^4 \text{ m/s}$.

Verificando o sinal da energia relacionada a uma órbita com essa velocidade:

$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_{\odot}}{a_J} > 0$$

Podemos então concluir que a órbita é hiperbólica, e portanto que passará pela órbita de Saturno. Assim, é possível escapar até Titã com essa trajetória.

d) Precisamos fazer uma variação de velocidade contrária à velocidade orbital da Terra, como calculado no item anterior. Desperdiçamos uma parte considerável do impulso

compensando a velocidade terrestre, e seria mais econômico aproveitar essa velocidade inicial para fazer uma transferência de Hohmann direto para Saturno. Logo, a trajetória não é a mais eficiente.

e) Após o estilingue gravitacional, a nave seguirá em órbita hiperbólica até encontrar Saturno. Encontrando a' por energia:

$$E = \frac{GM_{\odot}m}{2a'} = \frac{mv^2}{2} - \frac{2M_{\odot}m}{a_J}$$

Assim, $a' = 1,69 \times 10^{11}$ m. Chamaremos de v_{∞} a velocidade da órbita num ponto arbitrariamente longe do Sol. Podemos escrever as equações de conservação de momento angular e energia:

$$b'v_{\infty} = a_J v$$

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{a_J}$$

com $b' = a'\sqrt{(e'^2 - 1)}$ onde e' é a excentricidade. Resolvendo o sistema, encontramos $e' = 5,61$.

A nave atingirá Saturno quando a distância dela até o Sol for $r = a_S$. Assim, usando a equação polar da hipérbole:

$$r = \frac{a'(e'^2 - 1)}{1 + e' \cos \theta'}$$

encontramos $\theta' = 62,5^\circ$. Descartamos $\theta' = 360^\circ - 62,5^\circ$, pois esse ponto é anterior à passagem por Júpiter. O ângulo pedido é $\theta_S = 180^\circ + \theta'$. Portanto, $\theta_S = 243^\circ$.

pr 16. (Vinhedo 2023) A fabricante estadunidense de foguetes SpaceX começou a colocar satélites Starlink em órbita polar em setembro de 2021, com seu primeiro lançamento do tipo na Base da Força Aérea de Vandenberg, Califórnia. Considere um satélite Starlink que se move em uma órbita polar geocêntrica de semieixo maior $a = 15.400$ km, excentricidade $e = 0,55$ e argumento do periastro $\omega = 270^\circ$. Imagine um observador no Polo Norte terrestre. O satélite emite um sinal com frequência de 2,4 GHz. Em algum momento, o satélite é observado no horizonte. Encontre a distância do observador ao satélite e a mudança na frequência do sinal captado.

Solução: Olhe o esquema da situação:

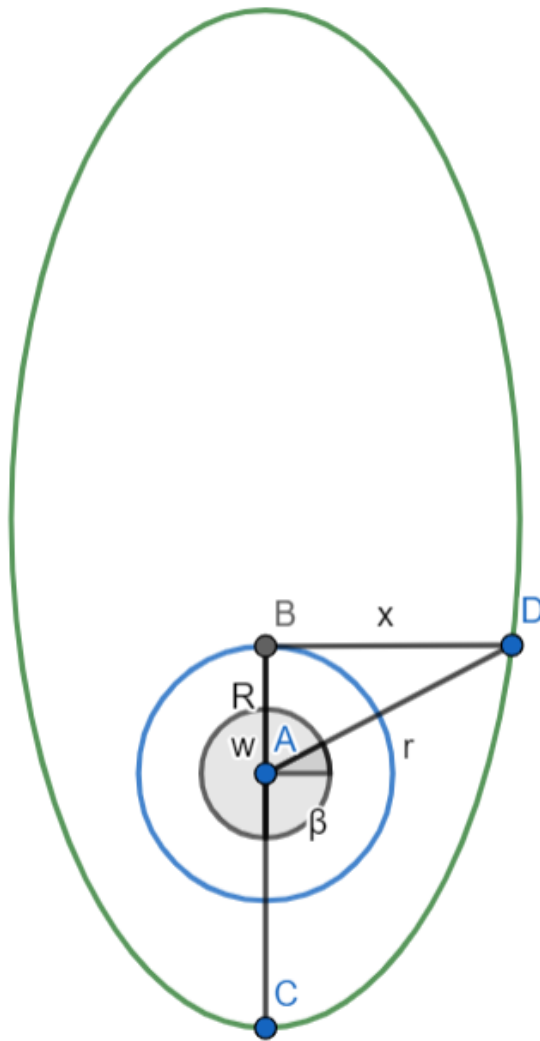


Figura 2.10: Esquema da situação

a) Seja $\theta = \angle BAD = \pi - \beta$, temos que $R/\cos \theta = r$ e pela fórmula polar da elipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \beta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta} = \frac{R}{\cos \theta}$$

Resolvendo para $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{R}{a(1 - e^2) + eR} = 0,447 \rightarrow \theta \approx 63,43^\circ$$

Perceba também que $\tan \theta = x/R$, logo:

$$x = R \tan \theta = 1,28 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) Podemos escrever a energia da órbita como sendo:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Decompondo $v^2 = v_\theta^2 + v_r^2$, temos:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv_\theta^2}{2} + \frac{mv_r^2}{2}$$

Podemos expressar v_θ , em função do momento angular:

$$L = mv_\theta r \rightarrow v_\theta = \frac{L}{mr}$$

Substituindo na fórmula:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mv_r^2}{2}$$

Sabemos também que $E = -GMm/2a$, $r = R/\cos\theta$ e que $L = m\sqrt{GMa(1-e^2)}$, com isso, podemos resolver para v_r :

$$v_r^2 = GM \left(\frac{2\cos\theta}{R} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)\cos^2\theta}{R^2} \right)$$

$$v_r \approx 4,73 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Utilizando a fórmula do Efeito Doppler:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{f_0}{f} - 1 = \frac{v}{c}$$

Resolvendo para f :

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}} \rightarrow \Delta f = f - f_0 = f_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \right)$$

$$\boxed{\Delta f = 3,78 \cdot 10^4 \text{ Hz}}$$

pr 17. (Vinhedo 2021) Um satélite em uma órbita próxima à superfície do Sol coletou vários dados do cometa C/2019 Q4 quando este estava próximo de seu periélio. A primeira medição foi feita no dia 30 de novembro de 2019 e, em cada uma delas, o satélite

calculou a longitude, l , e a latitude eclíptica, b , do corpo celeste e determinou também as variações nessas coordenadas durante um período de 16 horas (as coordenadas foram calculadas para o sistema heliocêntrico).

l	b	Δl	Δb
49°57'16"	22°34'51"	17'0.10"	11'25.77"
74°59'10"	35°25'33"	43'43.40"	15'30.48"
144°28'14"	37°4'9"	58'57.91"	-18'12.92"
165°58'36"	27°50'10"	36'53.57"	-20'56.16"
199°18'1"	2°35'50"	6'54.68"	-6'9.26"
211°14'9"	-7°56'38"	1'48.30"	-1'33.70"

Tabela 2.1: Tabela de coordenadas e variações

- Calcule a inclinação da órbita do cometa em relação à eclíptica e a longitude do nodo ascendente.
- Encontre excentricidade, o semieixo maior e o argumento do periélio da órbita.
- Faça um gráfico polar das posições do cometa considerando o Sol como o centro do plano cartesiano e o periélio localizado na região negativa das abscissas. Além disso, trace a curva que melhor representa a órbita do objeto.
- Estime em que mês, aproximadamente, o cometa não será mais visível pelo satélite. Dados: o satélite realizou as medidas utilizando um telescópio de abertura $D = 6\text{ m}$ e considera o cometa como uma esfera de raio $R = 13,5\text{ km}$ e albedo geométrico $p = 0.1$. Além disso, ignore quaisquer efeitos físicos não comentados no enunciado.

Solução:

- A partir da representação abaixo, podemos utilizar as coordenadas do cometa nas duas primeiras medições para calcular os ângulos requisitados:

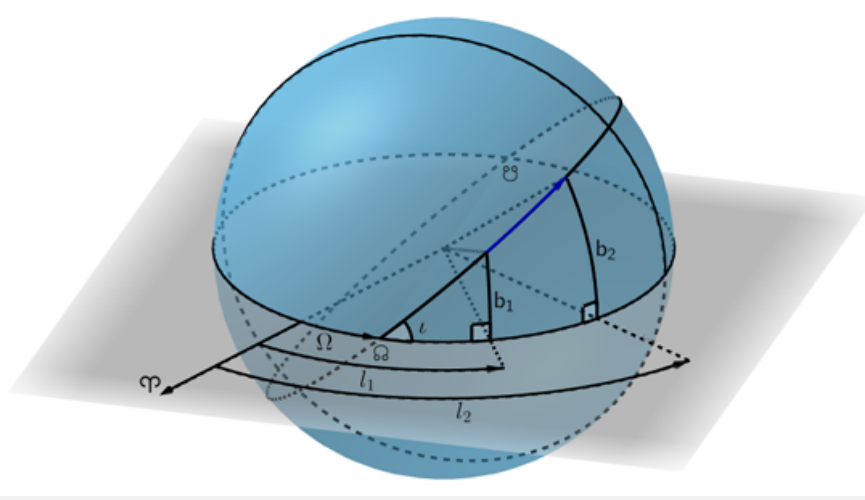


Figura 2.11: i : inclinação; Ω : longitude do nodo ascendente; Ω' : Nodo ascendente; Ω'' : Nodo descendente.

Utilizando a Lei dos quatro-elementos nos dois triângulos:

$$\cot b \sin(l - \Omega) = \cos(l - \Omega) \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos i$$

$$\rightarrow \tan i = \frac{\tan b_1}{\sin(l_1 - \Omega)} = \frac{\tan b_2}{\sin(l_2 - \Omega)}$$

$$\Omega = l_1 - \sin^{-1} \left(\sin(l_2 - \Omega) \frac{\tan b_1}{\tan b_2} \right)$$

Com iteração obtemos,

$$\boxed{\Omega \approx 22^\circ 12' 38''}$$

Substituindo na fórmula encontrada anteriormente, obtemos,

$$\boxed{i \approx 41^\circ 46' 32''}$$

b) Inicialmente, podemos encontrar a distância angular percorrida pelo cometa entre o nodo ascendente e a medição (n), θ , e o ângulo percorrido durante cada medição, $\Delta\theta$, reespectivamente, pelas fórmulas:

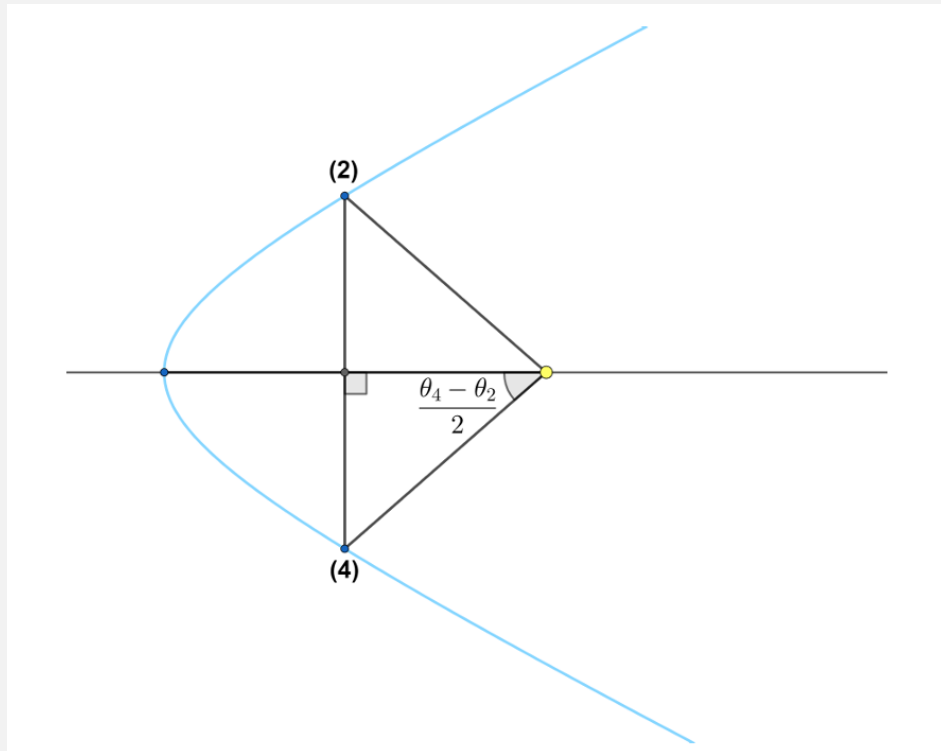
$$\cos \theta = \cos b \cos(l - \Omega)$$

$$\cos \Delta\theta = \sin b \sin(b + \Delta b) + \cos b \cos(b + \Delta b) \cos \Delta l$$

Observação: Como $\theta_6 > 180^\circ$, a função arcosseno, devido ao seu domínio, vai indicar o valor $360^\circ - \theta_6$ e não o valor de θ_6 .

Medição	θ	$\Delta\theta$
1	$35^\circ 11' 44''$	$19' 24.57''$
2	$60^\circ 27' 57''$	$38' 48.29''$
3	$115^\circ 12' 26''$	$50' 32.35''$
4	$135^\circ 30' 7''$	$38' 48.46''$
5	$176^\circ 6' 0''$	$9' 14.95''$
6	$192^\circ 0' 6''$	$2' 22.42''$

Perceba que, como os tempos de medição são iguais e pequenos, a velocidade angular do cometa nas medições 2 e 4 são quase iguais e, conseqüentemente, essas posições são simétricas em relação a reta que liga o periélio ao Sol como pode ser verificado no desenho abaixo:



Portanto, podemos calcular o argumento do periélio, ω , por:

$$\omega = \theta_2 + \frac{\theta_4 - \theta_2}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_4}{2}$$

$$\omega \approx 97^\circ 59' 2''$$

Consequentemente, a anomalia verdadeira do cometa na posição (n) pode ser calculada pela expressão:

$$\nu = \theta - \omega$$

Refazendo a tabela:

Medição	ν	$\Delta\theta$
1	$-62^\circ 47' 17''$	$19' 24.57''$
2	$-37^\circ 31' 5''$	$38' 48.29''$
3	$17^\circ 13' 25''$	$50' 32.35''$
4	$37^\circ 31' 6''$	$38' 48.46''$
5	$78^\circ 6' 59''$	$9' 14.95''$
6	$94^\circ 2' 23''$	$2' 22.42''$

Conservando momento angular entre as posições (1) e (2), temos:

$$r_1^2 \dot{\theta}_1 = r_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\left(\frac{p}{1 + e \cos \nu_1} \right)^2 \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = \left(\frac{p}{1 + e \cos \nu_2} \right)^2 \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t}$$

Resolvendo para e ,

$$e = \frac{\sqrt{\Delta\theta_2} - \sqrt{\Delta\theta_1}}{\sqrt{\Delta\theta_1} \cos \nu_2 - \sqrt{\Delta\theta_2} \cos \nu_1}$$

$$e \approx 2,823$$

Sabendo que a órbita é hiperbólica, podemos usar a conservação do momento angular entre a posição (1) e o periélio,

$$r_1^2 \dot{\theta}_1 = r_p v_p$$

Pela equação vis-viva,

$$v_p = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} + \frac{1}{a} \right)}$$

$$\left(\frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu_1} \right)^2 \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t} = a(e - 1) \sqrt{\mu \left(\frac{2}{a(e - 1)} + \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$$

Resolvendo para a ,

$$a = \left(\frac{\mu(1 + e \cos \nu_1)^4}{(e^2 - 1)^3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta \theta_1} \right)^2 \right)^{1/3}$$

$$a \approx 0,6949 \text{ UA}$$

c) Com essas informações, podemos encontrar a distância do cometa em cada uma das medições por:

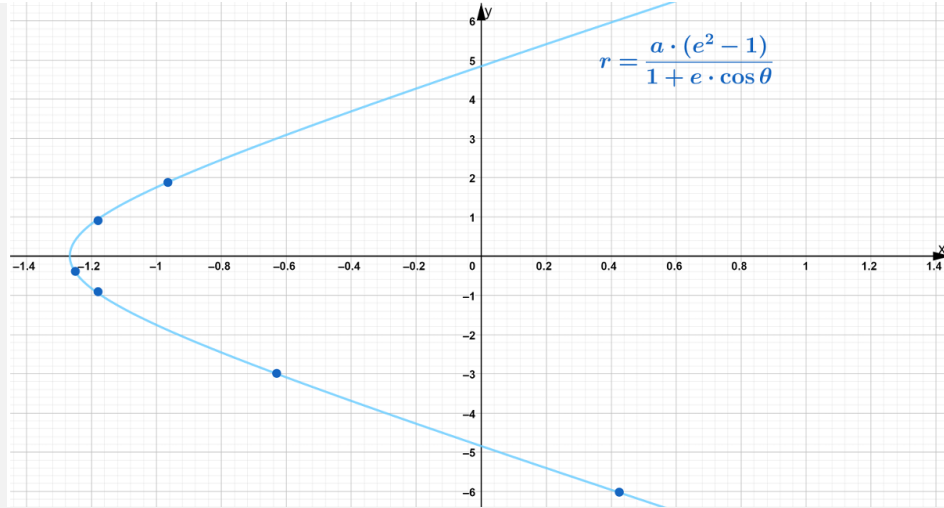
$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu}$$

E as coordenadas do plano cartesiano:

$$x = r \cos(180^\circ - \nu) \quad , \quad y = r \sin(180^\circ - \nu)$$

Medição	ν	r (U.A.)	x (U.A.)	y (U.A.)
1	$-62^\circ 47' 17''$	2,11	-0,965	1,88
2	$-37^\circ 31' 5''$	1,49	-1,18	0,907
3	$17^\circ 13' 25''$	1,31	-1,25	-0,388
4	$37^\circ 31' 6''$	1,49	-1,18	-0,907
5	$78^\circ 6' 59''$	3,06	-0,630	-2,99
6	$94^\circ 2' 23''$	6,03	0,425	-6,02

Plotando esses pontos no gráfico, obtemos:



d) Utilizando a fórmula da magnitude limite,

$$m_t = 2,1 + 5 \log D \approx 21,0$$

Agora, precisamos encontrar a distância máxima em que o cometa está visível ($m_c = m_t$):

$$m_t - m_{\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L_{\odot} \pi R^2}{4\pi r^2} \frac{p}{\pi r^2} \frac{4\pi (1 \text{ UA})^2}{L_{\odot}} \right)$$

$$r = (pR^2(1 \text{ UA})^2)^{1/4} \cdot 10^{0,1(m_t - m_{\odot})}$$

$$r \approx 9,95 \text{ UA}$$

Pela equação polar,

$$\nu = \cos^{-1} \left(\frac{a(e^2 - 1)}{er} - \frac{1}{e} \right)$$

$$\nu \approx 100^{\circ}28'22''$$

Isso corresponde a valores de $x_7 = 1,81 \text{ UA}$ e $y_7 = -9,78 \text{ UA}$

Pela segunda Lei de Kepler, sabemos que a velocidade areolar é calculada por,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\sqrt{\mu a(e^2 - 1)}}{2}$$

Estimando a área percorrida pelo gráfico,

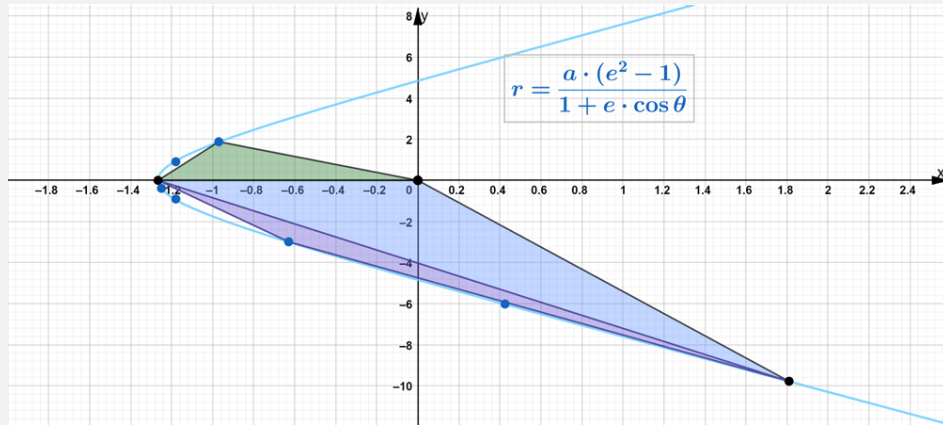


Figura 2.12: A_1 : área verde; A_2 : área azul; A_3 : área roxa

$$A_T \approx A_1 + A_2 + A_3 = \frac{y_1 a(e-1)}{2} + \frac{|y_7| a(e-1)}{2} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -a(e-1) & 0 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_7 & y_7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_T \approx 8,87 \text{ UA}^2$$

Substituindo na fórmula,

$$\Delta t = \frac{2A_T}{\sqrt{\mu a(e^2 - 1)}}$$

$$\Delta t \approx 469 \text{ dias}$$

Utilizando essa aproximação, o cometa não será visível a partir do dia 11 de janeiro de 2021. Porém, como a área estimada é inferior a área real, é provável que isto ocorra, na verdade, no início do mês seguinte. Portanto o cometa não será mais visível pelo satélite a partir de Fevereiro de 2021

Extra: A área real percorrida pelo cometa é de $9,33 \text{ UA}^2$, o que resultaria numa data limite de 4 de fevereiro.

pr 18. Encontre uma expressão para o momento angular da órbita relativa em termos de M , μ e a . Prove que ela é igual ao momento angular que encontraríamos para o binário original tomando o CM como origem.

Solução: Um sistema binário é equivalente a uma massa $M = m_1 + m_2$ parada, sendo orbitado por uma massa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Com isso, podemos facilmente equacionar:

$$L = \mu a v = \mu a \sqrt{\frac{GM}{a}} = \boxed{\mu \sqrt{GMa}}$$

pr 19. Observamos da Terra um sistema binário com órbita edge-on. Analisando o espectro de uma das estrelas, se observa que a velocidade radial máxima da estrela 1 se dá no semilatus rectum de sua órbita. Qual é a orientação da órbita? Encontre a soma dos semieixos maiores do binário $a = a_1 + a_2$ em termos da massa m_2 , do período orbital P , da velocidade radial máxima de 1, $v_{r1,max}$, e da excentricidade e .

Solução: Inicialmente, podemos perceber que para essa configuração ser verdadeira e a velocidade máxima ser dada no semi-latus-rectum, a órbita deve estar alinhada com a Terra, isso é, o semi-eixo maior, formar uma linha reta com o olhar do observador. A velocidade de uma estrela em um sistema binário é dada por:

$$v_a = \frac{2\pi a_1}{P} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Onde θ é a anomalia é a anomalia verdadeira.

Já a velocidade radial é a sua projeção na linha de visão (coincidindo com o semi eixo maior) dada por:

$$v_r = v \sin \theta \sin i$$

Como nesse caso, $\theta = \pi/2$ e $i = \pi/2$ temos:

$$v_{r1,max} = \frac{2\pi a_1}{P\sqrt{1 - e^2}}$$

Pelo teorema do centro de massa, $m_1 a_1 = m_2 a_2$, logo:

$$v_{r1,max} = \frac{2\pi m_2 a}{P(m_1 + m_2)\sqrt{1 - e^2}}$$

Da Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2} \rightarrow m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

Substituindo na formula de $v_{r1,max}$:

$$v_{r1,max} = \frac{GPm_2}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}$$

Isolando a , temos:

$$a = \sqrt{\frac{GPm_2}{2\pi v_{r1,max} \sqrt{1-e^2}}}$$

pr 20. Obtenha uma expressão para a energia potencial associada com a força de maré em função do ângulo θ definido anteriormente.

Solução: A forma da força é dada por:

$$\mathbf{F}_M = \frac{GM_L m r}{R^3} (2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})$$

Temos que $|\mathbf{F}_M|^2 \equiv F_M^2 = \mathbf{F}_x^2 + \mathbf{F}_y^2$, logo:

$$F_M^2 = \left(\frac{GM_L m r}{R^3} \right)^2 ((4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) = \left(\frac{GM_L m r}{R^3} \right)^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$F_M = \frac{GM_L m r}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Por definição:

$$U = - \int F_M dr = - \frac{GM_L m r^2}{2R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

pr 21. Encontre uma expressão para o limite de Roche quando o corpo secundário rotaciona em torno de um eixo perpendicular à linha que liga P_1 e P_2 com velocidade angular ω . Ainda, obtenha uma expressão para o caso em que a rotação do corpo secundário está sincronizada com a órbita.

Solução: Equacionando e adicionando as acelerações centrípetas:

$$a_1 = a_2$$

$$a_c + a_{G_1} - a_{G_2} = a'_{G_1} + a_{G_2} - a_c$$

$$2a_c + a_{G_1} = 2a_{G_2} + a'_{G_1}$$

Aqui temos $a_{G_1} = GM_1/(d - R_2)^2$ e $a'_{G_1} = GM_1/(d + R)^2$, temos então:

$$2\omega^2 R_2 + \frac{GM_1}{(d - R_2)^2} = \frac{2GM_2}{R_2^2} + \frac{GM_1}{(d + R_2)^2}$$

Utilizando a aproximação binomial, $(1 + x)^n = 1 + nx$, pois $d \gg R_2$, com isso temos:

$$2\omega^2 R_2 + \frac{GM_1}{d^2} \left(1 - \frac{R_2}{d}\right)^{-2} = \frac{2GM_2}{R_2^2} + \frac{GM_1}{d^2} \left(1 + \frac{R_2}{d}\right)^{-2}$$

$$2\omega^2 R_2 + \frac{4GM_1}{d^3} R_2 = \frac{2GM_2}{R_2^2}$$

Resolvendo para d :

$$\frac{4GM_1}{d^3} = \frac{2GM_2}{R_2^3} - 2\omega^2$$

$$\frac{4GM_1}{d^3} = \frac{2GM_2 - 2\omega^2 R_2^3}{R_2^3}$$

$$d^3 = \frac{4GM_1 R_2^3}{2GM_2 - 2\omega^2 R_2^3}$$

Dividindo em cima e embaixo por $2GM_2$ e utilizando o fato que $M_1/M_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$, chegamos em:

$$d = R_1 \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2 - \frac{3\omega^2}{4\pi G}} \right)^{1/3}$$

Se a rotação está sincronizada com a órbita, teremos:

$$\omega_{rot} = \omega_{trans}$$

Pela terceira lei de Kepler:

$$\omega^2 = \frac{GM_1}{d^3} = \frac{4\pi G \rho_1 R_1^3}{3d^3}$$

Substituindo na fórmula:

$$d = R_1 \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2 - \frac{\rho_1 R_1^3}{d^3}} \right)^{1/3}$$

Resolvendo para d novamente:

$$d^3 = R_1^3 \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2 - \frac{\rho_1 R_1^3}{d^3}} \right)$$

$$d^3 \rho_2 - \rho_1 R_1^3 = 2\rho_1 R_1^3$$

$$d = R_1 \left(\frac{3\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3}$$

pr 22. Numa ideia similar ao limite de Roche, encontre a velocidade angular de rotação que uma estrela deve ter para que ela se mantenha em equilíbrio considerando somente a ação de sua própria gravidade.

Solução: Nesse caso, simplesmente podemos igualar a aceleração da gravidade na superfície com a aceleração centrípeta:

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}}$$

pr 23. Suponha que a Terra possua um raio equatorial R_e e que ela rotacione com velocidade angular ω . Encontre uma expressão para seu raio polar, considerando apenas sua própria gravidade e a força centrífuga advinda de sua rotação.

Solução: No equilíbrio hidrostático a estrela é equipotencial, portanto:

$$\frac{GM}{R_p} = \frac{GM}{R_e} + \frac{1}{2}\omega^2 R_e^2$$

Resolvendo para R_p obtemos:

$$\boxed{R_p = \frac{R_e}{1 + \frac{\omega^2 R_e^3}{GM}}}$$

pr 24. Utilizando o mesmo procedimento aplicado anteriormente, encontre a posição do ponto Lagrangiano L_2 . Assim, encontre o raio da esfera de Hill, definido como a distância dentro da qual o corpo secundário pode reter satélites enquanto orbita o corpo central.

Solução: No L_2 temos o seguinte esquema:

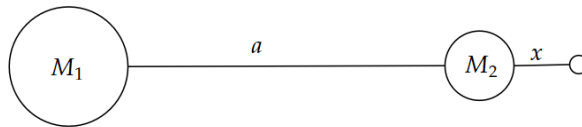


Figura 2.13: Esquema do L_2

Primeiramente, note que a aceleração centrípeta do corpo no ponto L_2 deve ser a mesma do corpo de massa M_2 , que é dada por:

$$\omega^2 = \frac{GM_1}{a^3}$$

Equacionando, temos:

$$\frac{GM_1}{(a+x)^2} + \frac{GM_2}{x^2} = \omega^2(a+x) = \frac{GM_1}{a^3}(a+x)$$

Como $a \gg x$, podemos usar a aproximação binomial $(1+m)^n = 1+nm$, com $m = x/a$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{a^2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \frac{M_2}{x^2} &= \frac{M_1}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \\ \frac{M_2}{x^2} &= \frac{3M_1}{a^3}x \rightarrow \boxed{x = a \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{1/3}} \end{aligned}$$

pr 25. Encontre a o quão distante o ponto Lagrangiano L_3 (que fica do lado oposto da Terra em relação ao Sol) está da órbita terrestre, que é um círculo de raio a .

Solução: No L_3 , temos o seguinte esquemas:

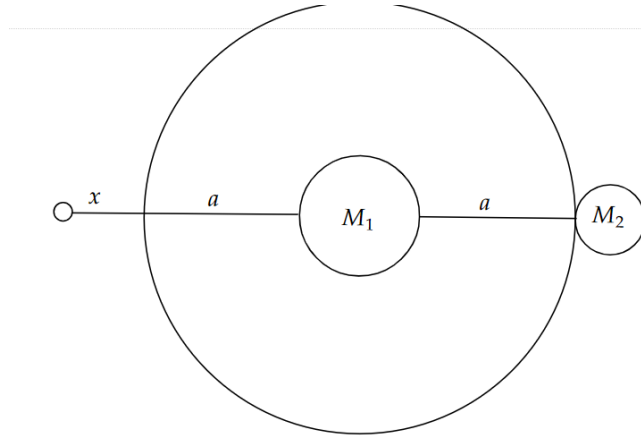


Figura 2.14: Esquema ponto L_3

Equacionando as acelerações e igualando a aceleração centrípeta temos:

$$\frac{GM}{(a+x)^2} + \frac{Gm}{(2a+x)^2} = \omega^2(a+x)$$

A velocidade angular, deve ser a mesma de translação da Terra e já utilizando as aproximações binomiais $(1+x)^n = 1 + nx$ temos:

$$\frac{GM}{a^2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \frac{Gm}{4a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Simplificando, segue-se

$$-\frac{2xM}{a^3} + \frac{m}{4a^2} - \frac{xm}{4a^3} = \frac{xM}{a^3}$$

$$3xM - \frac{am}{4} + \frac{xm}{4} = 0$$

$$x \left(3M + \frac{m}{4}\right) = \frac{am}{4}$$

$$3Mx \left(1 + \frac{m}{12M}\right) = \frac{am}{4}$$

Usando novamente a aproximação binomial e resolvendo para x ,

$$x = \frac{am}{12M} \left(1 - \frac{m}{12M}\right)$$

Usando o fato que $m \ll M$, temos,

$$x = \frac{m}{12M}a$$

pr 26. Prove que os pontos L_4 e L_5 formam triângulos equiláteros com os corpos primário e secundário, com lado igual à distância entre esses dois corpos.

Solução: Considerando um eixo cartesiano com o centro de massa na origem, teremos algo assim:

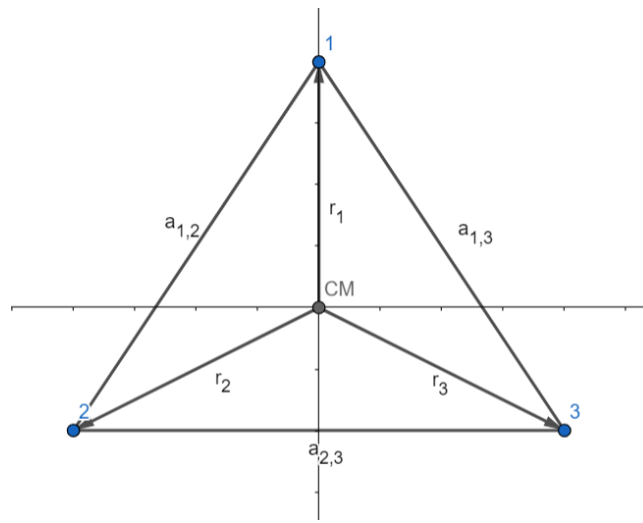


Figura 2.15: Pontos L_4 e L_5

Temos as seguintes considerações sobre esse sistema, primeiro, note que todos os corpos oscilam em torno do centro de massa com a mesma frequência angular ω , segundo, pelo teorema do centro de massa:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0$$

Nota também, que temos:

$$a_{i,j} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Equacionando para o corpo de massa m_1 , temos:

$$\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} = m_1\omega^2\vec{r}_1$$

$$\frac{Gm_2}{a_{1,2}^3}|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| + \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3}|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \omega^2 \vec{r}_1$$

$$\left(\frac{Gm_2}{a_{1,2}^3} + \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3} - \omega^2 \right) \vec{r}_1 = \frac{Gm_2}{a_{1,2}^3} \vec{r}_2 + \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3} \vec{r}_3$$

De modo similar, para os corpos de massa m_2 e m_3 chegaremos em:

$$\left(\frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} + \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3} - \omega^2 \right) \vec{r}_2 = \frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} \vec{r}_1 + \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3} \vec{r}_3$$

$$\left(\frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} + \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3} - \omega^2 \right) \vec{r}_3 = \frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} \vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3} \vec{r}_2$$

Reorganizando as equações, temos:

$$\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{a_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3} \omega^2 \right) \vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{a_{1,2}^3} \vec{r}_2 + \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3} \vec{r}_3 = 0$$

$$\frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} \vec{r}_1 + \left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3} \right) \vec{r}_2 + \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3} \vec{r}_3 = 0$$

$$\frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} \vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3} \vec{r}_2 + \left(\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} - \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3} \right) \vec{r}_3 = 0$$

Note que isso se assemelha muito ao teorema do centro de massa citado anteriormente, logo, o termo antes dos vetores devem ser proporcionais as respectivas massas. Com isso, chegamos em:

$$\frac{\omega^2 - \frac{Gm_2}{a_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{a_{1,3}^3} \omega^2}{m_1} = \frac{G}{a_{1,2}^3} = \frac{G}{a_{1,3}^3}$$

$$\frac{G}{a_{1,2}^3} = \frac{\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3}}{m_2} = \frac{G}{a_{2,3}^3}$$

$$\frac{G}{a_{1,3}^3} = \frac{G}{a_{2,3}^3} = \frac{\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} - \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3}}{m_3}$$

Analisando as equações a seguir, podemos concluir que $\boxed{a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3}}$, logo os corpos formam um triângulo equilátero. Podemos também resolver para ω chegando em:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}}$$

pr 27. (NAO 2022-adaptada) Para fazer o pôster da IOAA, o time brasileiro pesquisa sobre o recentemente lançado Telescópio Espacial James Webb (JWST), o telescópio de próxima geração desenvolvido como o sucessor do Hubble. Sendo o maior telescópio já construído, o JWST usa sua grande área coletora para observar o espectro infravermelho. Ele orbita ao redor do ponto Lagrangiano L_2 do sistema Terra-Sol. No problema, sejam M e m as massas do Sol e da Terra, respectivamente, com $M \gg m$. Adicionalmente, considere os raios do Sol e da Terra como sendo $R_\odot$ e $R_\oplus$, e a Terra orbita o Sol num círculo de raio a .

- a) A órbita do JWST foi projetada para revolver em torno de L_2 em um círculo grande o suficiente para evitar a sombra da Terra. Qual é o benefício de i) estar em um ponto Lagrangiano e ii) evitar a sombra da Terra?
- b) No referencial girante no qual a Terra e o Sol são estacionários, o JWST orbita L_2 no plano perpendicular à linha Terra-Sol que passa por L_2 . Se o JWST orbita em um círculo de raio r em torno de L_2 nesse referencial, qual é o valor mínimo de r que evita a sombra da Terra a todos os instantes? Expresse sua resposta em termos das variáveis definidas e numericamente, em km.
- c) Considere um cenário em que o JWST está estacionário no referencial girante citado anteriormente e adquire um pequeno deslocamento $\delta\vec{r} = \delta x\hat{i} + \delta y\hat{j}$ relativo a L_2 , onde $\hat{i}$ é o vetor unitário ao longo da linha Terra-Sol a partir do Sol e $\hat{j}$ é um vetor unitário perpendicular a $\hat{i}$. Ambos $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são estacionários no referencial girante. Em primeira ordem (i.e. assumindo $|\delta\vec{r}| \ll x$, qual é a aceleração do JWST no referencial girante?
- d) A presença da força de Coriolis no referencial girante desestabiliza a órbita em torno de L_1 , L_2 e L_3 enquanto estabiliza órbitas em torno de L_4 e L_5 . Desconsiderando a força de Coriolis somente para esta parte, as órbitas em torno de L_2 são estáveis quando não há força de Coriolis? O resultado é generalizável? Em outras palavras, o que pode ser dito sobre a estabilidade de órbitas em torno de um ponto estacionário arbitrário onde não há massas interiores à órbita e nenhuma força fictícia envolvida?
- e) Suponha que o JWST orbita no círculo descrito na parte b) com uma velocidade constante e um raio orbital de 500.000 km. Além disso, suponha que a propulsão a jato do JWST está programada para agir apenas contra a força de Coriolis; o resto do movimento do JWST é devido à dinâmica gravitacional natural em L_2 . Usando a suposição que a expressão em primeira ordem obtida em d) ainda se aplica, se o JWST possui uma massa de 6500 kg, qual é a magnitude média da força em um longo período de tempo? As médias a seguir (calculadas de 0 até 2π) podem ser úteis:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}, \quad |\sin^3 x| = \frac{4}{3\pi}$$

Você pode utilizar que a força de Coriolis é dada por:

$$\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Solução: a) i - o benefício de estar em um ponto Lagrangiano é rotacionar em torno do sol com a mesma velocidade angular que a Terra gira em torno do Sol. ii - A vantagem de evitar a sombra da Terra é fazer com que a mesma não atrapalhe nas suas observações.

b) Olhando a situação "de lado"teremos algo da seguinte forma:

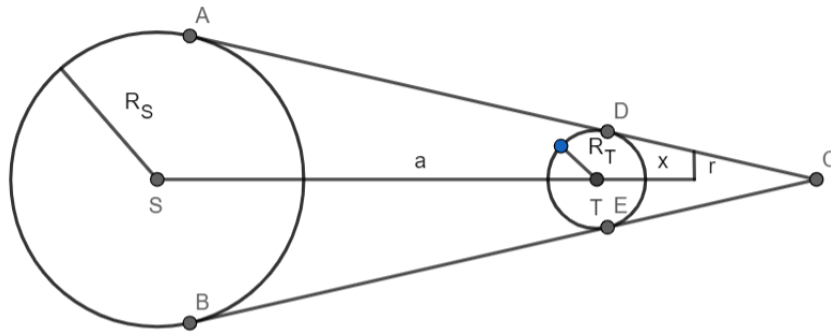


Figura 2.16: Esquema da Sombra

Onde a é a distância entre o Sol e a Terra e x a distância entre a Terra e o ponto L_2 . Denotando por b a distância entre o centro da Terra até o ponto C , por semelhança de triângulos:

$$\frac{AS}{SD} = \frac{DT}{TC} \rightarrow \frac{R_S}{a+b} = \frac{R_T}{b}$$

Resolvendo para b , obtemos:

$$b = \frac{R_T}{R_S - R_T}a$$

Agora, vamos definir θ como o ângulo $\angle SCA$, note que:

$$\sin \theta = \frac{R_T}{b}, \quad \tan \theta = \frac{r}{x-b}$$

Da trigonometria:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$$

Substituindo:

$$\frac{r}{x - b} = \frac{R_T/b}{\sqrt{1 - (R_T/b)^2}}$$

Substituindo b e resolvendo para r , chegamos em:

$$r = \frac{(a + x)R_T + xR_S}{\sqrt{a^2 - (R_S + R_T)^2}}$$

Onde x é a distância ao ponto L_2 , calculada anteriormente no exercício 24, tendo valor de:

$$x = a \left(\frac{M_T}{3M_S} \right)^{1/3} \approx 1,50 \cdot 10^9 m$$

Substituindo os valores numericamente na expressão de r obtemos:

$$r = 1,34 \cdot 10^7 \text{ m}$$

c) Agora, temos a seguinte situação:

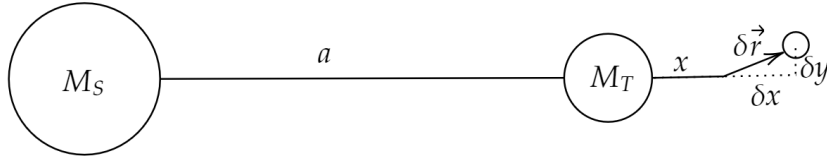


Figura 2.17: Esquema da órbita do telescópio

A mudança da aceleração da gravidade no ponto L_2 , causada por uma massa M a uma distância R pode ser calculada por:

$$\delta \mathbf{g} = -\frac{GM}{((R + \delta x)^2 + \delta y^2)^{3/2}}((R + x)\hat{\mathbf{i}} + \delta y\hat{\mathbf{j}}) + \frac{GM}{R}\hat{\mathbf{i}}$$

Ignorando os termos de segunda ordem:

$$\delta \mathbf{g} \approx -\left(\frac{GM}{(R + \delta x)^3}(R + x) - \frac{GM}{R^2} \right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{GM}{R^3}\delta y\hat{\mathbf{j}}$$

A aproximação binomial pode ser usada novamente da seguinte maneira:

$$\delta \mathbf{g} \approx \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2x}{R} - 1\right) \hat{i} - \frac{GM}{R^3} \delta y \hat{j} = \frac{GM}{R^3} (2\delta x \hat{i} - \delta y \hat{j})$$

Você pode notar que essa expressão é semelhante à das forças de maré, porque o que fizemos aqui é exatamente o mesmo! Agora, para encontrar a aceleração do JWST, simplesmente precisamos adicionar a δg da Terra e do Sol, depois adicionar δa da força centrífuga no topo (a força de Coriolis é zero, pois o JWST está estacionário). A δa devido à força centrífuga é simplesmente:

$$\delta \mathbf{a} = \delta(\omega^2 r) = \omega^2 \delta r = \frac{GM}{R^3} (\delta x \hat{i} + \delta y \hat{j})$$

Portanto, a aceleração do JWST é

$$\mathbf{a} = \left(\frac{GM_S}{(a+x)^3} + \frac{GM_T}{x^3} \right) (2\delta x \hat{i} - \delta y \hat{j}) + \frac{GM_S}{a^3} (\delta x \hat{i} + \delta y \hat{j})$$

Substituindo $x = R(m/3M)^{1/3}$ e mantendo a ordem de δr resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\approx \left(2 \left(\frac{GM_S}{a^3} + \frac{3GM_S}{a^3} \right) + \frac{GM_S}{a^3} \right) \delta x \hat{i} + \left(- \left(\frac{GM_S}{a^3} + \frac{3GM_S}{a^3} \right) + \frac{GM_S}{a^3} \right) \delta y \hat{j} \\ &= \boxed{\frac{GM_S}{a^3} (9\delta x \hat{i} - 3\delta y \hat{j})} \end{aligned}$$

d) Como calculado anteriormente, um pequeno deslocamento na direção x , causa uma força apontando na mesma direção, logo é instável.

e) A força de Coriolis é dada por:

$$|\mathbf{F}| = 2m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = 2m\omega v \sin \theta$$

Logo a magnitude média da força é:

$$\langle F \rangle = 2mv\omega \langle \sin \theta \rangle$$

Do item anterior, perceba que a aceleração em $\hat{j}$ é $\frac{-3GM_S \delta y}{R^3}$ e isso deve ser igual a aceleração centrípeta, logo:

$$\frac{3GM_S r}{a^3} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{3GM_S r^2}{a^3}$$

Logo:

$$\langle F \rangle = 2m \sqrt{\frac{3GM_S r^2}{a^3}} \sqrt{\frac{GM_S}{a^3}} \langle \sin \theta \rangle$$

o valor médio de $\sin \theta$ é $2/\pi$, logo:

$$\langle F \rangle = \frac{4\sqrt{3}GM_S m r}{\pi a^3}$$

pr 28. Em um cenário apocalíptico, um grande asteróide colidiu com a Terra e fez com que ela perdesse toda a sua velocidade orbital em torno do Sol. Estime quanto tempo os humanos (supondo que algum tenha sobrevivido) teriam para encontrar uma solução antes de ocorrer uma colisão com o Sol.

Solução: A órbita descrita pela Terra (na queda em direção ao Sol) é uma elipse degenerada de semi eixo maior $a = a_{\oplus}/2$. O tempo de queda é determinado como sendo metade do tempo de um período, pela lei das áreas, assim;

$$\Delta T = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\odot}}} = \boxed{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a_{\oplus}^3}{2GM_{\odot}}}}$$

pr 29. Em outro cenário apocalíptico, o Sol começa a implodir, de forma que, no estado final, toda sua massa se concentrará em um seu centro. Estime o tempo necessário para que ele vá do seu raio atual até o estado final, supondo que somente a gravidade é responsável por esse processo.

Solução: Utilizando a Lei de Gauss:

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{in} \rightarrow g = \frac{GM_{\odot}}{r^2}$$

A aceleração de um ponto na superfície do Sol, é:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_{\odot}}{r^2}$$

Resolvendo para t , obtemos

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_{\odot}^3}{2GM_{\odot}}}$$

Porém perceba que a situação descrita nesse problema é idêntica ao problema anterior.

Para uma partícula na superfície do Sol, a trajetória descrita será uma elipse degenerada de $a = R_{\odot}/2$, sendo assim, utilizando o mesmo raciocínio anterior, chegamos em:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2(R_{\odot}/2)^3}{GM_{\odot}}} = \boxed{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_{\odot}^3}{2GM_{\odot}}}}$$

pr 30. Prove que se tivermos um círculo de raio a e multiplicarmos suas coordenadas em y por um fator de $\frac{a}{b}$, obteremos uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b .

Solução A equação de um círculo de raio a é dada por:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Multiplicando as coordenadas em y por um fator de b/a obtemos:

$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2$$

Dividindo todos os termos por a^2 , obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que é a equação de uma elipse.

pr 31. (OPhO 2020 - adaptado) Jânio passava suas férias no Polo Sul quando decidiu enviar uma mala cheia (quase estourando) de paçocas e bandeiras do Brasil para sua alma gêmea búlgara, que estava no Polo Norte. Como ele gostaria que o envio fosse o mais rápido possível, ele chama Fausto, que consegue arremessar a mala a uma velocidade $v_0 = 9000 \text{ m/s}$, colocando-a em órbita em torno da Terra. Determine o tempo que a mala leva para chegar ao destino.

Solução: Teremos uma situação parecia com a seguinte:

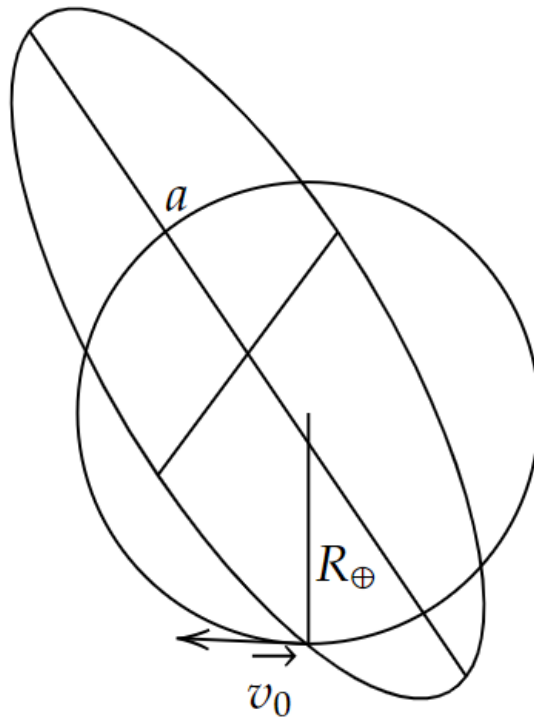


Figura 2.18: Órbita do Foguete

O primeiro passo é descobrir o semi eixo maior da órbita, isso pode ser feito conservando energia:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{-GM_\oplus}{2a}$$

Resolvendo para a :

$$a = \left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{v_0^2}{GM_\oplus} \right)^{-1}$$

O próximo parâmetro importante é a excentricidade da órbita e .

$$L^2 = m^2 v_0^2 R_\oplus^2 = m^2 GM_\oplus a (1 - e^2)$$

Resolvendo para e , temos:

$$e = \sqrt{\frac{v_0^2 R_\oplus^2}{GM_\oplus a} - 1} = \sqrt{\frac{v_0^2 R_\oplus}{GM_\oplus} - 1}$$

Utilizando a equação excêntrica da elipse, podemos encontrar a anomalia excêntrica e depois encontrar o tempo utilizando a Equação de Kepler, sendo assim:

$$R_\oplus = a(1 - e \cos E)$$

Isolando E , temos:

$$E = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \left(1 - \frac{R_{\oplus}}{a} \right) \right)$$

Perceba que essa equação nos dará dois valores de E , pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, seja eles E_1 e E_2 . As suas respectivas anomalias médias são M_1 e M_2 , dadas por:

$$M_i = E_i - e \sin E_i$$

Por fim, o ultimo passo para calcular o tempo, podemos simplesmente usar regra de 3.

$$\frac{\Delta M}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

Onde T é o período da órbita, dado por:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\oplus}}}$$

Nota do autor: Esse tipo de questões, envolvendo tempo em órbitas, são resolvidas de maneira muito mais eficiente ao substituir os valores numéricos do que tentar fazer uma expressão gigante, ou ao menos, definir variáveis auxiliares para facilitar a manipulação algébrica. A caso de curiosidade a expressão para o tempo nesse problema é:

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) + e\sqrt{1 - e^2} \right)$$

pr 32. Ao descobrir que irá receber seu próprio filme em Junho de 2022, o famoso astronauta Buzz Lightyear decide voltar ao espaço para garantir que suas técnicas de astronáutica estarão em ponto para as gravações do longa-metragem. Para sua estadia, ele escolhe ficar em uma espaçonave geoestacionária.

a) Qual é o período e o raio da órbita de Buzz Lightyear? Em que plano ela está contida?

b) Para uma das cenas do filme, Buzz terá que acertar sua própria nave com um tiro dado por um rifle localizado dentro de sua espaçonave. Considere que a bala sai com 2000 m/s da arma e que sua órbita está no mesmo plano da órbita da nave. Qual é o ângulo com relação à reta que liga a espaçonave ao centro da Terra

que Buzz terá que mirar seu rifle para que a bala atinja a nave nas próximas 40 horas? Não é necessário provar que somente um ângulo satisfaz essa condição.

c) Buzz deseja que, no referencial da Terra, a trajetória da bala esteja contida integralmente sobre a reta que liga a posição da nave no momento do disparo ao centro do planeta. Assim, encontre a velocidade inicial, no referencial da Terra, que a bala deve ter para satisfazer a condição de Buzz e ainda atingir a nave. Faça isso sem utilizar cálculo diferencial e integral.

Nota: Para encontrar uma resposta numérica, seria necessário utilizar programas de computador. Para este item, é suficiente descrever como você encontraria a velocidade solicitada caso tivesse acesso a um programa que resolve qualquer equação (transcendental ou não).

d) Nos pós-créditos, Buzz irá acertar sua nave com um rifle cujos tiros saem com velocidade entre 0 e 300 m/s. Entretanto, tal rifle só aponta para o próprio sentido de movimento da nave. Qual é o menor tempo de viagem possível da bala até que ela atinja a espaçonave?

Solução:

a) Por definição, uma órbita geoestacionária é uma órbita circular contida no plano do Equador com seu período de rotação exatamente igual ao período de rotação da Terra. Pela tabela de constantes, o período de rotação da Terra (dia sideral) é $T_0 = 23^h 56^m 04^s$, agora utilizando a Terceira Lei de Kepler para calcular o raio,

$$R_0 = \left(\frac{GM}{4\pi^2} T_0^2 \right)^{1/3} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) A nave se move com velocidade,

$$v_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0} = 3080 \text{ m/s}$$

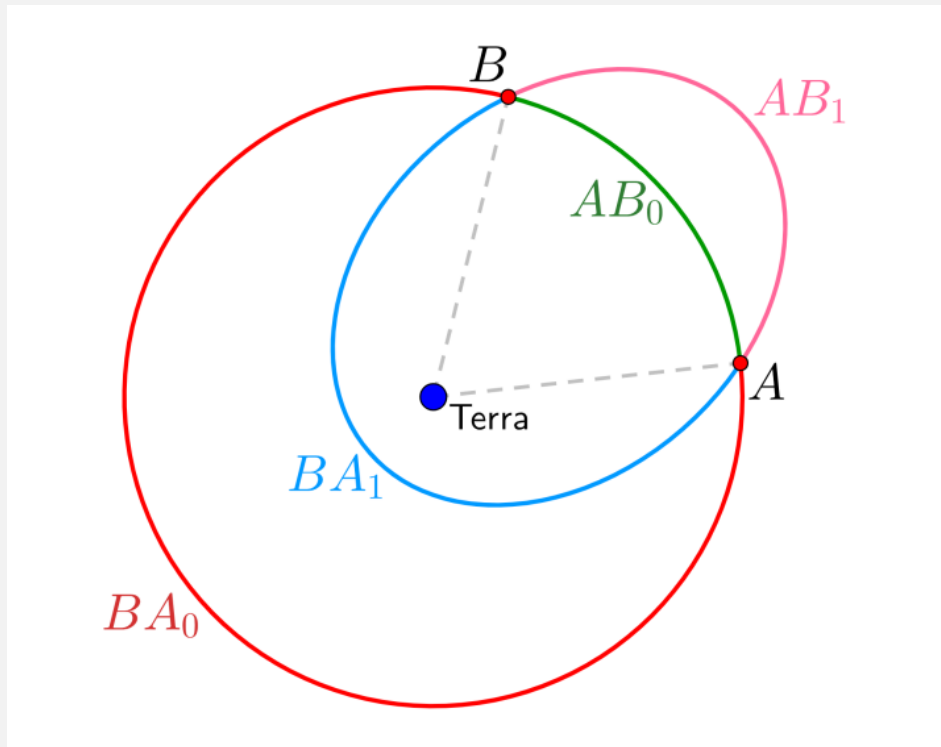
Sendo u_0 a velocidade com que a bala sai do rifle, então a bala começará a se mover com velocidade em relação à Terra $\vec{w} = \vec{v}_0 + \vec{u}_0$, em que o ângulo entre u_0 e v_0 pode ser livremente variado. Sabemos que a bala irá descrever uma trajetória elíptica com foco no centro da Terra. Obviamente, a bala só pode atingir a nave em pontos onde as trajetórias da bala e da nave se intersectam. Isso corresponde a intersecções entre uma elipse e uma circunferência e, nesse caso, há 2 intersecções, já que qualquer satélite tem

apenas um perigeu e, nesse caso, o perigeu não pode estar a uma distância maior que R_0 , afinal um dos pontos da órbita (o ponto de onde a bala é disparada) com certeza está a uma distância R_0 .

Dessas 2 intersecções, uma delas é o ponto em que a nave se encontra no momento do disparo. Podemos provar qualitativamente que é impossível a bala atingir a nave na outra intersecção da seguinte forma: Seja A e B os dois pontos de intersecção, consideremos dois casos:

- Caso 1: $w_0 \ll v_0$

Nessa situação, pela energia mecânica total, o semieixo maior a da órbita da bala será menor ou igual a R_0 e, conseqüentemente, como $T \propto a^{3/2}$, então o período T_1 da órbita da bala será menor ou igual ao período T da nave ($T_1 \leq T$). A partir da figura abaixo, note que a distância AB_1 percorrida pela bala entre A e B é maior que a distância AB , percorrida pela nave ($AB_1 > AB_0$). Ainda, como $w_0 \ll v_0$, então, pela conservação de energia mecânica, durante toda a trajetória de A até B a bala terá uma velocidade w menor que w_0 , afinal ela estará a uma distância maior que R_0 . Logo, sua velocidade será sempre $w < v_0$ quando estiver entre A e B.



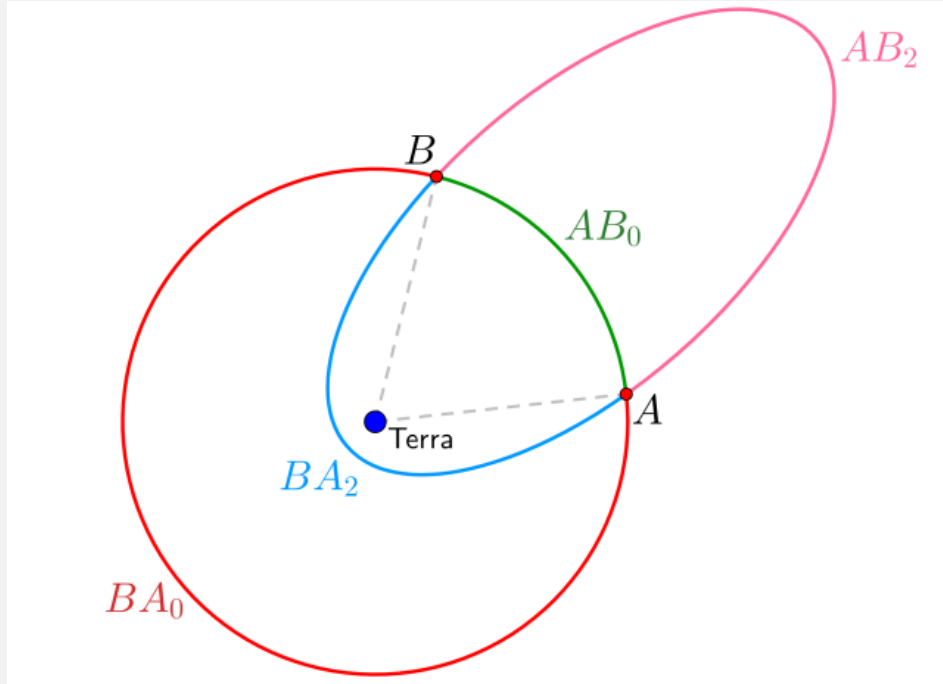
Portanto, como $AB_1 > AB_0$ e $w < v_0$, o intervalo de tempo Δt_{AB_1} para a bala

ir de A a B é maior que o intervalo de tempo Δt_{AB_0} , da nave ($\Delta t_{AB_1} > \Delta t_{AB_0}$). Ou seja, é impossível acertar a nave nesse caso pois os intervalos de tempo não são iguais.

Por fim, vale notar que se a bala for disparada do ponto B de forma a percorrer o trajeto BA_1 , também não é possível termos um mesmo intervalo de viagem, porque: $T_1 \leq T \rightarrow \Delta t_{AB_1} + \Delta t_{BA_1} \leq \Delta t_{AB_0} + \Delta t_{BA_0} \rightarrow \Delta t_{BA_1} \leq \Delta t_{BA_0} + (\Delta t_{AB_0} - \Delta t_{AB_1})$ e, como $\Delta t_{AB_0} - \Delta t_{AB_1} < 0$, então $\Delta t_{BA_1} < \Delta t_{BA_0}$. Ou seja, novamente os intervalos de tempo de viagem da bala e da nave não podem ser iguais.

- Caso 2: $w_0 > v_0$

Aqui, por argumentos similares, temos $T_2 > T$ e, pela imagem é evidente que $BA_2 < BA_0$. Pela conservação de energia, a velocidade w da bala entre B e A é sempre maior que w_0 e, portanto, $w > v_0$.



Logo, $\Delta t_{BA_2} < \Delta t_{BA_0}$. E lembrando que $T_2 > T$, podemos analisar a trajetória entre A e B . Temos: $\Delta t_{AB_2} + \Delta t_{BA_2} > \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA_0} \rightarrow \Delta t_{AB_2} > \Delta t_{AB} + (\Delta t_{BA_0} - \Delta t_{BA_2})$, mas $\Delta t_{BA_0} - \Delta t_{BA_2} > 0$, então $\Delta t_{AB_2} > \Delta t_{AB_0}$. Novamente, verificamos que não é possível ter a igualdade entre os intervalos de viagem da bala e da nave.

Agora, sabemos que não é possível atingir a nave na intersecção em que ela não se

encontra no instante do disparo. Portanto, nos resta apenas analisar se é possível atingir a nave no ponto em que a bala é disparada e rapidamente percebemos uma solução trivial: basta fazer a bala ter um período orbital de NT_0 (em que N é um número natural) afinal, dessa forma, tanto a bala quanto a espaçonave estarão no mesmo ponto e colidirão após NT_0 . Outra solução aparentemente possível seria fazer a bala ter um período orbital de T_0/N , de forma a colidir com a nave após T_0 , entretanto pode-se mostrar que para todo valor de N natural, a bala colidirá com a Terra e, portanto, não é uma solução válida. Logo, o período orbital da bala deve ser NT_0 . Mas como o enunciado pede que a colisão ocorra dentro de 40 horas, então a única solução é $N = 1$.

Note que o enunciado dizia que não era necessário provar que há apenas uma solução, portanto, bastava perceber que a solução única é o caso trivial em que a bala encontra a nave no mesmo ponto do disparo após T_0 .

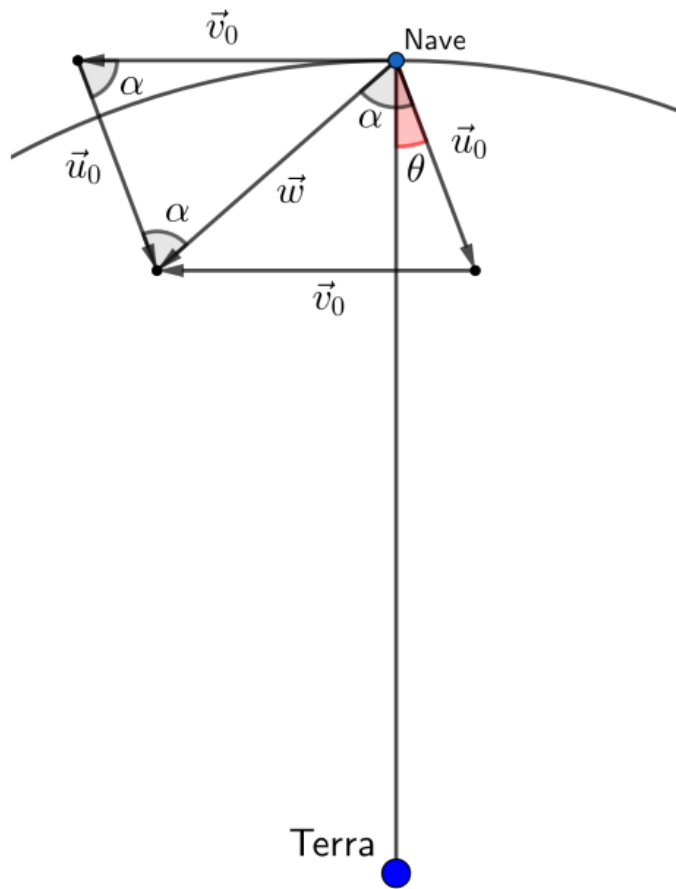
O resto se resume a descobrir em que ângulo se deve disparar para manter o mesmo período orbital. Para isso pode-se usar o seguinte raciocínio. Primeiro observe que da terceira lei de Kepler, o período orbital T se relaciona com o semieixo maior a como $T \propto a^{3/2}$.

Portanto, se queremos manter T , o semieixo maior precisa ser fixo. está relacionado com a energia total como:

$$E_{total} = -\frac{GM_{\oplus}m_{bala}}{2a}$$

Como podemos ver, fixar o semi-eixo maior significa que a energia total precisa permanecer constante e como energia total = energia cinética + energia potencial, a velocidade total da bala e da espaçonave precisam ser iguais no instante em que a bala é disparada ($w = v_0$).

Isso pode ser facilmente alcançado fazendo o ângulo entre $\vec{v}_0$ e $\vec{u}_0$ tal que $\vec{v}_0$, $\vec{u}_0$ e $\vec{w}$ formam um triângulo isósceles. A partir de geometria simples, obtém-se o ângulo desejado. Abaixo está uma figura da situação:



Pelo esquema:

$$(180^\circ - 2\alpha) + \alpha - 90^\circ = \theta \rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$$

Basta encontrar o ângulo α . Pela lei dos cossenos:

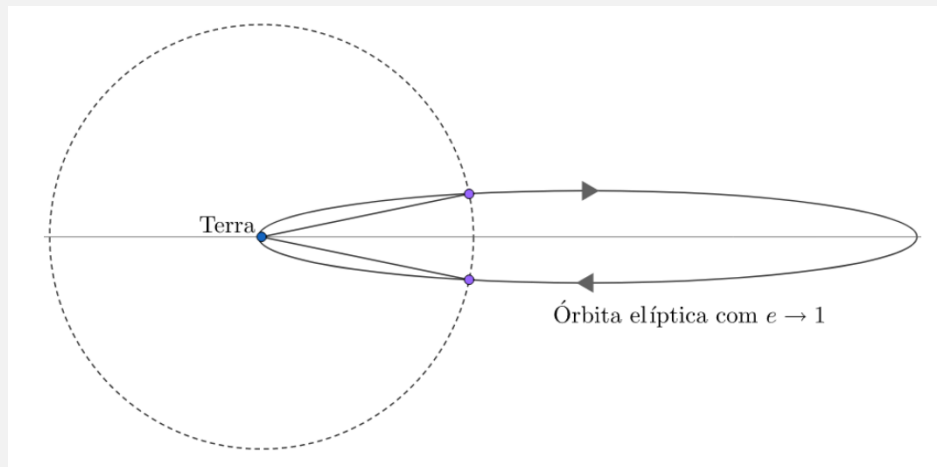
$$v_0^2 = v_0^2 + u_0^2 - 2v_0u_0 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{u_0}{2v_0}$$

Portanto,

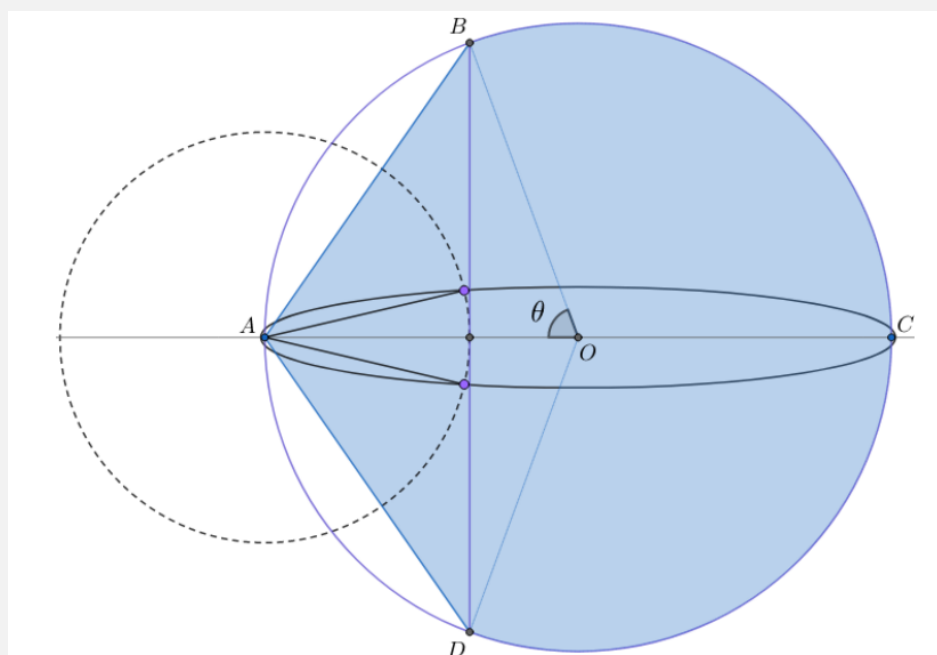
$$\theta = 90^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{u_0}{2v_0} \right) \approx 18,9^\circ$$

c) Para que a bala atinja a nave, queremos que o seu tempo de voo seja igual a um **múltiplo** do período da nave ao redor da Terra ($t_{voo} = NT_0$). Vamos calcular

a velocidade no caso em que $N = 1$ para depois generalizarmos. No referencial da Terra, temos a seguinte órbita:



Note que este é um problema de elipse degenerada, ou seja, a órbita elíptica possui uma excentricidade que tende a 1, fazendo-a próxima de uma reta. Para encontrarmos a área varrida pela bala, precisamos lembrar que uma elipse de semieixos a e b não passa de um círculo de raio a cujas coordenadas foram multiplicadas por b/a . Isso quer dizer que podemos encontrar a área S associada à elipse multiplicando uma área S' associada a um círculo que representa a elipse "esticada" por um fator b/a . Visualmente:



Assim, sendo S a área varrida na elipse pela bala e S' a área em azul, temos que

$S = S'b/a$. Podemos encontrar S' por:

$$S' = \pi a^2 - \theta a^2 + Ha$$

Onde $H = \sqrt{R_{\oplus}(2a - R_{\oplus})}$ é a menor distância de B até a reta AC e $\cos \theta = \frac{a - R_{\oplus}}{a}$. Perceba que só subtraímos da área total a área do setor circular DOB e somamos a área do polígono ABOD. Assim, sendo $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\oplus}}}$, temos:

$$t_{voo} = P \frac{S}{\pi ab} = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \left(2\pi - 2\cos^{-1} \left(\frac{a - R_{\oplus}}{a} \right) + 2\sqrt{\frac{R_{\oplus}}{a} \left(2 - \frac{R_{\oplus}}{a} \right)} \right)$$

Agora, temos que $t_{voo} = N \cdot 24$ h. Sendo v_b a velocidade inicial da bala no referencial da Terra, temos, por conservação de energia:

$$\frac{v_b^2}{2} - \frac{GM}{R_{\oplus}} = -\frac{GM}{2a} \rightarrow a = \frac{1}{\frac{2}{R_{\oplus}} - \frac{v_b^2}{GM_{\oplus}}}$$

Assim, com um programa de computador, seria possível encontrar o valor de a - e, conseqüentemente, v_b - para qualquer dado valor de N .

d) Nesse caso, como a bala é disparada no mesmo sentido de movimento da nave, a única maneira de fazer a bala e a nave colidir é fazer a bala e a nave se encontrarem no ponto de interseção original após um certo número de rotações orbitais. Não há outros pontos de interseção porque o ponto onde a bala foi disparada será o perigeu de sua órbita, portanto, todos os outros pontos da órbita da bala estarão mais distantes do que R_0 , fazendo com que o círculo e a elipse se intersectem apenas no ponto do disparo.

Agora, vamos encontrar o período orbital máximo e mínimo da bala. Se a velocidade que a bala sai do rifle for u , então sua velocidade no referencial da Terra é $v_0 + u$.

A energia total por massa expressa no ponto onde a bala foi disparada é:

$$\frac{E_{total}}{m_{bala}} = -\frac{GM_{\oplus}}{2a} = \frac{(v_0 + u)^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}}{R_0}$$

Portanto, o semieixo maior da órbita é:

$$a = \frac{R_0}{2} \left(1 - \frac{(v_0 + u)^2}{2GM_{\oplus}} \right)^{-1}$$

Pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{a^3}{R_0^3} \rightarrow T = T_0 \left(\frac{a}{R_0} \right)^{3/2}$$

Então:

$$T = T_0 \left(2 - \frac{R_0(v_0 + u)^2}{GM_{\oplus}} \right)^{-3/2}$$

A velocidade u pode ir de 0 a 300 m/s, então o período orbital pode variar de $T(u = 0) = T_0$ até $T(u = 300 \text{ m/s}) = 1,41T_0$.

Seja Δt o tempo de viagem da bala, então $\Delta t = nT_0 = mT$ onde n e m são números naturais. Como queremos minimizar o tempo da viagem, então queremos encontrar o menor valor possível para n . Como vimos que $T_0 < T < 1,41T_0$ e temos que $T = \frac{n}{m}T_0$, então,

$$1 < \frac{n}{m} < 1,41$$

Disso, sabemos que $n > m$. O menor valor possível para n que satisfaça essa desigualdade é $m + 1$. Portanto:

$$\frac{m+1}{m} < 1,41 \rightarrow m > 2,44$$

Como m é natural, temos como solução $m = 3$ e $n = 4$, assim o menor tempo de viagem possível é,

$$\Delta t = nT_0 = 95^h 44^m 16^s$$

pr 33. (IOAA 2022) A órbita de Mercúrio possui uma excentricidade consideravelmente alta. Ademais, seu período de rotação é $\frac{2}{3}$ de seu período sideral. Como resultado destes fatores, o Sol apresentará movimento retrógrado no céu de Mercúrio nas

proximidades do periélio. Calcule a duração total desse movimento retrógrado aparente durante uma órbita de Mercúrio em torno do Sol. Escreva sua resposta em dias terrestres.

Solução: Na iminência do movimento retrógrado do Sol, a velocidade angular de rotação de mercúrio, é a mesma velocidade angular com que o mesmo orbita o Sol. Primeiramente, o exercício nos informa que:

$$T_{rot} = \frac{2}{3}T_S$$

Como $\omega = 2\pi/T$, logo:

$$\omega_{rot} = \frac{2\pi}{T_{rot}} = \frac{2\pi}{2T_s} 3 = \frac{3\pi}{T_s}$$

Pela terceira lei de Kepler:

$$\omega_{rot} = 3\pi\sqrt{\frac{GM}{4\pi a^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

A velocidade angular na translação pode ser calculada utilizando a equação vis-viva, e utilizando que $\omega_t = v/r$:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \rightarrow \omega_t^2 = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Contudo, igualando as velocidades angulares:

$$\begin{aligned} \frac{9GM}{4a^3} &= \frac{2GM}{r^3} - \frac{GM}{r^2a} \\ \frac{9}{4a^3} &= \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2a} \end{aligned}$$

Reorganizando, temos:

$$9r^3 + 4a^2r - 8a^3 = 0$$

Essa expressão pode ser resolvida utilizando a formula da equação cúbica, ou por iteração. Como $a = 0,38$ UA, temos:

$$r = \left(\frac{8a^3 - 4a^2r}{9} \right)^{1/3} \approx 0,307 \text{ UA}$$

A excentricidade de Mercúrio é de $e = 0,2056$, podemos agora colocar isso na equação

excêntrica da elipse:

$$r = a(1 - e \cos E) \rightarrow \cos E = \frac{1}{e} - \frac{r}{ae} = 0,934 \rightarrow E = 20,87^\circ$$

Agora, utilizando a equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Por simetria, teremos que $E_1 = 17,21^\circ$, $E_2 = 360^\circ - E_1$ obtemos:

$$M_1 = 0,291 \quad , \quad M_2 = -0,291$$

Com isso, temos $\Delta M = 0,582$. Por definição:

$$\Delta t = \frac{\Delta M}{2\pi} T \approx 8,3 \text{ dias}$$

pr 34. Partindo da conservação de momento angular, encontre uma expressão para o tempo necessário para ir do periastro de uma órbita parabólica até um ponto com anomalia verdadeira θ , assumindo que a massa central M seja muito maior que a massa orbitante m . Deixe sua resposta em termos do momento angular específico h e do parâmetro orbital $\mu = GM$.

Solução: O momento angular, pode ser escrito como:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Para uma parábola, o elemento de área, em coordenadas polares, é dada por:

$$dA = r^2 d\theta / 2$$

A velocidade areolar é:

$$\phi = \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Ou seja;

$$dt = \frac{2}{h} dA = \frac{r^2}{h} d\theta$$

Da equação polar da parábola:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

Nossa equação se torna:

$$dt = \frac{p^2}{h} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

Integrando dos dois lados:

$$\int dt = \frac{p^2}{h} \int \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

Para encontrar uma expressão para p , basta conservar energia. Quando estiver em seu vértice (periastro, $r_v = p/2$), a velocidade será perpendicular ao vetor posição, logo:

$$h = r_v v = \left(\frac{p}{2}\right) v \rightarrow v = \frac{2h}{p}$$

E por conservação de energia (para uma órbita parabólica, $E = 0$, logo $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r_v}$):

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{p/2} = \frac{2\mu}{p}$$

O resultado da integral do lado direito, segue a seguir: Temos que $1 + \cos(\theta) = 1 + \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})$ e, utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, temos que $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$, reduzindo a expressão para $1 + \cos(\theta) = 2 \cos^2(\frac{\theta}{2})$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{1}{4} \int \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Podemos expandir $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, temos que $\frac{1}{4} \int \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{4} \int (1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right))^2 d\theta$

A partir daqui, a integral se torna mais amigável para resolver-se. Tomando $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, temos que $\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Portanto $d\theta = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) du$ e, utilizando a propriedade anterior, temos que $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \equiv \frac{1}{1 + u^2}$ De maneira matemática:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{(1 + \cos(\theta))^2} &= \frac{1}{4} \int \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{4} \int \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int (1 + u^2)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + u^2)^2 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) du \equiv \frac{1}{2} \int (1 + u^2)^2 \frac{1}{1 + u^2} du = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int (1 + u^2) du$$

Essa integral pode ser facilmente resolvida, resultando em:

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^3 + C$$

Agora basta substituir $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, resultando em:

$$\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{6} \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) + C$$

Contudo, a expressão para o período de tempo percorrido é:

$$\Delta t = \frac{h^3}{\mu^2} \left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{6} \tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

pr 35. Analisaremos agora o caso da órbita hiperbólica.

a) Partindo da definição da anomalia excêntrica E e de sua relação com a equação de uma elipse no plano (x, y) , sugira um possível parâmetro F que seria o seu análogo para uma órbita hiperbólica. Esse parâmetro não precisa ter nenhum significado físico, mas ainda assim nos ajudará a resolver o problema.

b) Prove que a distância r é dada por

$$r = a(e \cosh F - 1)$$

c) Analogamente ao problema anterior, encontre uma equação que relacione o tempo t desde a passagem pelo periastro e o parâmetro F .

Solução:

a) Uma elipse pode ser descrita por $(x, y) = (a \cos E, b \sin E)$ de modo similar, é possível pensar que a hipérbola é dada por $(x, y) = (a \cosh F, b \sinh F)$

b) Usando que $r^2 = (x - ae)^2 + y^2$ (o foco fica a uma distância ae da origem) que, para hipérboles, $a^2e^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = a\sqrt{e^2 - 1}$ e também $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ temos,

$$r^2 = (a \cosh F - ae)^2 + b^2 \sinh^2 F$$

$$r^2 = a^2 \cosh^2 F - 2a^2 e \cosh F + a^2 e^2 + a^2 (e^2 - 1)(\cosh^2 F - 1)$$

Simplificando,

$$r^2 = a^2 e^2 \cosh^2 F - 2a^2 e \cosh F + a^2$$

$$r^2 = a^2 (e \cosh F - 1)^2$$

E finalmente,

$$\boxed{\therefore r = a(e \cosh F - 1)} \quad \blacksquare$$

c) Analogamente às órbitas elípticas, temos a equação de Kepler para as parábolas,

$$M = e \sinh F - F$$

Onde $M = \omega t = \Delta t \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$, resolvendo para o tempo,

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} (e \sinh F - F)}$$

pr 36. (Vinhedo-2022) Supondo que realiza-se um lançamento de um foguete entre dois pontos que estejam em um mesmo círculo máximo e separados por um ângulo de 90° medido a partir do centro da Terra, determine a velocidade mínima de lançamento $v_{\min}$ (em função de G , do raio da Terra R_T e de sua massa M_T) que o foguete deve assumir para que a missão seja cumprida e qual deve ser o ângulo de lançamento com a horizontal nessa situação.

Solução: a) Observe a seguinte figura de apoio:

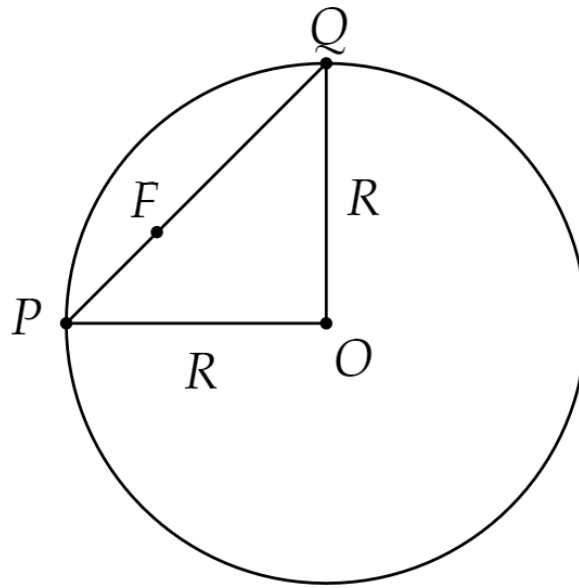


Figura 2.19: Representação geométrica

Perceba que para a velocidade v_{min} os pontos P e Q , devem estar na elipse de segurança. Com isso, o segundo foco da órbita F (o foco primário se dá no centro do corpo massivo, na figura marcado pelo ponto O), deve estar na reta $\overline{PQ}$, com isso, usando as propriedades da Elipse, temos:

$$\overline{PF} + \overline{PO} = 2a$$

$$\overline{QF} + \overline{QO} = 2a$$

Como $\overline{PO} = \overline{QO} \equiv R$ e, pelo teorema de pitágoras $\overline{PQ} = \sqrt{2}R$, chegamos em:

$$\overline{PF} = \overline{QF} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Substituindo em qualquer uma das equações, obtemos:

$$a = \frac{R}{4}(\sqrt{2} + 2)$$

Utilizando conservação de energia:

$$-\frac{GM}{2a} = \frac{v_{min}^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Resolvendo para v_{min} , obtemos:

$$v_{min} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

b) Note que $\overline{FO} = 2c$, logo, pelo teorema de Pitágoras, no triângulo PFO , temos:

$$R^2 = \frac{R^2}{2} + 4c^2$$

Logo, $c = R/\sqrt{8}$. A excentricidade da órbita é dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{R}{\sqrt{8}} \frac{4}{R(\sqrt{2} + 2)} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Com isso, podemos encontrar o momento angular da órbita, dado por:

$$L = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

Fazendo o seguinte estudo de ângulos, encontramos as seguintes relações angulares:

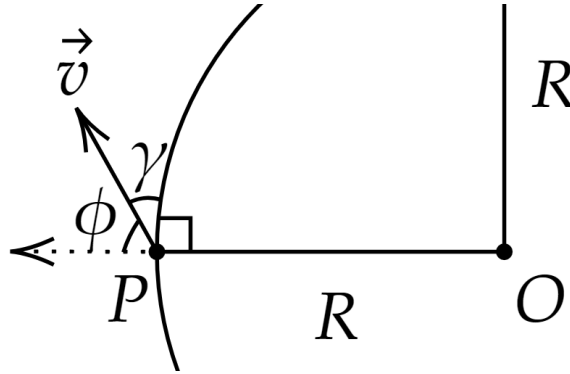


Figura 2.20: Ângulos notáveis

Com isso, podemos concluir que $L = mRv \sin \phi = mRv \sin(\pi/2 - \gamma) = mRv \cos \gamma$. Igualando as duas expressões:

$$mRv_{min} \cos \gamma = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

Resolvendo para γ :

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{Rv_{min}} = \frac{\sqrt{GM\frac{R}{4}(\sqrt{2}+2)(1-(\frac{1}{1+\sqrt{2}})^2)}}{R\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Simplificando:

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}{2(\sqrt{2}-1)}}$$

Ou seja, $\boxed{\gamma = 22,5^\circ}$.

pr 37. (PhysicsCup-2012) Pretende-se lançar um míssil balístico entre duas localidades separadas por um ângulo θ sobre a superfície terrestre. Qual a menor velocidade inicial necessária para isso? Com qual ângulo com relação ao horizonte o míssil deve ser lançado?

Solução:

Este problema é a generalização do problema anterior para um ângulo θ , qualquer. Temos o seguinte esquema:

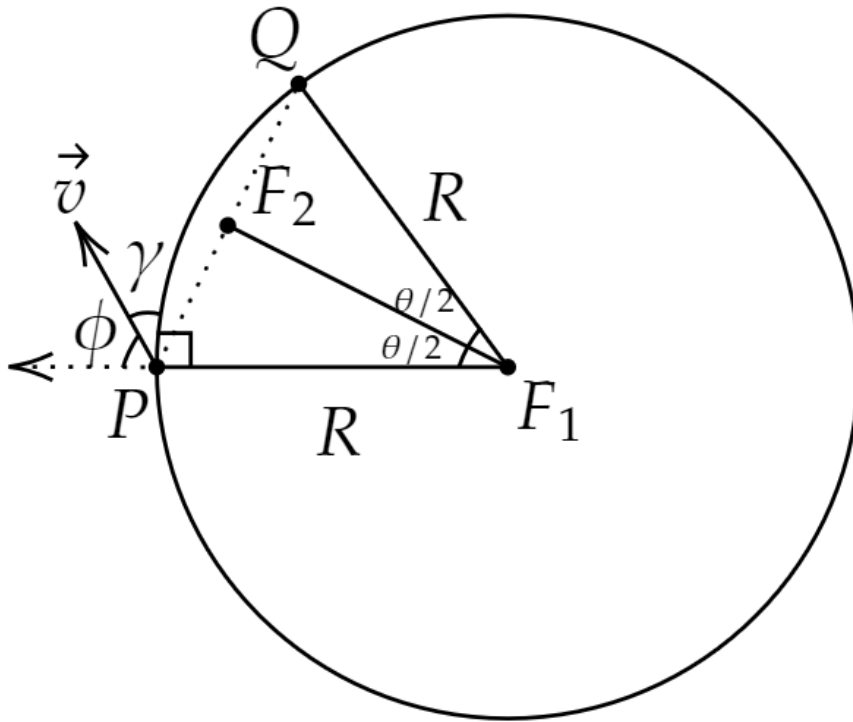


Figura 2.21: Esquema para um ângulo geral

Equacionando:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = 2a$$

Somando as duas:

$$\overline{PQ} + 2R = 4a$$

Seja a distância, $\overline{PF_2} = \overline{QF_2} = x$, utilizando trigonometria básica, $x = R \sin(\theta/2)$, resolvendo para a :

$$2x + 2R = 4a$$

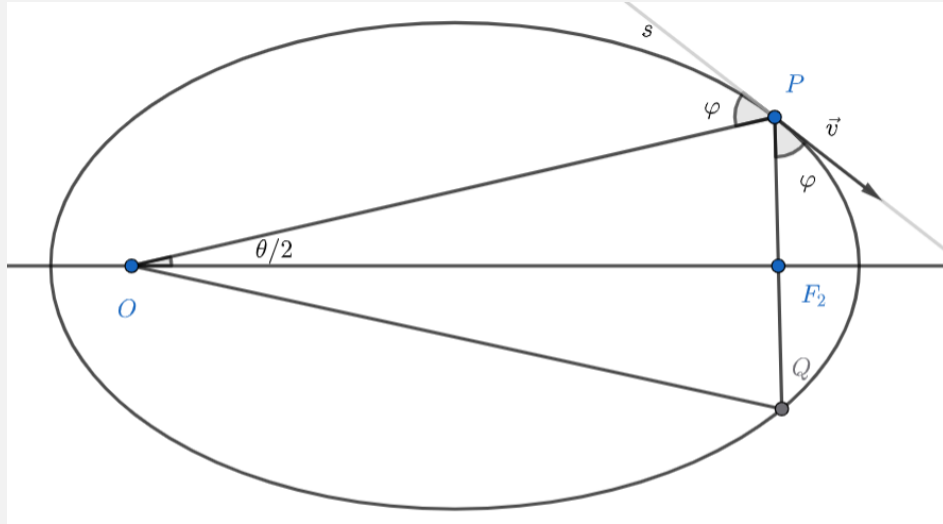
$$a = \frac{x + R}{2} = \frac{R}{2}(1 + \sin(\theta/2))$$

Utilizando a equação vis-viva:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{R} \left(2 - \frac{1}{1 + \sin(\theta/2)} \right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)} \right)}$$

Vamos observar a elipse percorrida pelo foguete,



Ao prolongarmos o vetor velocidade, $\vec{v}$, conseguimos uma reta s tangente a elipse. é uma propriedade das cônicas que os ângulos entre a reta tangente e os focos são os mesmos, e devido a simetria da situação (os pontos P e Q distam o mesmo tanto do ponto O), podemos afirmar que o ângulo $O\hat{P}Q = O\hat{P}F_2 = \pi - 2\varphi$ e também que o ângulo $O\hat{F}_2P = \pi/2$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a π , olhando o triângulo OF_2P , temos,

$$\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - 2\varphi = \pi$$

Resolvendo para φ ,

$$\varphi = \frac{\theta + \pi}{4}$$

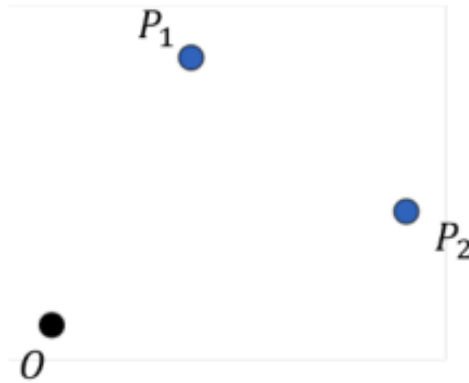
O ângulo de lançamento, γ é dado por,

$$\gamma + \frac{\pi}{2} = (\pi - 2\varphi) + \varphi$$

Resolvendo para γ ,

$$\gamma = \frac{\pi - \theta}{4}$$

pr 38. Considere os pontos O , P_1 e P_2 da figura abaixo.



No ponto O temos uma estrela de massa M , e desejamos lançar uma massa m do ponto P_1 para chegar no ponto P_2 . Assuma que as distâncias $OP_1 = r_1$, $OP_2 = r_2$ e $P_1P_2 = r_{12}$ e a constante de gravitação G são todas fornecidas.

- Qual a menor velocidade $v_{\min}$ necessária para lançar a massa m de P_1 para P_2 ?
- Neste cenário de mínima velocidade, qual o ângulo de lançamento θ da massa em relação à linha P_1P_2 ?

Solução:

- O problema nos dá as seguintes condições de contorno: O ponto O representa um dos focos da elipse. P_1 e P_2 devem estar na elipse de segurança. Seja F o outro foco da elipse. Utilizando-se das propriedades dessa cônica

$$OP_1 + P_1F = 2a$$

$$OP_2 + P_2F = 2a$$

Somando

$$OP_1 + OP_2 + P_1F + P_2F = 4a$$

O único ponto variável dessa equação é o ponto F . para minimizar a temos que minimizar a quantidade $P_1F + P_2F$. Essa quantidade é minimizada quando F

pertence a reta P_1P_2 , assim $P_1F_2 + P_2F = P_1P_2$. O que faz a nossa expressão se tornar

$$OP_1 + OP_2 + P_1P_2 = 4a$$

Utilizando as medidas fornecidas pela questão

$$a = \frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{4}$$

Agora, utilizando de conservação de energia

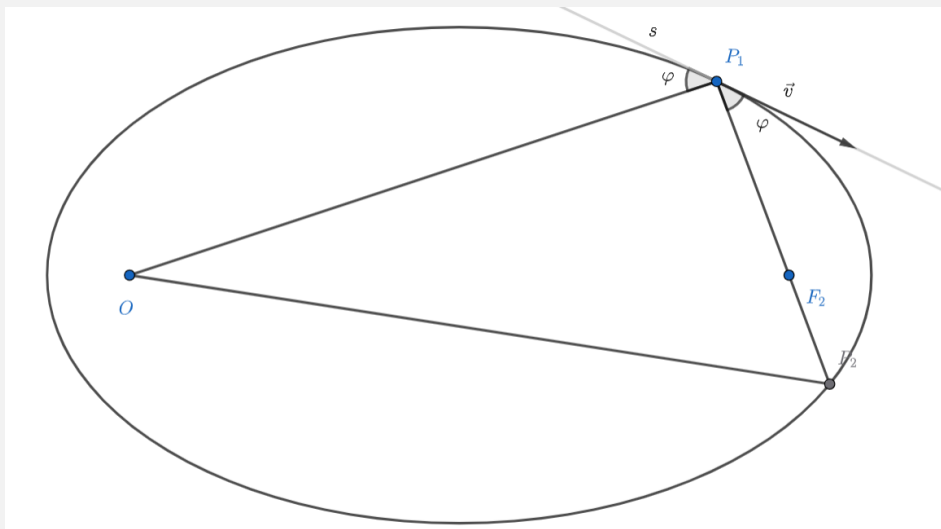
$$-\frac{GMm}{r_1} + \frac{mv_{min}^2}{2} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$v_{min} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$v_{min} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_1} - \frac{4}{r_1 + r_2 + r_{12}} \right)}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1} \left(\frac{r_2 + r_{12} - r_1}{r_1 + r_2 + r_{12}} \right)}$$

b) Observe a figura a seguir,



Na elipse de segurança, tanto $\overline{OP_1}$ quanto $\overline{OP_2}$ passam pelos focos da elipse. Prolongando o vetor velocidade $\vec{v}$ no ponto P_1 obtemos uma reta s tangente a elipse. É uma propriedade das cônicas que qualquer tangente produz ângulos iguais em segmentos que ligam do ponto de tangência aos focos. Por isso, podemos afirmar que os ângulos que os segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ fazem com a reta s são equivalentes e vamos denominá-los de φ . Diante dessas considerações, temos um triângulo $\triangle OP_1P_2$ onde o ângulo $\angle P_1P_2O$ equivale a $\pi - 2\varphi$. Agora, podemos usar a lei dos cossenos,

$$r_2^2 = r_1^2 + r_{12}^2 - 2r_1r_{12}\cos(\pi - 2\varphi)$$

Utilizando que $\cos(\pi - x) = -\cos x$ temos,

$$r_2^2 = r_1^2 + r_{12}^2 + 2r_1r_{12}\cos(2\varphi)$$

Resolvendo para φ ,

$$\varphi = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 - r_{12}^2}{2r_1r_{12}} \right)$$

Note que pelo fato de os ângulos internos do triângulo somarem π , o ângulo φ está limitado a $0 \leq \pi - 2\varphi < \pi$.

pr 39. Geométrico, após brigar com seu amigo Plo, decide assustá-lo com sua arma espacial. Para garantir que a trajetória do projétil não sofra interferência dos planetas, Geométrico deseja que ela possua a menor excentricidade possível.

a) Para ajudar Geométrico em sua empreitada, você precisará utilizar a definição de um hodógrafo: a curva descrita pela extremidade do vetor velocidade durante o movimento de um objeto. Com o Sol na origem, defina a direção do periélio como sendo o eixo x e o eixo y como sendo perpendicular a ele. Mostre que, no plano $v_x - v_y$, o hodógrafo de qualquer órbita kepleriana é um círculo, determinando seu raio e a posição do seu centro. Deixe sua resposta em termos do parâmetro gravitacional $\mu = GM_\odot$, do momento angular específico h e da excentricidade e .

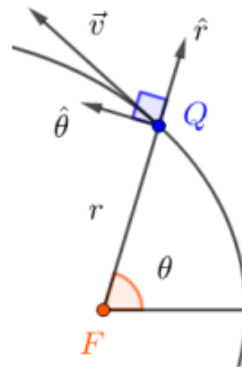
Dica: Lembre-se que a equação polar de uma cônica em função da anomalia verdadeira θ é dada por

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

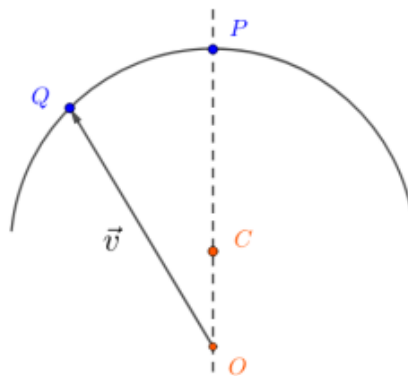
Onde e é a excentricidade e $p = \frac{h^2}{\mu}$ o semilatus rectum.

b) Chame de O a origem do plano $v_x - v_y$ e de C o centro do hodógrafo. Faça um esboço qualitativo do hodógrafo para cada um dos tipos de órbitas possíveis. Qual é a diferença entre eles?

c) Na segunda figura a seguir, em que o ponto Q representa a velocidade num ponto arbitrário da órbita, indique as direções correspondentes aos versores radial $\hat{r}$ e tangencial $\hat{\theta}$ neste ponto, mostrando seu raciocínio. Com isso, defina geometricamente as componentes radial v_r e tangencial v_θ da velocidade, isto é, encontre no hodógrafo segmentos cuja medida seja equivalente à de cada componente. Você pode achar útil utilizar um círculo auxiliar de diâmetro OC .

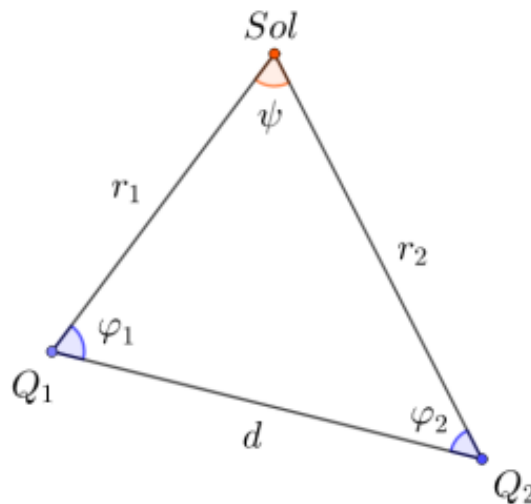


Ponto Q arbitrário da órbita



Velocidade em Q representada no hodógrafo

- d) A partir dos itens anteriores, encontre uma relação entre o ângulo $\angle PCQ$ no hodógrafo e a anomalia verdadeira θ .
- e) Considere novamente o círculo auxiliar de diâmetro $\overline{OC}$. Trace um segmento saindo de Q e intersectando esse círculo em T , tal que QT seja tangente a ele. Prove que esse segmento possui medida igual à velocidade de uma órbita circular passando por Q (na órbita real), isto é, $QT = \sqrt{\mu/r}$.
- f) Ao analisar uma órbita, é muito útil considerar o parâmetro de velocidade λ , definido como sendo a razão entre a velocidade do corpo e a velocidade de uma órbita parabólica passando pelo ponto em questão. Encontre λ em função da energia por unidade de massa ε , μ , e r .
- g) Trace a reta perpendicular a OQ , passando por O , e chame de B sua interseção com o prolongamento do segmento QC . Prove que $BQ/CQ = 2\lambda^2$.
- h) Considere que Geométrico e Plo estejam nos pontos Q_1 e Q_2 , respectivamente, a uma distância r_1 e r_2 do Sol, com um ângulo ψ entre eles visto a partir da estrela. Represente a situação num hodógrafo e encontre o lugar geométrico formado por todas as posições possíveis da origem, fornecendo os parâmetros que o caracterizam. Você pode deixar sua resposta em termos de quaisquer variáveis presentes na figura a seguir.



- i) Encontre a menor excentricidade possível para uma órbita que passa pelas posições de Geométrico e Plo.

Solução:

a) Começaremos calculando a velocidade radial em um ponto arbitrário da órbita:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{p}{(1 + e \cos \theta)^2} \cdot e \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 e \sin \theta}{p} \frac{d\theta}{dt}$$

Para o eixo x :

$$x = r \cos \theta \implies v_x = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = r \sin \theta \left(\frac{e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} - 1 \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_x = -\frac{r^2 \sin \theta}{p} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{h \sin \theta}{p} = -\frac{\mu}{h} \sin \theta$$

Onde utilizamos que $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$. Analogamente, no eixo y :

$$y = r \sin \theta \implies v_y = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = r \left(\frac{e \sin^2 \theta}{1 + e \cos \theta} + \cos \theta \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{r^2 (e + \cos \theta)}{p} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{h} (e + \cos \theta)$$

Dessas equações temos que:

$$v_x^2 + \left(v_y - \frac{\mu e}{h} \right)^2 = \left(\frac{\mu}{h} \right)^2$$

Que é a equação de um círculo de raio μ/h e centro em $(v_x, v_y) = (0, \mu e/h)$.

- b) Para $e = 0$, o centro do hodógrafo será o centro do plano, para $0 < e < 1$ o centro do plano estará dentro do hodógrafo, para $e = 1$ o centro do plano estará na circunferência do hodógrafo e para $e > 1$ o centro estará fora do hodógrafo.
- c) Como a força gravitacional é central, sabemos que a aceleração é puramente radial. Da definição do hodógrafo, a direção da aceleração num dado ponto é tangente ao círculo, ou seja, a tangente deve corresponder à direção radial instantânea da órbita. Assim, a direção tangencial da órbita deve corresponder à direção radial do hodógrafo. Com isso, basta projetar $\vec{v}$ na direção radial, passando pelo centro C do hodógrafo e intersectando o círculo auxiliar do enunciado em S , com a velocidade radial sendo dada por $v_r = OS$. A velocidade tangencial

será, então, dada por $v_t = QS$. Perceba que as duas componentes são, de fato, perpendiculares, uma vez que, pelo teorema de Tales, $\angle OSC = 90^\circ$.

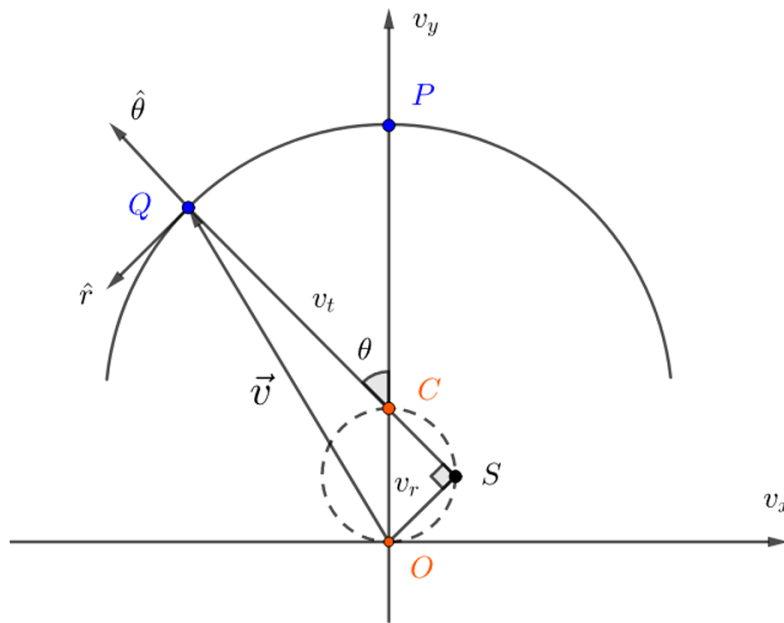


Figura 2.22: Caption

- d) Considere o ponto Q do item anterior e um ponto Q' representando a velocidade após um intervalo de tempo Δt muito pequeno. Por definição da anomalia verdadeira, sua variação deve ser igual ao ângulo entre as direções radiais. Ora, esse é o ângulo $\angle QCC'$ do hodógrafo! Como o ponto P representa a velocidade no periélio (velocidade na direção $\hat{y}$ e anomalia verdadeira nula), concluímos que o ângulo $\angle PCQ$ é igual a θ !

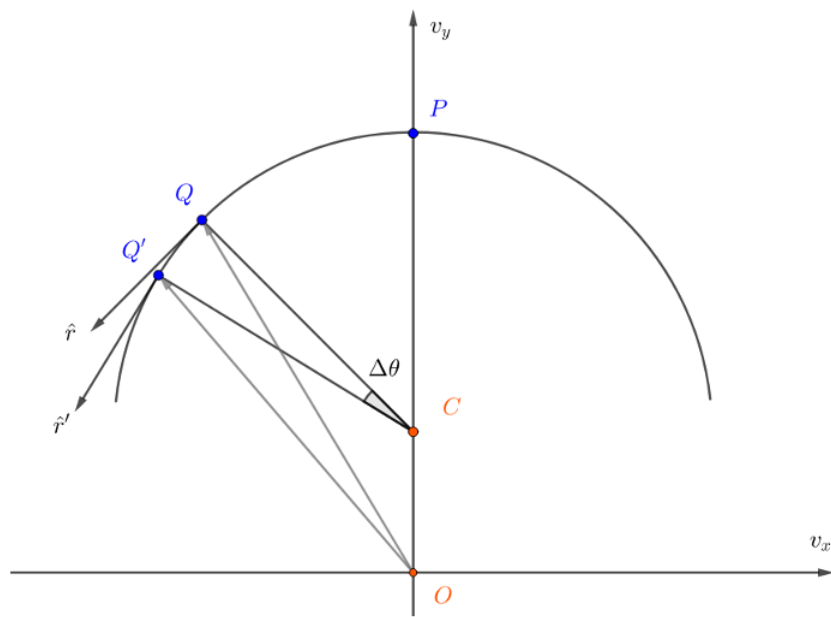


Figura 2.23: Caption

- e) Da geometria do hodógrafo, a potência do ponto Q é $\overline{QT}^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{SQ}$. Por construção, $\overline{CQ} = \mu/h$ e $\overline{SQ} = v_t$. Da conservação de momento angular, $h = rv_t$. Substituindo as expressões:

$$\overline{QT}^2 = \frac{\mu}{r} \implies \overline{QT} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

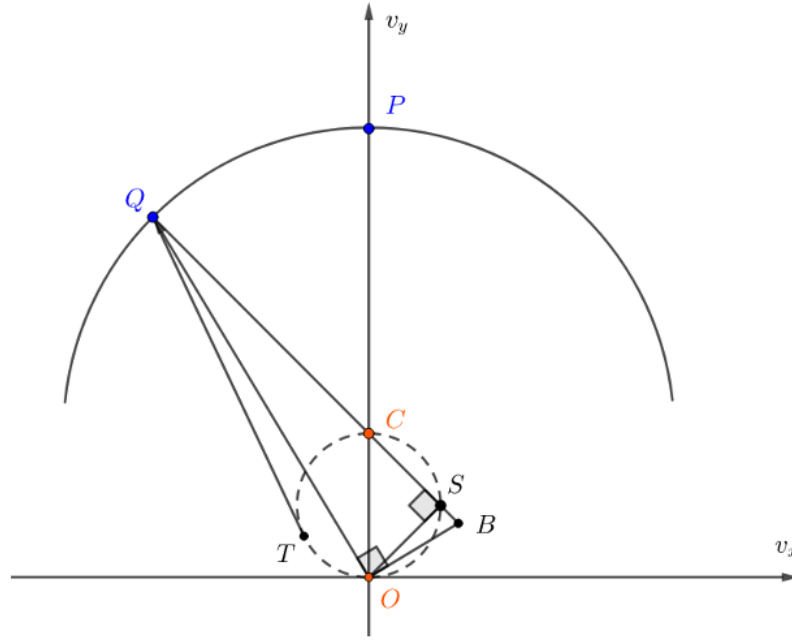


Figura 2.24: Caption

f) A velocidade na órbita parabólica é dada por $\sqrt{2\mu/r}$. Logo, por definição,

$$\lambda = \frac{v}{\sqrt{2\mu/r}} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \lambda^2 \frac{\mu}{r}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \Rightarrow \lambda = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon r}{\mu}}$$

g) Consideremos uma circunferência de diâmetro $\overline{OB}$. A potência do ponto Q pode ser escrita como $\overline{OQ}^2 = \overline{SQ} \cdot \overline{BQ}$. Lembrando que $\overline{OQ} = v$, temos, dos itens anteriores,

$$\overline{QT}^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{SQ} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \frac{v^2}{\mu/r} = 2\lambda^2$$

h) Do item d), sabemos que o ângulo entre os pontos Q_1 e Q_2 no hodógrafo é igual a ψ . Temos, do item anterior, que se traçarmos uma circunferência de raio $\lambda^2 \mu/h$ tangente ao hodógrafo num ponto Q qualquer, ela conterà a origem. Logo, como temos dois pontos Q_1 e Q_2 , temos duas circunferências que se intersectam nos pontos O_1 e O_2 , dando duas posições possíveis para a origem. Chame o centro dessas circunferências de G_1 e G_2 , respectivamente. Por definição, $\overline{CQ_1} = \overline{CQ_2} =$

μ/h ; logo, segue que

$$\overline{CG_1} = (1 - \lambda_1^2)\mu/h \quad \text{e} \quad \overline{CG_2} = (1 - \lambda_2^2)\mu/h,$$

ou, ainda,

$$\frac{\overline{CG_1}}{\overline{CG_2}} = \frac{1 - \lambda_1^2}{1 - \lambda_2^2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Onde utilizamos o resultado do item A.6. Essa equação implica que o triângulo ΔG_1CG_2 e o triângulo de posições do enunciado são semelhantes! Agora, trace as tangentes do hodógrafo nos pontos Q_1 e Q_2 e chame o ponto em que elas se cruzam de T . Analisando o quadrilátero TQ_1CQ_2 , com $\overline{CQ_2} = \overline{CQ_1}$ e $\angle LCQ_1T = \angle LCQ_2T = 90^\circ$, é evidente que $\overline{QT_1} = \overline{QT_2}$, isto é, o ponto T possui potência igual em relação às duas circunferências. Disso segue que T está sobre o eixo radical delas (conjunto de pontos cujas potências em relação a elas são iguais), assim como O_1 e O_2 (que possuem potência nula). Assim, os três pontos estão sobre uma mesma reta, que é perpendicular ao segmento G_1G_2 , o qual tem uma orientação fixa devido à similaridade descoberta anteriormente.

Se variarmos as velocidades (e consequentemente os parâmetros de velocidade) nos pontos Q_1 e Q_2 , mantendo-os fixos, temos que T também é fixo, e a orientação do eixo radical é determinada por G_1G_2 , temos que ele também é fixo! Assim, todas as trajetórias devem estar sobre essa reta, que denominaremos *linha das origens*. Nos resta descobrir a orientação dessa reta em função dos parâmetros intrínsecos. Após um pouco de geometria, obtemos $\angle LQ_1TO_2 = \varphi_1$ e $\angle LQ_2TO_2 = \varphi_2$. Qualquer uma dessas respostas seria válida, porém, será usada aquela centrada no ponto médio do arco θ e tirando o bissetor da reta que passa por T e C . Por simetria,

$$\angle LCTQ_2 = \angle LCTQ_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2.$$

Portanto, $\delta = \varphi_2 - (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = (\varphi_2 - \varphi_1)/2$.

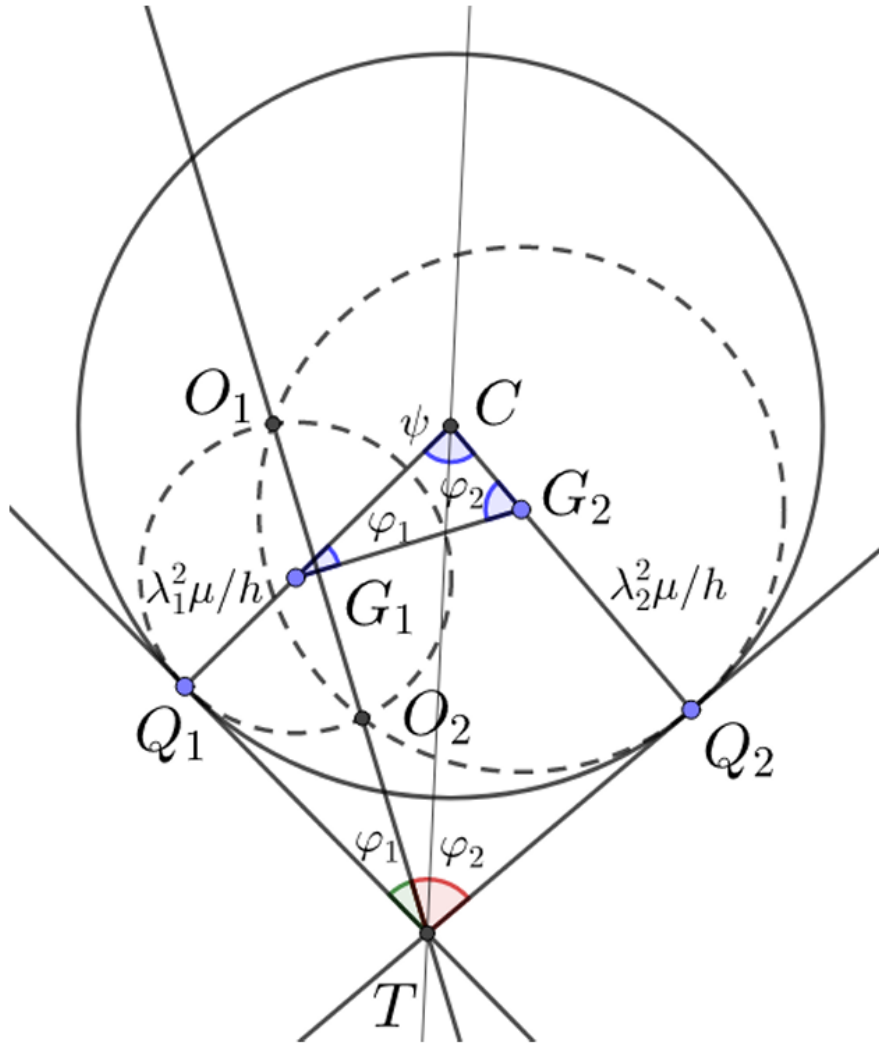


Figura 2.25: Caption

- i) Quando a excentricidade for mínima, pela construção do hodógrafo, a distância do centro até a origem será mínima. É evidente que somente um ponto na linha das origens satisfaz essa condição, de forma que $\angle LTG_1C = 90^\circ$. Por geometria,

$$CT = \overline{CQ_2} \sec \frac{\psi}{2} \implies OC = \overline{CQ_2} \sec \frac{\psi}{2} \sin \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2}$$

$$\therefore e_{\min} = \sec \left(\frac{\psi}{2} \right) \sin \left| \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right|$$

pr 40. A partir das propriedades do hodógrafo, encontre o ponto de uma órbita elíptica no qual a velocidade radial é máxima. Além disso, encontre uma expressão para essa velocidade em função da constante gravitacional G , da massa central M e do semieixo maior da órbita a .

Solução:

Observando a figura 1.19 podemos perceber que a velocidade radial é máxima quando $S = C$, isso nos daria um ponto com $\theta = \pi/2$, que é o famoso Semi-Latus-Rectum.

Sabemos que $v^2 = v_r^2 + v_t^2 \rightarrow v_r^2 = v^2 - v_t^2$. Utilizando a equação polar da elipse, a equação vis-viva e conservação de momento angular

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad L = mrv_t$$

Utilizando que $\theta = \pi/2$ encontramos $r = a(1 - e^2)$, substituindo nas demais formulas

$$v^2 = \frac{GM}{a} \frac{1 + e^2}{1 - e^2}, \quad v_t^2 = \frac{L^2}{m^2 a^2 (1 - e^2)^2}$$

Substituindo $L = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$ temos

$$v_t^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)}$$

Voltando a nossa expressão para v_r

$$v_r^2 = \frac{GM}{a} \frac{1 + e^2}{1 - e^2} - \frac{GM}{a(1 - e^2)} = \frac{GM}{a} \frac{e^2}{1 - e^2}$$

Tirando a raiz

$$v_r = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{e^2}{1 - e^2}}$$

pr 41. Suponha que um exoplaneta distante orbita sua estrela central em uma órbita elíptica que possui o eixo maior alinhado com a linha de visada de um observador na Terra. A partir das propriedades do hodógrafo, encontre em qual ponto da órbita a velocidade radial vista da Terra é máxima. Além disso, encontre uma expressão para essa velocidade em função da constante gravitacional G , da massa central M e do

semieixo maior da órbita a .

Solução: Considere a seguinte imagem

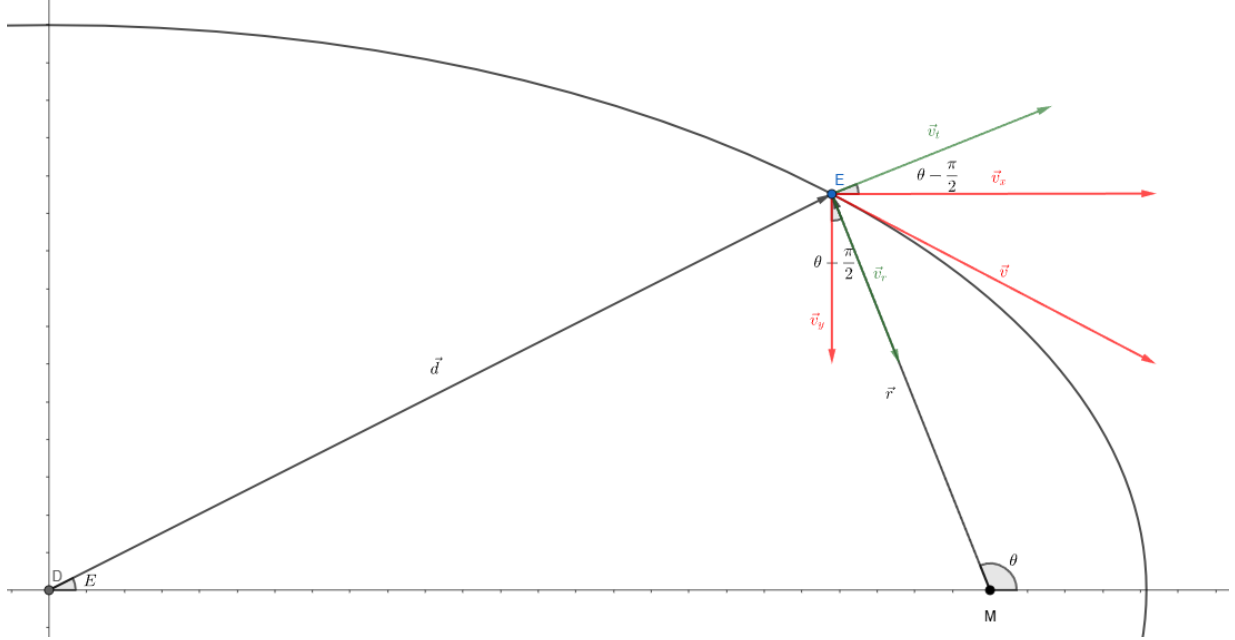


Figura 2.26: Caption

No esquema a cima, consideramos que a Terra está localizada no eixo x . A velocidade raial vista da Terra será v_x . Utilizando geometria, podemos obter as seguintes relações

$$(1) v_x^2 = v^2 - v_y^2$$

$$(2) v_r^2 = v^2 - v_t^2$$

$$(3) v_y = v_r \cos(\theta - \pi/2) = v_r \sin \theta$$

Substituindo (3) em (1)

$$v_x^2 = v^2 - v_r^2 \sin^2 \theta$$

Utilizando o resultado de (2)

$$v_x^2 = v^2(1 - \sin^2 \theta) + v_t^2 \sin^2 \theta \equiv v^2 \cos^2 \theta + v_t^2 \sin^2 \theta$$

Utilizando a equação polar da elipse e a equação vis-vida, podemos encontrar v^2

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = GM \left(\frac{2 + 2e \cos \theta}{a(1 - e^2)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \theta}{1 - e^2}$$

E por conservação do momento angular

$$v_t^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{GM}{a} \frac{1 + e \cos \theta}{1 - e^2}$$

Substituindo na fórmula de v_x

$$v_x^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} [(1 + e^2 + 2e \cos \theta) \cos^2 \theta + (1 + e \cos \theta) \sin^2 \theta]$$

Há duas maneiras de achar o θ que maximiza essa função, o primeiro método utiliza que $dv_x/d\theta = 0$ e o segundo, utiliza-se da figura 1.19 para notar que o maior valor que a componente v_x pode ter é o próprio raio do hodógrafo, quando $\theta = \pi/2$. De ambas as maneiras, obtemos

$$v_{x,max} = \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}}$$

pr 42. Neste problema, iremos estudar o comportamento de um planeta misterioso e as condições para que possa existir vida nele.

a) A zona de habitabilidade de uma estrela é definida como aquela na qual água em estado líquido pode existir na superfície de um corpo negro. Portanto, considerando que o planeta misterioso seja um corpo negro ideal de rotação rápida, determine a excentricidade máxima de sua órbita para que ele possa abrigar vida. Despreze quaisquer efeitos termodinâmicos que possam ocorrer no espaço sideral ou na atmosfera.

b) Foi achado o vetor velocidade do planeta em dois pontos distintos da órbita, A e B . Sabe-se que:

(i) $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ fazem um ângulo ϕ entre si, com $0 \leq \phi \leq \pi$

(ii) $|\vec{v}_1| = n|\vec{v}_2|$

Assim, determine a relação entre ϕ e n para garantir que o planeta possa abrigar vida.

Solução:

a)

pr 43. Obtenha uma equação para o limite de Jeans, isto é, a massa crítica acima da qual uma nebulosa colpsa para formar uma estrela. Escreva o resultado em função da temperatura T , da massa molar μ do gás que constitui a nebulosa e sua densidade ρ .

Solução: A nebulosa ira colapsar quando chegar na situação limite do Teorema do Virial, isto é

$$2K + U = 0$$

Considerando que a núvem é composta principalmente por H_2 (contendo 5 graus de liberdade), temos,

$$2 \left(\frac{5Nk_B T}{2} \right) - \frac{3GM^2}{5r} = 0$$

Onde N é o número de moléculas de H_2 e r o raio da nebulosa. Dividindo ambos os lados por M e usando que $R = k_B A$ onde R é a constante dos gases ideais e A o número de avogadro, temos,

$$\frac{5RT}{\mu} = \frac{3GM}{5r}$$

Agora precisamos escrever r em função da densidade:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r^3} \rightarrow r = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$$

Aplicando a substituição,

$$\frac{5RT}{\mu} = \frac{3GM}{5} \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{1/3}$$

$$\frac{5RT}{\mu} = \frac{3GM^{2/3}}{5} \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3}$$

Isolando M chegamos ao resultado desejado,

$$M = \left(\frac{25RT}{3\mu G} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}$$

pr 44. Encontre a massa total de um aglomerado de galáxias sabendo que a velocidade radial quadrática média das galáxias em relação ao centro de massa do aglomerado é $v_{r,rms}$. Suponha que a distribuição de massa do aglomerado é esférica e uniforme, possuindo raio R .

Solução: Pela simetria da distribuição de velocidades, $v_{r,rms}^2 = \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, desse modo, $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3v_{r,rms}^2$. No limite de massa, o aglomerado obedecerá o limite do Teorema do Virial,

$$2K + U = 0 \rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \right) = \frac{3GM^2}{5R}$$

Usando o teorema das médias,

$$\sum_i m_i v_i^2 = M \langle v^2 \rangle \equiv 3M v_{r,rms}^2$$

Podemos simplificar a nossa expressão do Teorema do Virial,

$$3M v_{r,rms}^2 = \frac{3GM^2}{5R}$$

Resolvendo para M , obtemos,

$$M = \frac{5R v_{r,rms}^2}{G}$$