

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Óptica e Telescópios

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia
Franklin Costa

Revisão

Felipe Maia

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projeto noic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 6

Óptica e Telescópios

pr 1. (IOAA 2023 - Adaptado) Considere um cone de superfície lateral semi-refletora, com abertura de 30° e eixo de simetria paralelo à horizontal. Luz solar incide na superfície interna do cone paralelamente à horizontal. Sabendo disso, calcule o número total de reflexões sofridas pela luz solar antes de sair do cone.

Solução:

Como a luz incide paralelamente ao horizonte, o ângulo de desvio entre a luz incidente e a luz relativa será $2 \cdot 30^\circ$. Para a Luz voltar, ela precisa percorrer 360° , assim

$$n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

pr 2. Considere dois espelhos acoplados separados por um ângulo θ entre si. Um raio de luz incide no sistema paralelamente ao eixo de simetria dos espelhos. Sabendo disso, encontre o número de reflexões n que o raio de luz sofrerá.

Solução: Utilizando o mesmo raciocínio do exercício anterior,

$$n = \frac{2\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{\theta}$$

pr 3. Para o mesmo cenário do problema 1, considere agora que um asteroide atinge o cone, com seu vetor velocidade paralelo à horizontal, a partir de um parâmetro de impacto b em relação ao seu eixo de simetria e velocidade inicial v_0 . Nesse caso, devido à atração gravitacional entre o cone e o asteroide, o movimento do asteroide é sujeito

a um potencial do tipo $U = -\frac{k}{r}$, em que r é a distância do asteroide até o vértice do cone.

Sabendo disso, calcule a distância mínima entre o asteroide e o vértice do cone.

Solução:

Utilizando conservação de energia e o conceito de potencial efetivo, temos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} - \frac{k}{r} \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = cte$$

O valor mínimo de r se dá quando $\dot{r} = 0$, assim

$$E = U_{eff}(r_{min})$$

Do momento inicial, temos $E = \frac{1}{2}mv_0^2$ e $L = mv_0b$

Equacionando

$$\frac{L^2}{2mr_{min}^2} - \frac{k}{r_{min}} = E$$

$$Er_{min}^2 + kr_{min} - \frac{L^2}{2m} = 0$$

Resolvendo para r_{min} e admitindo apenas a solução positiva,

$$r_{min} = \frac{-k + \sqrt{k^2 + \frac{2EL^2}{m}}}{2E}$$

Simplificando

$$r_{min} = -\frac{k}{2E} + \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

Finalmente, substituindo E e L , obtemos

$$r_{min} = -\frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}$$

pr 4. Calcule o valor crítico do ângulo de incidência θ_1 da luz, em relação à normal da interface que separa os meios de índices de refração n_1 e n_2 , para que não haja refração

Solução:

Na situação de máximo, teremos o seguinte esquema

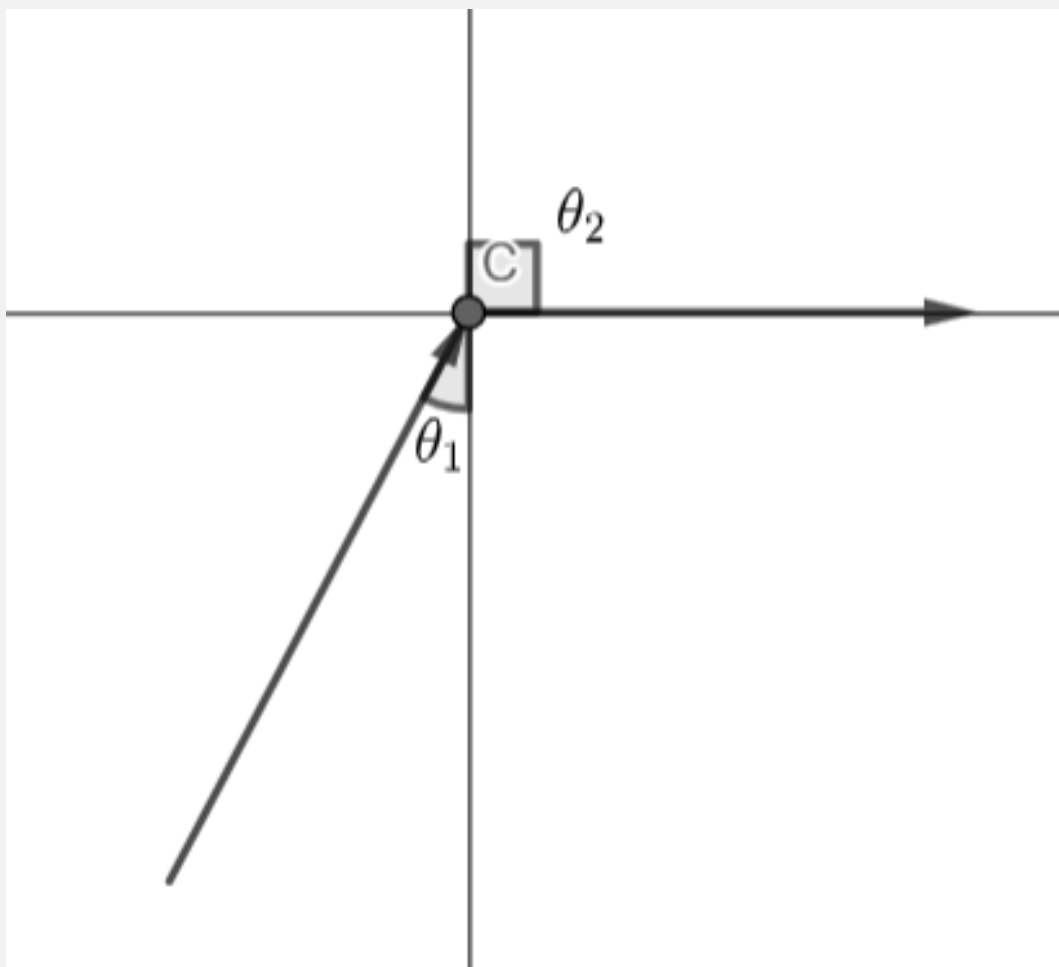


Figura 6.1: Esquema da refração

E utilizando a Lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Mas como $\theta_2 = \pi/2$, $\sin \theta_2 = 1$, logo

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

pr 5. (Romênia) A atmosfera da Terra pode ser modelada como um gás ideal de temperatura uniforme T e massa média M , enrolado em torno de uma esfera de raio r_0 . O campo gravitacional é constante e dado por g . Se o índice de refração de um ponto da atmosfera é proporcional à sua densidade $n = \alpha \rho$, determine a altura h , acima

da superfície da Terra, em que um raio de luz viaja em círculo ao redor do planeta.

Solução:

Da lei dos gases ideais, temos

$$PM = \rho RT$$

Utilizando o gradiente de pressão

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g$$

Juntando as duas expressões,

$$\frac{RT}{M} \frac{d\rho}{dh} = -\rho g$$

Integrando,

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Derivando a expressão $nr \sin \theta = cte$ com relação ao raio e tomando $\theta = 90^\circ$, a condição para um raio óptico fazer um círculo perfeito é

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = -\frac{1}{r}$$

Onde $r = r_0 + h \Rightarrow h = r_0 - r$.

Assim,

$$\frac{1}{\alpha \rho_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}} \cdot \frac{Mg}{RT} \alpha \rho_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = \frac{1}{r}$$

Simplificando e resolvendo para h:

$$h = \frac{Mg}{RT} - r_0$$

pr 6. Um dos modelos simplificados propõe que a atmosfera é formada por N lâminas de face paralelas, cada uma com índice de refração n_k diferente e espessura d . De acordo com cientistas, o índice de refração de cada lâmina segue a relação de recorrência: $n_{k+1} = 0,99n_k$.

Sabe-se que, quando os raios solares fazem um ângulo θ_0 em relação à normal do meridiano das lâminas, eles sofrem reflexão total. Com base nisso, calcule a altura da

atmosfera.

Solução:

Perceba que os índices de refração geram uma P.G. de razão 0,99. Seja n_0 tal que $n_k = n_0(0,99)^k$ para todo k . Aplicando a lei de Snell para a última e a primeira camada chegamos em:

$$n_0 \sin \theta_0 = n_0(0,99)^N \sin \theta_N \Rightarrow N = \frac{\ln(\sin \theta_0)}{\ln 0,99}$$

Sendo assim, a espessura da atmosfera será $\boxed{\frac{d \ln(\sin \theta_0)}{\ln 0,99}}$.

pr 7. Prove que a quantidade $n_i R_i \sin \theta_i$ para cascas esféricas adjacentes entre si, em que n_i é o índice de refração da i -ésima casca esférica, θ_i é o ângulo que o raio de luz faz com a normal da i -ésima casca esférica e R_i é o raio da i -ésima casca esférica, é uma invariante.

Solução:

Oberve a imagem

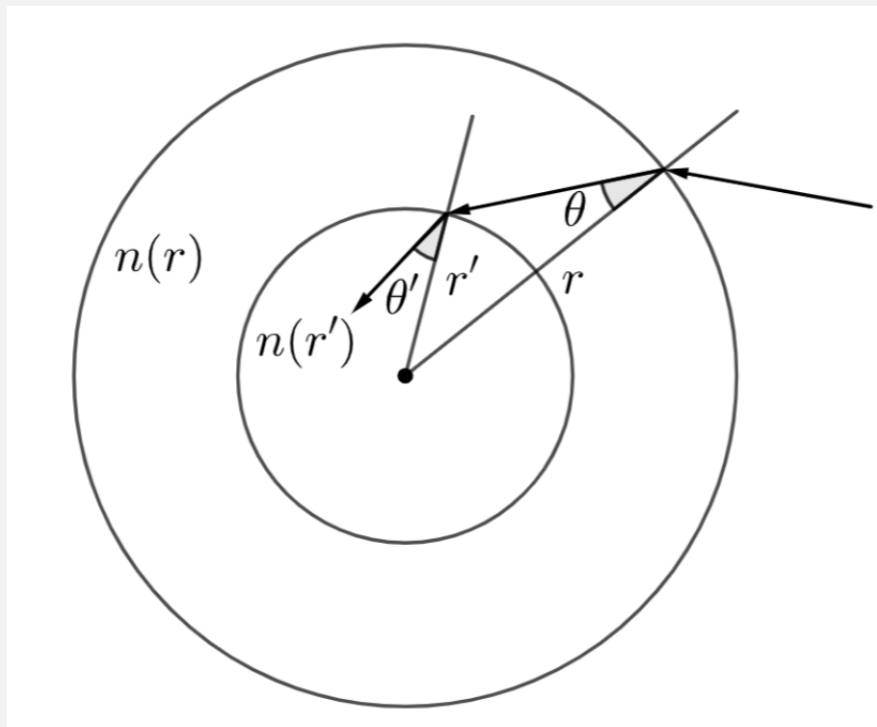


Figura 6.2: Esquema da situação

Pela Lei de Snell

$$n \sin(\pi - \alpha) = n \sin \alpha = n' \sin \theta' \rightarrow \sin \alpha = \frac{n'}{n} \sin \theta'$$

Mas pela lei dos senos

$$\frac{\sin \theta}{r'} = \frac{\sin \alpha}{r}$$

Substituindo $\sin \alpha$, nós chegamos em

$$\boxed{nr \sin \theta = n' r' \sin \theta'}$$

Como o esperado.

Solução (parcialmente focada):

Aplicando o conceito de analogia optico-mecânica, podemos usar que o movimento do feixe é análogo ao movimento de uma partícula de massa m sobre um potencial do tipo:

$$\sqrt{E - U_p(r)} \propto n(r) \Rightarrow v_p(r) \propto n(r)$$

Pela simetria esférica, o potencial é radial, logo a força é radial, sendo assim o momento angular $L = mv_p r \sin \theta$ é conservado. Portanto, voltando para o cenário original, temos que:

$$v_p r \sin \theta = cte \Rightarrow nr \sin \theta = cte$$

Observação: A lei de Snell para planos também pode ser deduzida de maneira análoga aplicando esse conceito de analogia óptico-mecânica para uma simetria axial. Além disso, esse método para solução de questões é extremamente geral e versátil, podendo ser aplicado para meios extremamente não homogêneos e sem nenhuma simetria trivial, onde vínculos geométricos como a lei de Snell serão mais complexos.

pr 8. O índice de refração da superfície terrestre depende da densidade local $n = \alpha\rho$. Com isso, os raios de estrelas distantes que chegam na atmosfera são curvados de sua trajetória inicial, gerando o fenômeno de refração atmosférica.

Nessa questão, considere um observador em um local de altitude zero e assuma que a atmosfera terrestre é isotérmica, com temperatura homogênea T e espessura muito pequena H , e considere que a massa dos gases que a compõe é dada por μ . O observador percebe que, devido à refração atmosférica, uma estrela originalmente com distância zenital z é observada com uma distância zenital $z' \neq z$.

Com base nisso, mostre que o valor do desvio $R \equiv z - z'$, para $R \ll 1$, é dado por:

$$R = \frac{A}{T} \tan z$$

e encontre o valor de A .

Solução:

Observe que H ser suficientemente pequeno nos leva a tomar a aceleração da gravidade $g = \frac{GM}{R^2}$ como constante. Sendo assim, o modelo para a atmosfera e para a refração são idênticos ao do problema 5, portanto:

$$n = \alpha \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}$$

Aplicando um operador diferencial na equação $nr \sin z = cte$, obtemos:

$$dnr \sin z + nr \cos z dz = 0 \Rightarrow -dz = \tan z \frac{dn}{n}$$

Aplicando as condições $-dz = R$ e $dr = -H$, chegamos na relação final:

$$R = \frac{\mu g H}{kT} \tan z \Rightarrow \boxed{A = \frac{\mu g H}{k}}$$

pr 9. Considere um raio de luz que chega na atmosfera com um ângulo θ em relação à normal da camada mais externa. Em função do índice de refração variável das diversas camadas, a trajetória do raio é distorcida em uma curva, como mostra a figura abaixo:

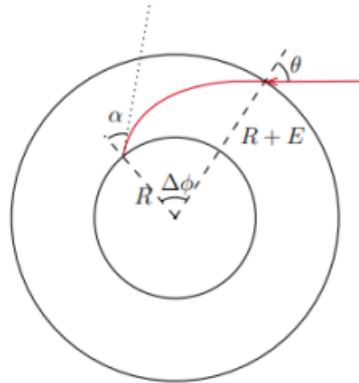


Figura 6.3

Perceba que no final, o astro em questão é observado com uma distância zenital α . De tal modo:

a) Encontre α sabendo que o índice de refração à uma distância r do centro do planeta é dado por:

$$n(r) = n_0 r^{-1} \quad \text{para } R \leq r \leq R + E,$$

de tal forma que na borda externa da atmosfera tal índice se iguala ao do vácuo.

b) Utilizando as aproximações explicitadas, encontre $\Delta\varphi$.

Solução:

a) Usando a lei de Snell para simetrias esféricas:

$$\frac{n_0}{R+E}(R+E)\sin\theta = \frac{n_0}{R}R\sin\alpha \Rightarrow \sin\theta = \sin\alpha$$

Como α e θ estão definidos no mesmo intervalo, a solução da equação será:

$$\boxed{\alpha = \theta}$$

b) Decompondo o vetor velocidade do feixe em suas componentes radial e tangencial, obtemos o seguinte vínculo:

$$\tan\alpha = -r \frac{d\phi}{dr}$$

Pelo item anterior, temos que $\tan\alpha$ é sempre constante, logo:

$$\int_0^{\Delta\phi} d\phi = -\tan\theta \int_{R+E}^R \frac{1}{r} dr \Rightarrow \Delta\phi = \tan\theta \ln\left(1 + \frac{E}{R}\right)$$

Usando a aproximação $\ln(1+x) \approx x$ quando $x \ll 1$, obtemos como resultado final:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{E}{R} \tan\theta}$$

pr 10. Imagine uma esfera de raio R e massa M homogeneamente distribuída pelo seu volume. A aceleração gravitacional na superfície da esfera vale g . Um túnel liso e estreito é construído em seu interior, conectando o Polo Norte (A) e um ponto no equador da esfera (B).

Uma pequena partícula é abandonada do repouso de A , e o túnel é construído de tal

forma que o tempo gasto para chegar até B através do túnel seja o menor possível. Sabendo disso, encontre o formato do túnel para que isso seja possível.

Solução:

Para construímos uma trajetória de menor tempo, vamos analisar qual seria o perfil da trajetória que um raio de luz seguiria caso fosse submetido a um meio de índice de refração análogo ao perfil de velocidade da partícula. Com o objetivo de simplificar a solução, vamos adotar um sistema de unidades tal que $R_{\oplus} = 1$ e $\frac{4\pi G\rho}{3} = 1$.

Aplicando a lei de Gauss para uma superfície esférica concêntrica com a Terra:

$$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G \iiint_V \rho dV \Rightarrow 4\pi r^2 g = -4\pi G \rho \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow$$

$$g = -\frac{4\pi G\rho}{3} r \Rightarrow U = \frac{2\pi G\rho}{3} r^2.$$

Pela conservação da energia mecânica:

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{2\pi G\rho}{3} r^2 = \frac{2\pi G\rho}{3} \Rightarrow v = \sqrt{1 - r^2} \Rightarrow$$

$$n(r) = \frac{c}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Pela equação de refração esférica:

$$nr \sin \theta = cte = a \Rightarrow nr = \frac{a}{\sin \theta} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \theta}}$$

onde $k = \frac{c}{a}$. Usando a equação de vínculo:

$$\tan \theta = -r \frac{d\phi}{dr} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{\tan \theta}{r} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{k^2 \sin^2 \theta}{1 + k^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{1 + k^2 \sin^2 \theta}.$$

Resolvendo essa equação diferencial usando a substituição $t = \tan \theta$, concluímos que:

$$\phi = \theta - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \arctan \left(\sqrt{1 + k^2} \tan \theta \right)$$

É conhecido que essa parametrização é equivalente a uma hipocicloide parametrizada na sua forma polar pelo ângulo do círculo rolante e razão entre os raios $n = 1 + \sqrt{1 + k^2}$.

Solução desfocada:

Em essencial o que o problema está pedindo é qual a curva S que minimiza o funcional

$$\Delta t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

onde ds é o comprimento de arco infinitesimal da curva. Pela simetria do problema, vamos expressar esse comprimento de arco em sua forma polar. Sendo assim

$$\Delta t = \int_A^B \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2}}{v} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2}}{v(r)} dr = \int_A^B \mathcal{L}\left(r, \frac{d\phi}{dr}\right) dr.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para esse funcional $\mathcal{L}$, chegamos em

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dr}\right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

como $\mathcal{L}$ não depende de θ , existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dr}\right)} = k$$

Usando a expressão obtida inicialmente para a velocidade em função do raio, substituindo em $\mathcal{L}$ e desenvolvendo a expressão, obtemos

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{1 - r^2}{r^2(1 + k^2)} - 1 \right)}$$

Ao tentar resolver essa equação diferencial, naturalmente somos levados a mudança de variável $\frac{1}{r^2} - 1 = k^2 \sin^2 \theta$. A partir de agora a solução continuaria idêntica à anterior.

Observação: O último método, mesmo sendo um pouco desfocado, é extremamente geral para problemas similares, tendo em vista que não depende de nenhuma simetria prévia para ser aplicado.

Observação: O conceito de analogia óptico-mecânica, apresentado no problema 7, também pode ser usado para resolver os problemas 9 e 10. Fica como exercício ao leitor essa solução.

pr 11. (IOAA 2014) No interior de uma câmera, é colocado um espelho plano ao longo do eixo óptico da objetiva. O comprimento do espelho é metade da distância focal da objetiva. Uma placa fotográfica é colocada no plano focal da câmera. Duas imagens de

Vega com diferentes brilhos são captadas.

A estrela não se encontra no eixo óptico da objetiva. A distância entre o eixo óptico e a imagem Σ_1 é $\frac{f}{2}$. Determine a diferença entre as magnitudes fotográficas aparentes das duas imagens de Vega.

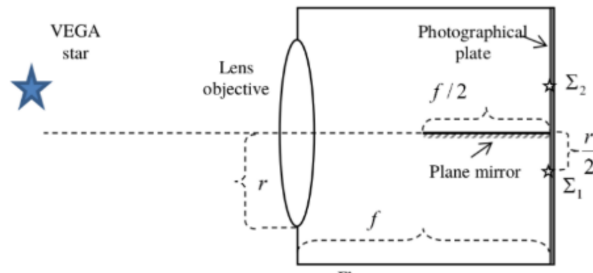


Figura 6.4

Solução:

O feixe de luz proveniente da Estrela Vega pode ser considerado paralelo, devido à distância entre ela e o observador na Terra. A explicação para a existência de duas imagens distintas da estrela é que o eixo óptico do objetivo não é paralelo ao feixe de luz vindo da estrela. As imagens na placa da câmera estão simetricamente posicionadas em relação ao eixo óptico principal.

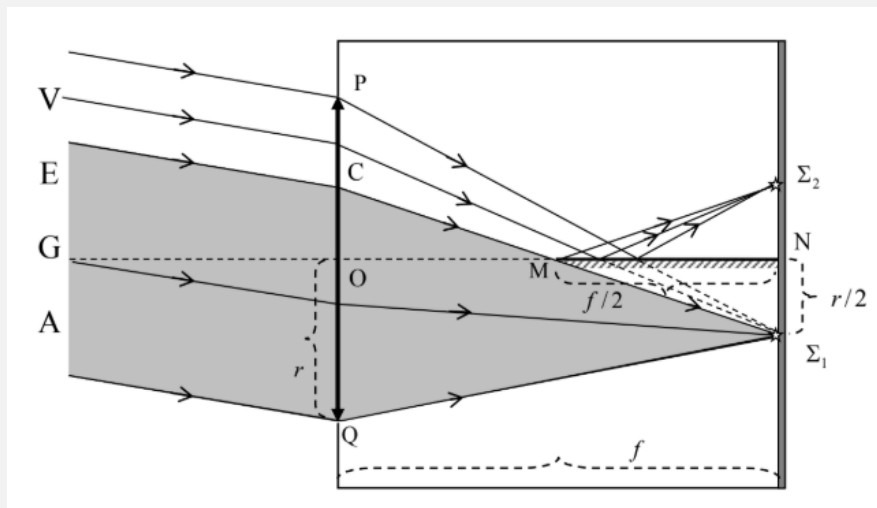


Figura 6.5

Cada uma das imagens pontuais da Estrela Vega, Σ_1 e Σ_2 , não concentrou o mesmo fluxo de luz. Na figura abaixo podem ser vistas as seções da lente que correspondem a

cada imagem. O setor $APBC$ é atravessado pela luz que se concentra na imagem Σ_2 , enquanto a luz que passa pelo setor $ACBQ$ se concentra na imagem pontual Σ_1 .

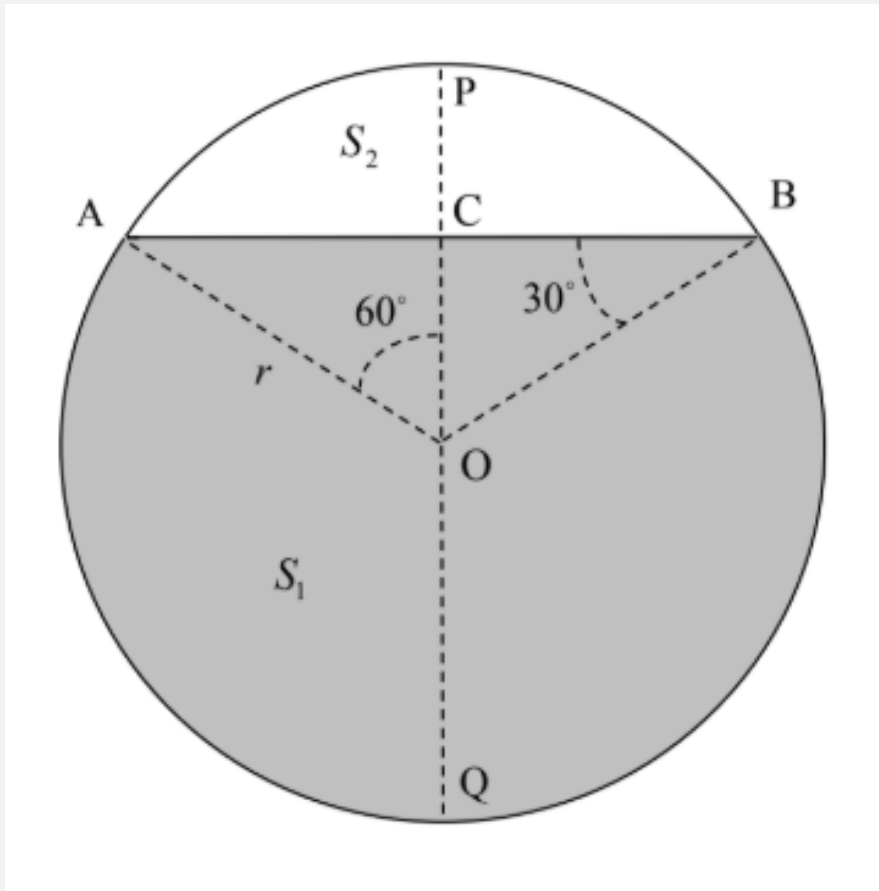


Figura 6.6

A razão entre os fluxos luminosos concentrados nos dois pontos de imagem dependerá diretamente da razão entre as áreas dos dois setores. Da geometria da figura 1.6 resulta:

$$MN = OM \Rightarrow N\Sigma_1 = OC = \frac{r}{2} \Rightarrow$$

$$\angle(CBO) = 30^\circ; \quad \angle(BOC) = 60^\circ; \quad \angle(AOB) = 120^\circ;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}} \approx 4.$$

Usando a fórmula de Pogson:

$$\log \frac{E_1}{E_2} = \log \frac{S_1}{S_2} = -0,4(m_1 - m_2), \Rightarrow$$

$$m_2 - m_1 = 1,5$$

pr 12. A aberração esférica de um espelho (esférico) define-se como a diferença entre a distância focal f de um raio próximo do eixo principal e a distância focal f' para um raio nas bordas. Sabe-se que α é o ângulo de incidência para um raio, paralelo ao eixo principal que incide na borda da lente. Determine o valor da aberração.

Solução:

Observe a seguinte geometria:

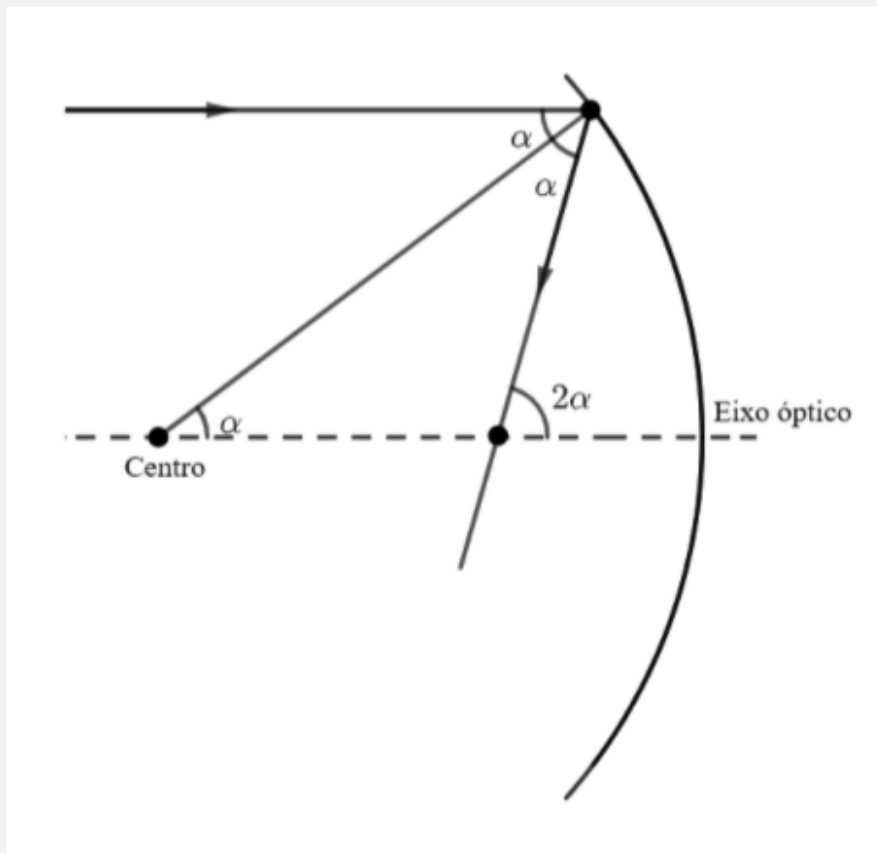


Figura 6.7: Enter Caption

Pela geometria:

$$f' = 2f - f \sec \alpha \Rightarrow f - f' = f(\sec \alpha - 1)$$

pr 13. Uma partícula eletricamente carregada move-se num meio de índice de refração n com velocidade $v = \beta c$, em que $\beta > 1$ e c é a velocidade da luz. A cada instante, a posição da partícula se constitui no vértice de uma frente de onda cônica de luz por

ela produzida que se propaga numa direção α em relação à da trajetória da partícula, incidindo em um espelho esférico de raio R como mostra a figura. Após se refletirem no espelho, as ondas convergem para um mesmo ponto no plano focal do espelho em F . Calcule o ângulo α e a velocidade v da partícula em função de c , r , R e n .

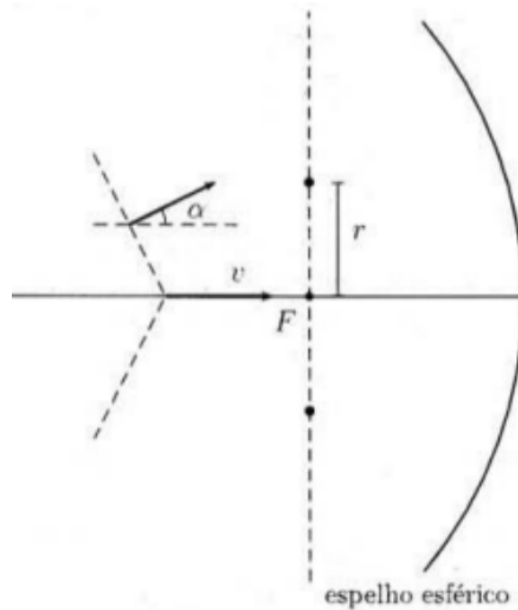


Figura 6.8: Caption

Solução:

Analisando em especial um raio de luz passando pelo foco do espelho, temos que:

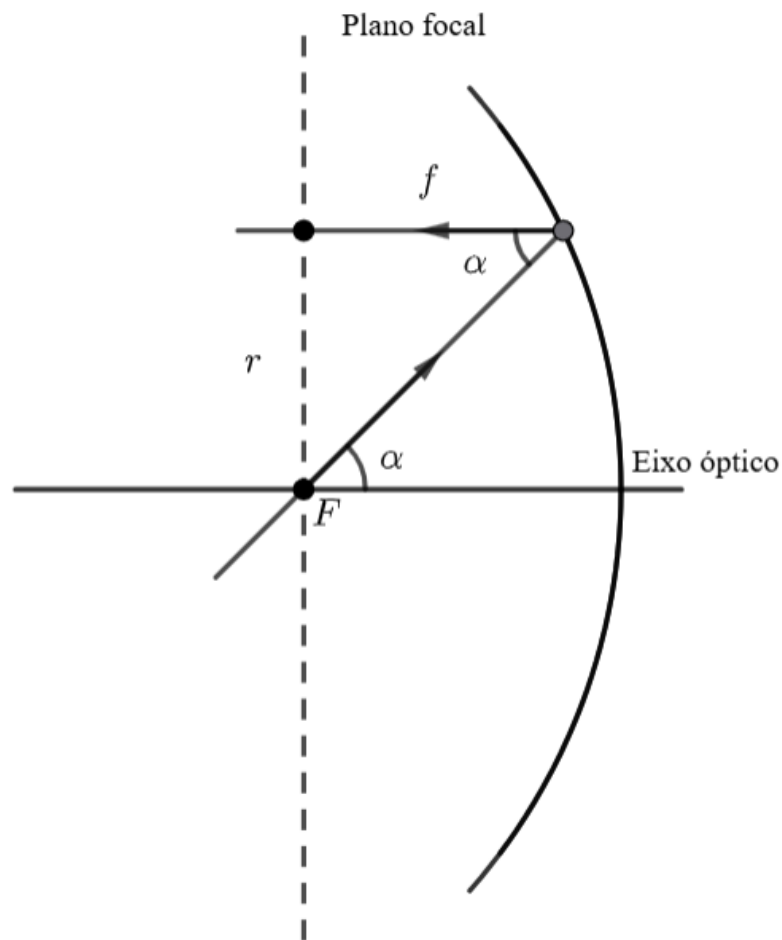


Figura 6.9

Pela geometria:

$$\tan \alpha = \frac{r}{f} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2r}{R}}$$

Analisando a emissão de radiação pela partícula:

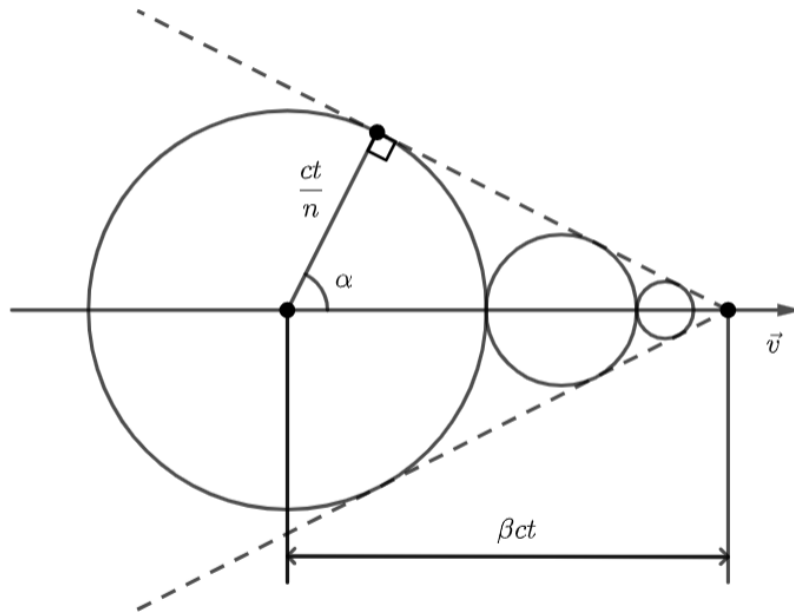


Figura 6.10

Novamente, pela geometria:

$$\cos \alpha = \frac{c}{nv} \Rightarrow v = \frac{c}{n \cos \alpha}$$

Utilizando a aproximação $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, obtemos como resposta:

$$v = \frac{c}{n} \frac{R^2}{R^2 - 2r^2}$$

pr 14. (Vinhedo 2020) Uma lâmpada de 40 W é apontada para um espelho côncavo com diâmetro igual a 20 cm. A lâmpada é esférica e seu diâmetro é igual a 2 cm. Qual é a distância máxima em que um observador conseguiria enxergar o espelho a olho nu?

Solução:

Solução oficial disponível [aqui](#) e [aqui](#).

pr 15. A figura a seguir mostra raios luminosos paralelos ao eixo y chegando em uma superfície refletora parabólica a qual pode ser representada como $y = kx^2$, onde k é um número positivo. Mostre que os raios, após a reflexão, vão para o ponto $(0, \frac{1}{4k})$.

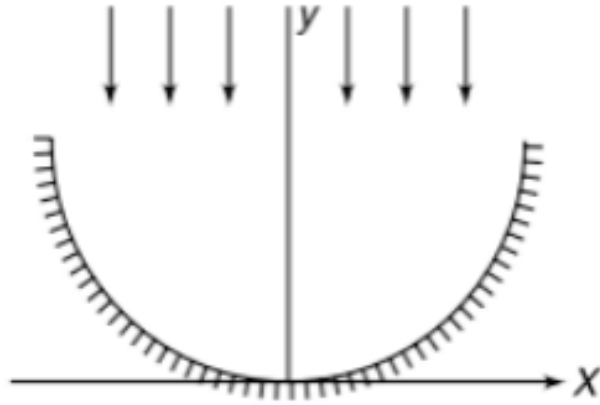


Figura 6.11: Caption

Solução:

Podemos escrever o vetor posição como (x, kx^2) , sendo assim o vetor tangente será $(1, 2kx)$. Para cumprir a lei de reflexão numa superfície, temos que a componente a soma do vetor do raio luminoso $(0, -1)$ com o vetor reflexão (a, b) , que indica a direção do raio luminoso após a reflexão, é proporcional ao vetor tangente, logo:

$$(a, b - 1) = -\lambda(1, 2kx) \Rightarrow (a, b) = (-\lambda, 1 - 2k\lambda x)$$

Além disso, o módulo desse vetor é igual ao módulo do vetor do raio, portanto:

$$\lambda^2 + (1 - 2k\lambda x)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{4kx}{1 + 4k^2x^2}$$

Agora para achar a interseção com o eixo óptico, basta obrigarmos a soma do vetor posição com um múltiplo do vetor reflexão ter componente x igual a zero, sendo assim:

$$(x, kx^2) + t \left(-\frac{4kx}{1 + 4k^2x^2}, \frac{1 - 4k^2x^2}{1 + 4k^2x^2} \right) = (0, y_0) \Rightarrow t = \frac{4k}{1 + 4k^2x^2} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{4k}}$$

pr 16. (Vinhedo 2022-Adaptado) Iremos estudar, nesse problema, as propriedades dos espelhos cônicos. Para isso, considere os seguintes itens:

- (a) Considere um elipsóide espelhado por dentro. Prove que qualquer raio de luz que parte de um dos focos da cônica reflete e incide no outro foco dela.

Dica: Fazer a questão de trás para frente, isto é, provar que o caminho que liga um foco ao outro que toca uma vez na cônica pode ser realizado por um raio de

luz, pode ser bem mais prático.

- (b) Considere um parabolóide espelhado por dentro (parte côncava). Prove que qualquer raio de luz que parte do foco da parábola reflete e saem paralelos ao eixo dela.
- (c) Considere um hiperbolóide espelhado por fora (parte convexa). Prove que qualquer raio de luz que está direcionado para o foco, reflete na curva e incide no foco da outra metade da hipérbole (que não foi considerada).

Solução:

Solução oficial disponível [aqui](#).

pr 17. (Vinhedo 2024) A objetiva e a ocular de um telescópio são lentes simétricas duplamente convexas feitas de vidro com um índice de refração $n = 1.5$. O telescópio é ajustado ao infinito quando a separação entre a objetiva e a ocular é $L_0 = 16$ cm. Determine a distância L que separa a objetiva e a ocular do telescópio ajustado ao infinito quando há água no espaço entre a objetiva e a ocular ($n_W = 1.3$).

Solução:

Solução oficial disponível [aqui](#).

pr 18. (Vinhedo 2022) Em um belo dia, o astrônomo Komato e seu fiel companheirinho, Ualypinho, decidiram montar um telescópio kepleriano afocal com comprimento de tubo variável. As distâncias focais das lentes usadas, medidas no ar, são iguais a f_{ob} , para a objetiva, e f_{oc} , para a ocular, ambas de material de índice de refração n_L . Inicialmente, o comprimento do tubo é d . Infelizmente, esse belo dia se transformou em uma triste noite, pois Ualypinho falhou em apontar para Vênus, resultando em um estrondoso chorinho. Em decorrência de sua tristeza, o interior do tubo do telescópio foi inteiramente preenchido pelas lágrimas do pequeno astrônomo, descalibrando, dessa forma, o telescópio afocal da dupla. Com o intuito de apoiar seu colega, Komato propõe uma alteração no comprimento do tubo, para que ele volte a suas características iniciais, sem que as lágrimas sejam retiradas.

Dados: Índice de refração das lágrimas: n , índice de refração do ar: $n_{ar} = 1$.

- (a) Determine d em função de f_{ob} e f_{oc} segundo as condições do problema.

- (b) Escreva uma expressão para o novo comprimento do tubo, d , após as alterações de Komato.

Expresse sua resposta em termos de n , n_L e d .

Solução:

Solução oficial disponível [aqui](#).

pr 19. (Vinhedo 2020) Bruno Pizza está apaixonadamente olhando para a estrela Lais, da constelação de Borbolatus, sem óculos, e com um telescópio refrator kepleriano (isto é, duas lentes delgadas convergentes). Todavia, algo está errado: a vista está borrada. O jovem astrônomo então ajusta a ocular a movendo uma distância L_{oe} , mantendo o alinhamento das lentes no eixo do telescópio, e a imagem torna-se nítida.

- (a) Após deslocar a ocular, os raios de luz deixam de sair paralelos da lente secundária e formam uma imagem. Encontre uma expressão para L_{oe} em função da distância focal da ocular, f_{ocu} , e de q : coordenada da imagem final formada pelo telescópio em relação à ocular e na direção do eixo do tubo. Considere que, inicialmente, os planos focais das lentes eram coincidentes.

Importante: lembre-se de verificar se o sinal de q .

- (b) O "grau" de óculos é, na verdade, a medida da dioptria V da lente. Sabe-se que o telescópio do rapaz tinha $f_{ocu} = 20$ mm, seus óculos possuem $-3,0$ di de grau e a distância focal regular do olho humano sem problemas visuais é $16,3$ mm. A ocular foi movida a que distância L_{oe} , em mm?

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#) e [aqui](#).

pr 20. (Vinhedo 2022) A Luneta utilizada por Galileu era um instrumento de pequenas dimensões, constituído por uma objetiva cromática (formada por uma única lente convergente). Porém, uma objetiva de somente uma lente não é satisfatória para propósitos astronômicos, pois a imagem produzida por ela sofre defeitos e aberrações de diversos tipos. Assim, os telescópios refratores só começaram a atingir as dimensões atuais com a invenção da objetiva acromática. Esse tipo de objetiva foi proposta em 1733 por Chester More Hall e tem o intuito de reduzir os efeitos da aberração cromática.

A primeira objetiva desse tipo foi feita por John Dollond em 1759.

Nesta questão, iremos estudar o método de acromatismo e como podemos minimizar o efeito de aberração cromática em telescópios refratores. Na imagem abaixo, pode-se observar um esquema de duas lentes recebendo luz de um objeto impróprio (*e.g.* Lua) e uma lente equivalente azul que pode substituir as duas outras lentes para gerar uma mesma imagem. Note que, assim como foi ilustrado, isso só ocorre quando o raio de luz que sai da L_2 é paralelo ao raio que sairia de L_{eq} .

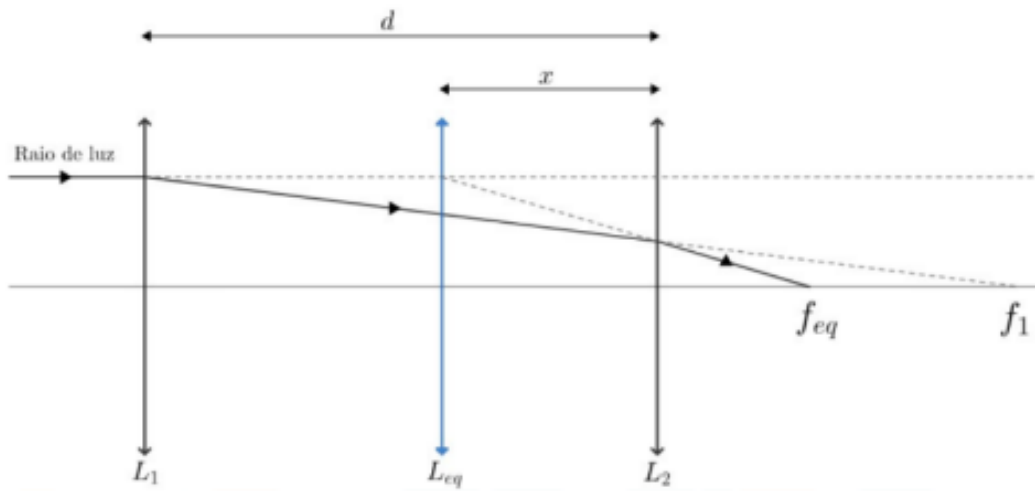


Figura 6.12: Caption

Seção A: Encontrando o Foco

- (a) Como foi discutido acima, é possível imaginar uma lente equivalente que possui as mesmas propriedades que o dubleto utilizado. Mostre que a distância focal equivalente dessa lente equivalente é dada por:

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

- (b) Nesse caso, a que distância x de L_2 devemos colocar a lente equivalente?

Seção B: Construindo um Dubleto

Vamos investigar agora a construção de um telescópio acromático. Para isso, considere uma lente qualquer, L_i , constituída por um material cujo índice de refração é n_i .

Assuma que ela possui duas faces convexas de raios r_i e r'_i . Para a solução dos itens abaixo, tome

$$k_i = \frac{r'_i}{r_i} \quad \text{e} \quad t_i = r'_i + r_i.$$

- (a) Para uma lente qualquer, determine uma expressão para sua distância focal em função de k e n .
- (b) Encontre uma expressão para a distância focal efetiva de um sistema de duas lentes como função de κ_1 , κ_2 , n_1 , n_2 e d .

Seção C: Método de Acromatismo

Agora que sabemos a distância focal efetiva do dubleto construído, precisamos nos assegurar que não haverá efeitos de aberração cromática nas imagens produzidas. Para tanto, considere que o índice de refração para a cor azul em uma lente é dado por $n_{i,A}$, enquanto para o vermelho é dado por $n_{i,V}$.

- (a) Para que exista uma condição de acromatismo, prove que κ_2 pode ser escrito na forma:

$$\kappa_2 = Ad - B\kappa_1.$$

- (b) Quais são os parâmetros A e B ?

Foram utilizados dois materiais para a lente, conforme a tabela abaixo.

Tabela 6.1: Índices de Refração para as Lentes Analisadas

Lente Analisada	Cor	Índice de Refração
Lente 1	Azul	1,52136
	Vermelho	1,50917
Lente 2	Azul	1,74256
	Vermelho	1,71589

- (f) Qual a distância entre as duas lentes de modo que a aberração cromática seja mínima? Considere $\kappa_1 = 600 \text{ cm}$ e $\kappa_2 = 2400 \text{ cm}$. Sua resposta deve estar em metros.
- (g) O fabricante das lentes utilizadas indicou que o melhor a se fazer era justapor as duas lentes, criando, dessa forma, um Dubleto Acromático (ou seja, $d = 0$).

Utilizando-se da equação obtida no item (e), encontre a razão $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$. O que ela nos diz sobre o sinal das lentes utilizadas? A razão encontrada pode ser literal, em função de $n_{i,A}$ e $n_{i,V}$ de cada lente L_i usada.

Solução:

Solução oficial disponível [aqui](#).

pr 21. (Vinhedo 2022) Olga está fotografando auroras boreais com sua câmera que consiste de um sensor fotoelétrico quadrado de lado $2h = 2,0$ cm e uma lente convexa de distância focal $f_1 = 14,0$ cm. Entretanto, ela gostaria de utilizar uma câmera com comprimento menor que $L_m = 7,0$ cm. Para tal, ela troca a lente original por uma lente convexa de distância focal $f_2 = 3,0$ cm a uma distância L_m do sensor fotoelétrico. Qual deve ser a distância focal de uma lente côncava que deve ser adicionada ao sistema para que o campo de visão da câmera seja idêntico ao da câmera original? Encontre também a distância entre as lentes côncava e convexa da nova câmera, assim como o campo de visão θ **sem** utilizar aproximações algébricas.

Solução:

A solução oficial está [aqui](#).

pr 22. O quão mais brilhante é a imagem da Lua formado por um telescópio de distâncias focais f_{ob} e f_{oc} ? E no caso de estrelas?

Solução:

Para fontes extensas (Lua), o brilho superficial B da imagem é inversamente proporcional ao quadrado da ampliação $M = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$. Assim,

$$B \propto \left(\frac{f_{oc}}{f_{ob}} \right)^2$$

Para fontes pontuais (estrelas), toda a luz coletada pela objetiva é concentrada no disco de difração, de área fixa. Portanto, o brilho da imagem cresce proporcionalmente à área da objetiva πD^2 , logo:

$$I \propto D^2$$

pr 23. (200 More Puzzling Physics Problems) Por quanto pode um pequeno corpo negro esférico ser aquecido pelo brilho do Sol, usando uma lente convexa fina que tem uma distância focal igual ao dobro do seu diâmetro? O resultado depende do raio da esfera?

Solução:

Observe a geometria da situação:

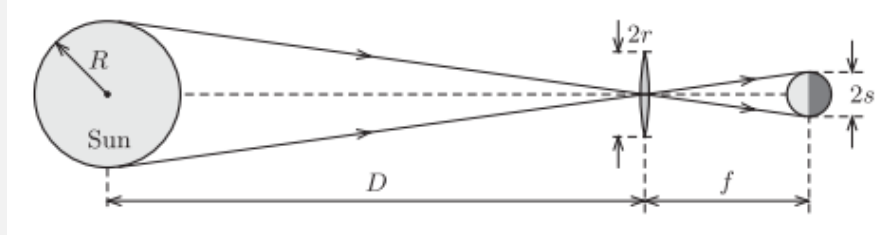


Figura 6.13

A potência total que a lente recebe é

$$P = \left(\frac{R}{D}\right)^2 \pi \sigma T_{\odot}^4 r^2.$$

Pelas considerações geométricas, o raio s da imagem solar é $s = \frac{R}{D}f$, e portanto

$$P = \pi \left(\frac{rs}{f}\right)^2 \sigma T_{\odot}^4.$$

Se o raio da esfera no problema é $\rho = s$, a potência absorvida é P , mas a potência emitida é $4\pi s^2 \sigma T^4$. Segue que:

$$T = (1/64)^{1/4} T_{\odot} \approx 2040 \text{ K} \approx 1770^\circ \text{C}.$$

Se o raio da esfera fosse menor que o raio da imagem solar ($\rho < s$), a esfera ainda aqueceria até o mesmo valor. Por exemplo, se o raio da esfera fosse metade do raio da imagem, então a energia solar atingindo a esfera em uma unidade de tempo seria um quarto da que atinge a lente, mas como sua área de reemissão é também um quarto da de uma esfera de raio s , ela atinge a mesma temperatura.

Se o raio da esfera for maior que o raio da imagem solar, e o material não for um isolante perfeito, sua temperatura máxima será menor do que o valor calculado acima.

pr 24. (Vinhedo 2020) Um telescópio refletor do tipo Cassegrain foi encomendado em uma loja especializada por Nathan. Ele pediu para que algumas especificações feitas por ele fossem atendidas e que as demais escolhas poderiam ser feitas pelo dono da loja, Shell. Nathan determinou que o foco da imagem deveria ficar a 10 cm atrás do espelho primário, sendo que este deveria ser parabólico (com distância focal de 50 cm) e que o diâmetro do telescópio seria de 200 mm. Shell, curioso para ver como o espelho secundário afetaria alguns parâmetros no telescópio de Nathan, decidiu fazer alguns cálculos com dois modelos de espelhos secundários:

O modelo 1 consistia apenas de um espelho plano, enquanto o modelo 2 correspondia a um espelho hiperbólico de semi-eixo maior igual a 15 cm. Além disso, Nathan possuía planos de acoplar ao telescópio uma câmera CCD.

- Calcule a distância focal do telescópio para cada modelo.
- Pensando na matriz CCD que seria acoplada posteriormente, determine a escala de placa para cada modelo (em "/pixel). Qual possui maior campo angular da matriz?
- Determine a magnitude limite observada pelo telescópio e o seu poder de resolução (em segundos de arco). Considere a mesma matriz CCD para ambos os modelos e despreze a espessura do espelho primário.

Dados: O lado de um pixel é $L_p = 1,95 \times 10^{-5}$ m e $\lambda_{\text{visível}} = 550$ nm.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#) e [aqui](#).

pr 25. (Vinhedo 2021) Bismarck, um astrônomo muito curioso, resolveu investigar as propriedades de um espelho parabólico. Para tanto, comprou um telescópio com foco Cassegrain com espelho primário parabólico de abertura $D = 160$ mm e distância focal $f_p = 700$ mm.

O espelho secundário é hiperbólico com semi-eixo maior de comprimento $a = 150$ mm e a distância focal do telescópio é $f = 1600$ mm. Ajude Bismarck e faça o que se pede.

- Considere uma superfície parabólica espelhada. Partindo de uma equação de parábola $y = a(x^2 - x_0^2)$, demonstre o fato de que qualquer raio paralelo ao eixo y que incidir sobre a referida superfície será refletido para o mesmo ponto P .

Calcule as coordenadas do ponto P .

- b) Usando a equação de parábola do item anterior, determine o parâmetro a para o espelho de Bismarck.
- c) Quantos centímetros após o espelho primário é focalizada a imagem produzida pelo telescópio do astrônomo?
- d) Determine o comprimento do tubo do telescópio.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 26. (Vinhedo 2020-Adaptado) O telescópio de Galileu é formado por duas lentes esféricas gaussianas delgadas: a objetiva (lente convergente L_1) e a ocular (lente divergente L_2). As lentes são ajustadas de tal forma que o feixe de luz emergente da objetiva atinge a ocular antes da imagem real I_1 se formar.

Nessa situação, I_1 se comporta como objeto virtual para a ocular, situado entre o foco-principal objeto e o ponto anti-principal objeto desta lente, formando a imagem virtual I_2 .

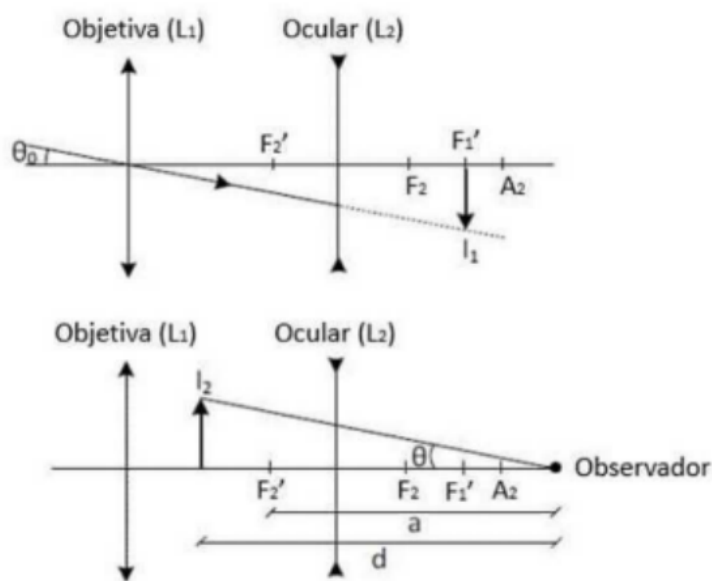


Figura 6.14

- a) Determine o aumento visual (ampliação angular), $G = \frac{\theta}{\theta_0}$, em função das distâncias focais das lentes e dos parâmetros a e d mostrados na segunda figura.
- b) Mostre que na condição nominal (no limite em que a posição da imagem final tende ao infinito), o aumento visual depende apenas das distâncias focais.
- c) Demonstre, agora, que para um telescópio kepleriano, a fórmula do aumento visual na condição nominal é idêntica à encontrada no item anterior.

Solução:

A solução oficial para os itens a) e b) está disponível [aqui](#) e [aqui](#).

- c) Perceba que, matematicamente, uma lente divergente é completamente análoga a uma lente convergente com distância focal negativa. Sendo assim, toda a demonstração dos itens anteriores é análoga para um telescópio kepleriano apenas aplicando a simetria $f_2 \rightarrow -f_2$. Logo a expressão para o aumento visual será

$$G = \frac{f_1}{f_2}.$$

pr 27. (IOAA 2019) Um estudante tem um telescópio Cassegrain de qualidade média, com espelhos primário e secundário com $\epsilon_1 = 91\%$ de camadas de alumínio de refletividade.

- a) Qual será a alteração na magnitude limite deste telescópio ao substituir os revestimentos dos espelhos por revestimentos de espelho de qualidade premium $\epsilon_2 = 98\%$ de refletividade?
- b) Supondo que o aluno também utiliza um espelho diagonal de estrela, também com refletividade ϵ_1 como o original - qual será a melhoria se ele/ela substituir também esta peça por uma peça de $\epsilon_3 = 99\%$ de refletividade (espelho dielétrico), combinado com os novos espelhos ϵ_2 ?
(Um espelho diagonal em estrela é um espelho plano, inclinado em 45° em relação ao eixo ótico.)

Solução:

- a) Vamos designar a magnitude limite original deste telescópio como m_1 , e referir-nos à intensidade no plano focal como I_1 . A nova magnitude limite é m_2 . Devido

ao aumento da intensidade, que se deve à melhor refletividade das superfícies do espelho, a intensidade estelar que resultará na mesma iluminação limite no plano focal será proporcionalmente menor, com a razão das refletividades dos novos e antigos revestimentos dos espelhos:

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 \varepsilon_2} I_1 \quad (6.1)$$

As refletividades devem ser multiplicadas duas vezes, já que a luz proveniente da estrela perde parte da energia em cada reflexão, sofrendo duas reflexões em cada um dos dois espelhos.

Aplicando agora a conhecida fórmula de magnitude:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{I_1}{I_2} = -2.5 \log \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \quad (6.2)$$

Com valores numéricos:

$$m_1 - m_2 = -0.16^m$$

E assim:

$$m_2 = m_1 + 0.16^m$$

b) Sim, é bem perceptível pela maioria dos olhos humanos. Portanto, especialmente os caçadores de objetos de céu profundo utilizam espelhos de maior refletividade em seus telescópios.

c) De modo análogo, obtemos:

$$m_2 = m_1 + 2.5 \log \frac{I_1}{I_2} = m_1 + 2.5 \log \frac{\varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1^3} \quad (6.3)$$

Com valores numéricos:

$$m_1 - m_2 = -0.25^m$$

E assim:

$$m_2 = m_1 + 0.25^m$$

pr 28. (Vinhedo 2022 - Adaptado) Qual é a magnitude limite de um telescópio refrator com lentes de distâncias focais f_{ob} e f_{oc} e diâmetros D_{ob} e D_{oc} com lentes de absorvância ε ? Considere todos os ângulos em questão muito pequenos, tal que $\sin x \approx x$ e $\cos x \approx 1$.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 29. (Vinhedo 2023) Juventino possui uma placa CCD e a utiliza para observar uma estrela de magnitude 18,5 mag que cobre completamente 5 pixels do CCD. Nessa noite, os ruídos valem, em unidade de contagens, $\sigma_1 = 10 \cdot px$ e $\sigma_2 = \sqrt{5 \cdot px \cdot t}$ (em que px é o número de pixels, t o tempo de integração, em segundos). Considerando que foi detectada uma taxa de 1 contagem/s para uma outra estrela de magnitude 21 mag, encontre qual deve ser o tempo de integração para, nessa observação, obter uma razão sinal-ruído de 5.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 30. (IOAA 2018-Adaptado) Um observador deseja usar o Radiotelescópio Esférico de Abertura de Quinhentos Metros (FAST) na China para observar uma galáxia de rádio a um desvio para o vermelho de $z = 0,06$. Suponha que a fonte de rádio seja compacta em comparação com o tamanho do feixe do telescópio nas frequências de observação, ou seja, a fonte é pontual quando vista através do telescópio. Para detectar uma fonte pontual com o FAST, ela deve ser suficientemente forte (brilhante) em relação ao nível de ruído (para observações de polarização única), σ , o qual depende da largura de banda, $\Delta\nu$ e do tempo de integração (equivalente ao tempo de exposição na astronomia de rádio), t_i , da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{2k_B T_{\text{sys}}}{A_e \sqrt{t_i \Delta\nu}}$$

onde T_{sys} é a temperatura do sistema (cerca de 150 K na faixa de frequência de 0,28 GHz - 0,56 GHz e 25 K na faixa de frequência de 1,05 GHz - 1,45 GHz), e $A_e = 4,6 \times 10^4 \text{ m}^2$ é a área efetiva do telescópio, levando em consideração a eficiência total

do instrumento. Esta galáxia de rádio tem uma densidade de fluxo contínuo observada de $f_\nu = 2,5 \times 10^3$ Jy em uma frequência de observação de 0,4 GHz. A largura de banda $\Delta\nu$ para a observação contínua centrada em 0,4 GHz é de $2,8 \times 10^8$ Hz. Para detectar a densidade de fluxo contínuo em 0,4 GHz com uma razão sinal-ruído de 30 (30σ), qual é o tempo de integração necessário, t_i ? **Solução:**

Para uma razão sinal-ruído de 30 de densidade de fluxo de $2,5 \times 10^{-3}$ Jy:

$$\sigma = \frac{2,5 \times 10^{-3}}{30} \text{ Jy} \approx 8,33 \times 10^{-5} \text{ Jy} = 8,33 \times 10^{-31} \text{ Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$$

Pelo enunciado $T_{\text{sys}} = 150$ K e $\Delta\nu = 280$ MHz. Usando a equação fornecida, achamos

$$t_i \approx 42 \text{ s}.$$

pr 31. (Vinhedo 2020) Um detector de ondas de rádio é posicionado a uma altura H acima do nível do mar. O detector registra máximos e mínimos enquanto um objeto desconhecido muito distante ascende a partir do horizonte irradiando ondas eletromagnéticas monocromáticas de comprimento λ . Considere que a declinação do objeto e a latitude do local é zero e que o mar estava calmo, de modo que refletisse perfeitamente as ondas eletromagnéticas incidentes nele. Considere, também, que o raio da Terra é muito maior do que qualquer dimensão utilizada no problema. Sendo assim:

- Calcule a altura θ_{max} do objeto no momento do primeiro máximo detectado.
- Calcule a altura θ_{min} do objeto no momento do primeiro mínimo detectado.
- Sabendo que o fluxo do objeto é F na Terra, calcule o fluxo detectado pelo receptor no momento em que o objeto faz um ângulo θ , no primeiro quadrante, com o horizonte.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#) e [aqui](#).

pr 32. (Vinhedo 2020-Adaptado) Dois radiotelescópios num mesmo plano com duas estrelas operam como um interferômetro na frequência de 2,1 GHz. As estrelas são interdistantes de $L = 5,0$ anos-luz e situam-se a uma distância $D = 2,5 \times 10^7$ anos-luz da Terra. Ver figura. Calcule a separação mínima, d , entre os dois radiotelescópios necessária para distinguir as estrelas. Sendo $\theta \ll 1$ em radianos, use a aproximação

$$\theta \approx \tan \theta \approx \sin \theta.$$

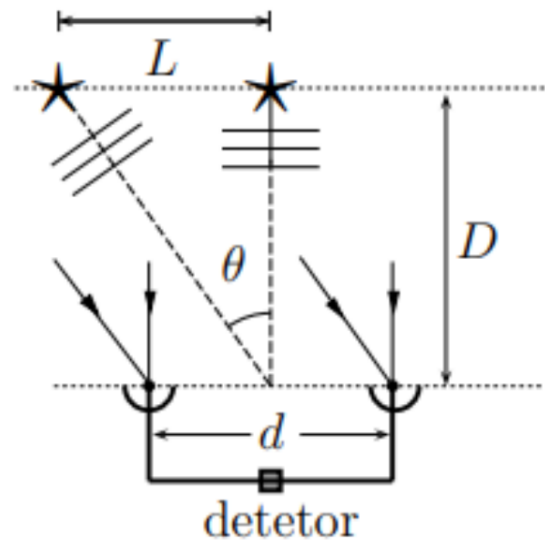


Figura 6.15: Caption

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#) e [aqui](#).