

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Relatividade

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia
Franklin Costa

Revisão

Felipe Maia

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projeto noic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 9

Relatividade

pr 1. Um foguete de $700m$ de comprimento se afasta de uma estação espacial a uma velocidade de $3 \cdot 10^3 \text{ km/s}$. Em cada extremo do foguete ha um emissor de ondas de rádio que, para um observador no foguete, emitem pulsos simultaneos. Determine o intervalo temporal entre as emissões dos sinais observado por um astronauta na estação espacial.

Solução:

Sejam os dois eventos de emissão simultâneos em S' com separação espacial $\Delta x' = L$. Pela transformação de Lorentz, a diferença de tempo entre esses eventos no referencial da estação S é

$$\Delta t = \gamma \frac{vL}{c^2}.$$

Como $v \ll c$, $\gamma \approx 1$, então numericamente

$$\Delta t \approx \frac{vL}{c^2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 23 \text{ nm}}.$$

pr 2. Partículas elementares chamadas de múons (que são idênticas aos elétrons, exceto pelo fato de serem cerca de 200 vezes mais massivas) são criadas na alta atmosfera quando raios cósmicos colidem com moléculas de ar. Os múons têm uma vida média de aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ segundos (depois disso, eles decaem em elétrons e neutrinos) e se movem quase à velocidade da luz. Para fins de simplicidade, suponha que um múon específico seja criado a uma altitude de $50km$, mova-se em linha reta para baixo com uma velocidade $v = 0,99998c$, decaia exatamente em $T = 2 \cdot 10^{-6}$ segundos e não colida com nada em seu caminho. O múon alcançará a Terra antes de decair?

Solução:

Tempo médio dilatado no referencial da Terra:

$$\tau = \gamma T_0 \approx 158.1 \times 2 \times 10^{-6} \text{ s} = 3.16 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

Distância média percorrida $\approx v\tau \approx c\tau$:

$$d \approx 3 \times 10^8 \times 3.16 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 95 \text{ km} > 50 \text{ km}.$$

Portanto os múons tipicamente alcançam a superfície antes de decair.

pr 3. (Vinhedo 2022) O sistema de GPS consiste numa constelação de 24 satélites, todos contidos numa órbita circular a uma altitude de $h = 20,2 \cdot 10^3 \text{ km}$ em relação à superfície terrestre. Para assegurar a precisão na determinação da posição de objetos, o sistema deve levar em conta os efeitos da relatividade na datação dos dados. São eles: o efeito do campo gravitacional da Terra e o efeito da velocidade do observador móvel (o próprio satélite). A equação que determina a dilatação do tempo por um campo gravitacional associado a um objeto esfericamente simétrico de massa M é:

$$\Delta t' = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

em que $\Delta t'$ é o intervalo de tempo entre dois eventos, medido por um observador a uma distância r do centro do campo; e Δt_0 é o intervalo de tempo entre os eventos para um observador infinitamente distante do objeto. Ao longo de um dia, determine qual o desvio, em μs , do relógio no referencial do GPS em relação ao referencial terrestre. Ele está adiantado ou atrasado?

Dica: use, se necessário, a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 4. Dois foguetes, A e B, têm cada um comprimento próprio L e se movem na mesma direção. A velocidade de A é de $4c/5$ e a velocidade de B é de $3c/5$. Quanto tempo, visto por uma pessoa C no solo, leva para que A alcance B? Com isso, queremos dizer o tempo entre a frente de A passando pela traseira de B e a traseira de A passando pela frente de B.

Solução:

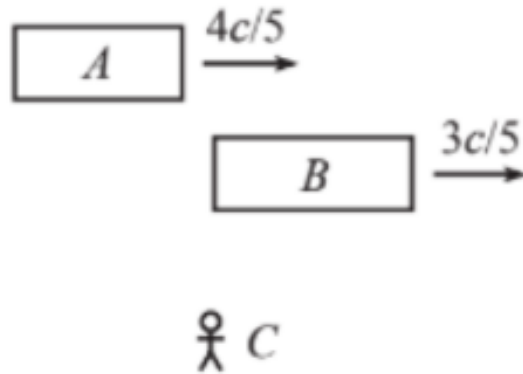
No solo os comprimentos estão contraídos:

$$L_A = \frac{L}{\gamma_A}, \quad \gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 - (4/5)^2}} = \frac{5}{3} \Rightarrow L_A = \frac{3}{5}L,$$

$$L_B = \frac{L}{\gamma_B}, \quad \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{4} \Rightarrow L_B = \frac{4}{5}L.$$

O tempo necessário para A passar completamente B é

$$\Delta t = \frac{L_A + L_B}{v_A - v_B} = \frac{\frac{3}{5}L + \frac{4}{5}L}{(1/5)c} = \frac{7L/5}{c/5} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{7L}{c}}.$$



pr 5. Uma nave espacial com comprimento próprio L move-se a uma velocidade de $5c/13$ em relação ao espaço sideral. Um recipiente de carga é lançado da parte de trás da nave para a frente. A velocidade do recipiente em relação à nave é $c/3$. Visto por alguém no espaço sideral, quanto tempo o recipiente passa em trânsito e qual a distância percorrida?

Solução:

Velocidade do recipiente no referencial sideral:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = c \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{13}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{13}} = c \cdot \frac{7/11}{1} = \frac{7}{11}c.$$

Comprimento da nave no referencial sideral:

$$L_{\text{contraído}} = \frac{L}{\gamma_v} \Rightarrow L_{\text{contraído}} = \frac{12}{13}L$$

Velocidade relativa entre recipiente e frente da nave (no referencial sideral):

$$u - v = \frac{7}{11}c - \frac{5}{13}c = \frac{36}{143}c.$$

Tempo para o recipiente percorrer a distância entre traseira e proa (no referencial sideral):

$$\Delta t = \frac{L_{\text{contraído}}}{u - v} = \frac{\frac{12}{13}L}{\frac{36}{143}c} = \frac{12}{13} \cdot \frac{143}{36} \frac{L}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{11}{3} \frac{L}{c}.$$

Distância percorrida pelo recipiente no referencial sideral:

$$d = u \Delta t = \frac{7}{11}c \cdot \frac{11}{3} \frac{L}{c} \Rightarrow d = \frac{7}{3}L.$$

pr 6. (Vinhedo 2020) Shell e Nathan são imperadores supremos de planetas em dois sistemas estelares inimigos. A distância entre os planetas equivale a 15,0 anos-luz. Um dia, após séculos de guerras, Shell decidiu lançar um ataque para destruir Nathan de uma vez por todas. Para isso, Shell decidiu voar em sua nave mais poderosa, que pode atingir uma velocidade de $0,750c$ e acelerar quase instantaneamente, para utilizar sua arma mais poderosa no planeta de Nathan.

- (a) Shell começa a preparar sua arma assim que a nave sai de seu planeta. Considerando que Shell precisa estar com a arma pronta assim que ele chegar no planeta de Nathan, quanto tempo ele pode demorar para preparar a arma? A arma de Shell atira um composto radioativo extremamente tóxico. O tempo de meia-vida desse composto é igual a 12,25 milissegundos e a razão entre a quantidade na amostra em função do tempo e a quantidade inicial é descrita por uma função exponencial na base e (número de Euler) cujo expoente é negativo e diretamente proporcional ao tempo. A arma de Shell é capaz de atirar esse composto a uma taxa de 158mol/s e a uma velocidade de $0,300c$. Importante: O tempo de meia vida corresponde ao intervalo de tempo necessário para que a amostra seja reduzida pela metade. Shell estaciona sua nave imediatamente acima da atmosfera do planeta de Nathan, que possui uma espessura de 706 km, e mira no palácio de

Nathan, localizado no nível do mar.

- (b) As defesas do palácio de Nathan conseguem resistir a um ataque de no máximo 112 mol/s. Dessa forma, Nathan consegue sobreviver ao ataque de Shell?
- (c) Caso Shell não tivesse estacionado a nave e atirasse em movimento logo acima da atmosfera do planeta, Nathan teria sobrevivido ao ataque? Nesse caso, $0,300c$ seria a velocidade relativa entre o tiro e a nave movendo-se a $0,750c$.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 7. Um fóton é emitido a partir de um ângulo θ' com a horizontal em relação a um referencial S' que se move com velocidade v em relação a S . Com base nisso, calcule o ângulo θ com a horizontal do fóton no referencial S .

Solução:

Use a transformação de velocidades para a luz. No referencial S' as componentes são $u'_x = c \cos \theta'$, $u'_y = c \sin \theta'$. Em S :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} = \frac{c(\cos \theta' + \beta)}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} = \frac{c \sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')},$$

onde $\beta = v/c$. Assim

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)}.$$

pr 8. Demonstre que, para o caso de baixas velocidades, ie, $v \ll c$, pode ser derivado do efeito doppler que:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda'}$$

Se necessário use que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

Solução:

A expressão relativista para o deslocamento Doppler longitudinal é

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Para $\beta \ll 1$ expandimos usando aproximação de binômio:

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = (1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2} \approx (1+\frac{1}{2}\beta)(1+\frac{1}{2}\beta) \approx 1+\beta.$$

Logo $\frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \approx \beta = \frac{v}{c}$, conforme pedido.

pr 9. A vida média de múons freados num bloco de chumbo, fixo num laboratório, é $2,2\mu s$. A vida média dos múons com grande velocidade, numa explosão de raios cósmicos, observada da Terra, é $16\mu s$. Ache a velocidade destes múons dos raios cósmicos em relação à Terra.

Solução:

Do efeito de dilatação,

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{obs}}}{\tau_0} = \frac{16}{2.2} \approx 7.2727.$$

Então

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{(7.2727)^2}} \approx 0.9905,$$

ou seja $\boxed{(v = 0.9905 c)}$.

pr 10. No livro e no filme “O Planeta dos Macacos”, astronautas em hibernação viajam para um futuro distante, em uma época em que a civilização humana foi substituída por uma civilização de macacos. Considerando apenas a relatividade restrita, determine quantos anos os astronautas viajariam, no referencial da Terra, se dormissem durante 120 anos, de acordo com o referencial da espaçonave, enquanto viajavam com uma velocidade de $0,9990c$, primeiro para longe da Terra e depois de volta para o nosso planeta.

Solução:

Tempo próprio dos astronautas $\tau = 120$ yr. Tempo medido na Terra:

$$t = \gamma \tau \approx 22.366 \times 120 \text{ yr} \Rightarrow \boxed{t = 2684 \text{ anos}}.$$

pr 11. Uma espaçonave cujo comprimento de repouso é 130 m passa por uma base espacial a uma velocidade de $0,740c$.

- (a) Qual é o comprimento da nave no referencial da base?
- (b) Qual é o intervalo de tempo registrado pelos tripulantes da base entre a passagem da proa e a passagem da popa da espaçonave?

Solução:

- (a) Comprimento contraído no referencial da base:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \approx \frac{130 \text{ m}}{1.48675} \Rightarrow \boxed{L = 87.44 \text{ m}}.$$

- (b) No referencial da base, a proa e a popa movem-se com a mesma velocidade v . O tempo entre a proa e a popa passarem por um mesmo ponto da base é

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{87.44 \text{ m}}{0.740 \times 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 3.94 \times 10^{-7} \text{ s}}.$$

pr 12. As origens dos dois referenciais, S e S' , coincidem em $t = t_0 = 0$ e a velocidade relativa é de $0,950c$. Dois micrometeoritos colidem nas coordenadas $x = 100 \text{ km}$ e $t = 200 \mu\text{s}$ de acordo com um observador estacionário no referencial S . Determine as coordenadas espaciais e temporal da colisão de acordo com um observador estacionário no referencial S' .

Solução:

Usando a transformação de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),$$

obtemos

$$\boxed{x' = 137.7 \text{ km}}, \quad \boxed{t' = -373.6 \mu\text{s}}.$$

pr 13. A galáxia A está se afastando da Terra com uma velocidade de $0,35c$. A galáxia B, situada na direção diametralmente oposta, está se afastando de nós com a mesma

velocidade. Que múltiplo de c corresponde à velocidade de recessão medida por um observador da galáxia A para nossa galáxia? e para a galáxia B?

Solução:

- (a) A velocidade da Terra vista de A é simetricamente $0.35c$ (em sentido oposto), ou seja, a Terra afasta-se de A com $0.35c$.
- (b) Para a velocidade de B vista de A usamos a adição relativista de velocidades:

$$u = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}},$$

com $v_A = +0.35c$ e $v_B = -0.35c$. Assim

$$u = \frac{-0.35c - 0.35c}{1 - (0.35)(-0.35)} = \frac{-0.70c}{1 + 0.1225} \approx -0.62c.$$

pr 14. Uma esquadrilha de espaçonaves com 1,00 ano-luz de comprimento (no seu referencial de repouso) está se movendo com uma velocidade de $0,800c$ em relação a uma base espacial. Uma nave mensageira viaja da retaguarda à vanguarda da esquadrilha com uma velocidade de $0,950c$ em relação à base espacial. Quanto tempo leva a viagem no referencial da nave mensageira, no referencial da esquadrilha e no referencial da base espacial?

Solução:

Comprimento no referencial da base:

$$L_{\text{base}} = \frac{L_0}{\gamma_s} = \frac{1.00 \text{ ly}}{1.6667} = 0.600 \text{ ly}.$$

Velocidade relativa da mensageira em relação à esquadrilha:

$$u' = \frac{v_m - v_s}{1 - \frac{v_m v_s}{c^2}} = \frac{0.95 - 0.80}{1 - 0.95 \cdot 0.80} c = \frac{0.15}{0.24} c = 0.625c.$$

- (a) No referencial da esquadrilha, a mensageira percorre $L_0 = 1.00 \text{ ly}$ à velocidade $0.625c$, logo

$$\Delta t_{\text{esq}} = \frac{1.00 \text{ ly}}{0.625c} = 1.60 \text{ anos}.$$

- (b) No referencial da base, a distância entre retaguarda e vanguarda é $L_{\text{base}} = 0.600 \text{ ly}$ e a velocidade relativa de aproximação entre mensageira e esquadrilha é $v_m - v_s = 0.15c$, então

$$\Delta t_{\text{base}} = \frac{0.600 \text{ ly}}{0.15c} = 4.00 \text{ anos}.$$

- (c) O intervalo próprio da mensageira é

$$\Delta \tau_{\text{mens}} = \frac{\Delta t_{\text{base}}}{\gamma_m} \approx \frac{4.00}{3.20256} \text{ anos} \approx 1.249 \text{ anos}.$$

pr 15. Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de $0.20c$. Uma fonte luminosa na popa da nave emite luz com um comprimento de onda de 450 nm de acordo com os passageiros. Determine o comprimento de onda e a cor (azul, verde, amarela ou vermelha) da luz emitida pela nave do ponto de vista de um observador terrestre.

Solução:

Usando o fator Doppler relativista:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \frac{v}{c} = 0.20.$$

Logo

$$\lambda \approx 450 \text{ nm} \times 1.2247449 \approx 550 \text{ nm}.$$

$\lambda \approx 550 \text{ nm}$ corresponde a um tom entre verde e amarelo .

pr 16. (NBPhO 2022) Um foguete fotônico é acelerado pelo feixe de um laser emitido do solo: o espelho do foguete reflete os fótons exatamente na direção oposta. A massa de repouso do foguete M_0 não mudou durante o caminho. A energia total dos fótons emitidos pelo laser (e depois refletidos pelo foguete) é $\alpha M_0 c^2$. A potência do laser é constante no tempo.

- (a) Qual velocidade v o foguete atinge se $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$?
- (b) Qual velocidade v o foguete atinge se $\alpha = 1$?
- (c) Quantas vezes a aceleração do foguete, medida pelos passageiros (i.e. a força

inercial agindo sobre eles) difere quando comparamos o começo e o início da aceleração se $\alpha = 1$? Expresse sua resposta em termos da velocidade final do foguete v .

Solução:

a) O momento dos fótons refletidos era

$$p_0 = \frac{W}{c} = \alpha M_0 c,$$

e após a reflexão torna-se oposto,

$$p_1 = -p_0 = -\alpha M_0 c.$$

Assim, o momento transferido ao foguete é

$$\Delta p = 2\alpha M_0 c.$$

Devido à conservação do momento total, o momento do foguete

$$M_0 v = \Delta p = 2\alpha M_0 c,$$

portanto

$$\boxed{v = 2\alpha c}.$$

b) Seja M a massa relativística final do foguete, e p o momento, e seja o número total de fótons após a reflexão μ . Para conveniência, usaremos unidades com $c = 1$. Então temos o invariante relativístico para o 4-momento:

$$p^2 + M_0^2 = M^2.$$

Como a massa de repouso dos fótons é zero, os componentes espacial e temporal de seu 4-momento são iguais, logo o momento dos fótons é μ . A conservação do momento é escrita como

$$p = M_0 + \mu,$$

e a conservação da energia é

$$M + \mu = 2M_0.$$

As duas últimas equações levam a

$$p = 3M_0 - M.$$

Elevando ao quadrado esta equação e combinando com a primeira, obtemos

$$M = \frac{5}{3}M_0, \quad \mu = 2M_0 - M = \frac{1}{3}M_0, \quad p = M_0 + \mu = \frac{4}{3}M_0.$$

Portanto, a velocidade do foguete é

$$v = \frac{p}{M} = \frac{4}{5}.$$

Retornando ao SI, temos

$$\boxed{v = \frac{4}{5}c}.$$

- c) A aceleração percebida é proporcional à taxa de transferência de momento, proveniente dos fótons, para o foguete, no referencial do foguete. Essa taxa é inversamente proporcional ao intervalo de tempo entre dois fótons subsequentes e ao momento de cada fóton.

Devido ao efeito Doppler, ambos ficam maiores com o aumento da velocidade, pelo fator Doppler

$$k = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Portanto, a aceleração percebida é proporcional a k^{-2} . Quando o foguete está em repouso, esse fator é igual a 1; no fim do processo, é

$$\frac{1-v}{1+v} = \frac{1}{9}.$$

Logo, a aceleração é reduzida em 9 vezes.

pr 17. (NBPhO 2021) Considere uma viagem interestelar hipotética com uma espaçonave propelida por fótons, de massa inicial $M = 1 \cdot 10^5 \text{ kg}$. O combustível a bordo

(antimatéria) é aniquilada com uma massa igual de matéria para criar fótons, gerando uma força de reação. A matéria necessária para a aniquilação é coletada do plasma muito disperso do espaço interestelar (assuma que a velocidade do plasma interestelar seja zero no referencial da Terra).

- (a) Qual deveria ser a taxa inicial μ (kg/s na qual a antimatéria deveria ser queimada para que a aceleração fosse igual à aceleração de queda livre na Terra ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)?
- (b) Os motores da espaçonave são desligados quando sua massa de repouso diminui para $m_f = M/10$; qual é a sua velocidade final?
- (c) A frequência dos fótons emitidos é medida por um observador na Terra. Qual é a frequência dos últimos fótons (emitidos imediatamente antes do motor ser desligado), medida na Terra, se a frequência no referencial da espaçonave permanece constante e igual a f_0 ?

Solução:

- a) Em velocidades não relativísticas, podemos aplicar conservação clássica de momento e energia. Durante o intervalo Δt , a massa $\mu \Delta t$ aniquila com a mesma quantidade de massa de matéria interestelar. O resultado são fótons com energia igual à energia de aniquilação total

$$\Delta E = 2\Delta mc^2.$$

Para obter a aceleração máxima, os fótons devem ser emitidos na mesma direção do movimento do foguete (o que pode ser realizado usando espelhos). O fluxo resultante de fótons terá momento

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c}.$$

Pela conservação do momento, o foguete adquire momento igual e oposto

$$\Delta p = M\Delta v = Mg\Delta t.$$

Juntando tudo, obtemos $\boxed{\mu = Mg/(2c) = 1.635 \times 10^{-3} \text{ kg/s}}.$

- b) A velocidade final é encontrada pela conservação do momento (4-momento). Seja M a massa final do foguete, m_f a massa final, M_i a massa inicial e v_f a velocidade final. Consideramos o sistema do foguete + gás queimado.

A massa inicial é $M + (M - m_f)/2 = 2M - m_f = M_i$. Isso corresponde a uma energia inicial $E_i = M_i c^2$ e momento inicial $p_i = 0$.

No estado final, temos o foguete de massa M movendo-se com velocidade v com energia E_f e momento p_f . Os fótons têm energia E_γ e momento p_γ oposto ao movimento. A conservação da energia:

$$E_f + E_\gamma = E_i, \quad p_f + p_\gamma = p_i.$$

Combinando com a invariante relativística:

$$E_f^2 - p_f^2 c^2 = M^2 c^4, \quad E_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2 = 0.$$

Resolvendo:

$$\frac{M_i^2 - m_f^2}{2M_i} c, \quad \frac{M_i^2 + m_f^2}{2M_i} c.$$

Logo,

$$v_f = \frac{p_f}{E_f} c = \frac{M_i^2 - m_f^2}{M_i^2 + m_f^2} c.$$

Substituindo $M_i = 2M - m_f$:

$$v_f = \frac{(2M - m_f)^2 - m_f^2}{(2M - m_f)^2 + m_f^2} c \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{180}{181} c}.$$

- c) O último fóton é emitido quando a nave atinge a velocidade v_f . O fóton é observado por um observador estacionário. Usando o efeito Doppler relativístico:

$$f_{\text{obs}} = f_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = \frac{m_f}{M_i} f_0 = \frac{m_f}{2M - m_f} f_0 \Rightarrow \boxed{f_{\text{obs}} = \frac{1}{19} f_0}.$$

pr 18. (IOAA 2014) Durante estudos sobre radiação cósmica, uma partícula neutra instável, o méson π_0 , foi identificada. A massa de repouso do méson π_0 é muito maior que a massa de repouso do elétron. Os estudos revelam que durante seu voo, o méson π_0 se desintegra em 2 fótons. Encontre uma expressão para a velocidade inicial do méson

π^0 se, depois de sua desintegração, um dos fótons possui a máxima energia possível E_{max} e, conseqüentemente, o outro fóton possui o mínimo possível de energia E_{min} .

Solução:

No processo de desintegração, as leis de conservação da energia e do momento linear são ambas obedecidas. No caso geral, a lei da conservação do momento é representada na figura abaixo:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

onde $\vec{p}$ é o momento do méson π^0 , e $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ são os momentos dos dois fótons emitidos.

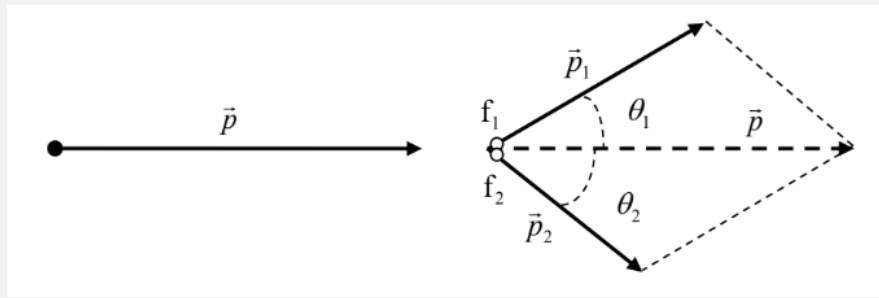


Figura 9.1

A energia total inicial do méson π^0 é

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

e sua energia cinética é

$$E_c = E - m_0 c^2.$$

As expressões das duas leis de conservação, após a desintegração, são:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad E + m_0 c^2 = E_1 + E_2.$$

A energia do fóton 1 pode ser calculada usando as notações da figura:

$$E = E_c + m_0 c^2, \quad p_1 \sin \theta_1 = p_2 \sin \theta_2.$$

$$\frac{E_1}{c} \sin \theta_1 = \frac{E_2}{c} \sin \theta_2,$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad p^2 c^2 = E^2 - m_0^2 c^4,$$

$$E = E_1 + E_2, \quad E_2 = E - E_1 = (E_c + m_0 c^2) - E_1.$$

Portanto,

$$E_1 = \frac{m_0^2 c^4}{2 \left(E_c + m_0 c^2 - \cos \theta_1 \sqrt{E_c (E_c + m_0 c^2)} \right)},$$

e de modo análogo, a energia do segundo fóton é

$$E_2 = \frac{m_0^2 c^4}{2 \left(E_c + m_0 c^2 - \cos \theta_2 \sqrt{E_c (E_c + m_0 c^2)} \right)}.$$

Se um dos fótons tiver a energia máxima possível $E_{\max}$, e consequentemente o outro tiver a energia mínima possível $E_{\min}$, a lei da conservação do momento é representada esquematicamente:

$$\pi^0 \longrightarrow f_2(p_{\min}) + f_1(p_{\max}).$$

As relações tornam-se então muito simples:

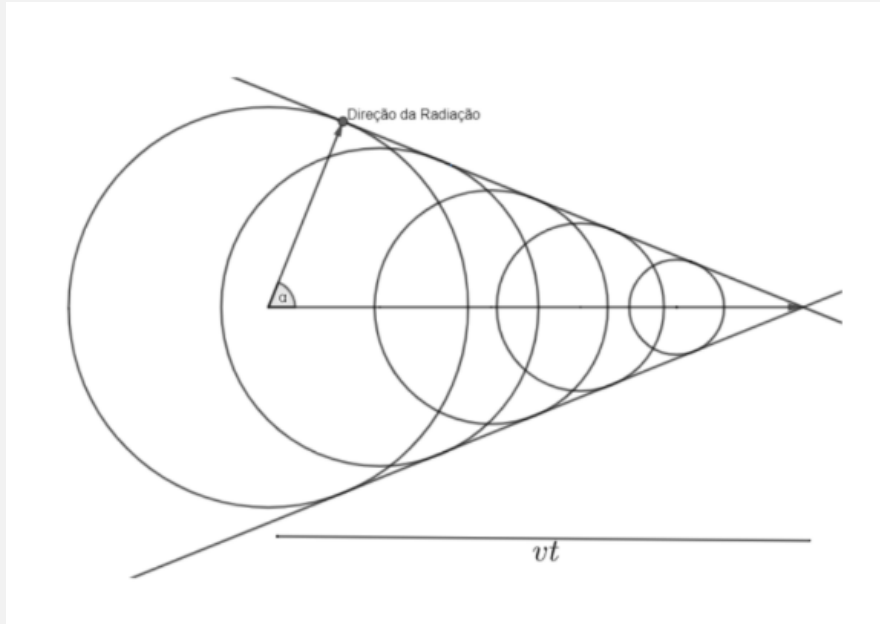
$$mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$E_{\max} = \frac{m_0 c^2}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c} \right), \quad E_{\min} = \frac{m_0 c^2}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v}{c} \right),$$

$$\boxed{v = c \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}}.$$

pr 19. (Vinhedo 2021) O Efeito Cherenkov foi primeiramente detectado pelo cientista soviético Pavel Cherenkov, em 1937. Mais tarde, em conjunto de seus colegas de trabalho, I. E. Tamm e I. M. Frank, ele interpretou fisicamente o fenômeno, ganhando, assim, o Prêmio Nobel de Física de 1958. Antes de fazer um estudo matemático, precisamos, primeiro, entender um pouco mais sobre seu princípio. Quando partículas carregadas de alta energia percorrem um meio dielétrico, é possível que, caso sua velo-

cidade seja maior que a velocidade de fase (c/n), átomos sejam excitados. Esses, por sua vez, ao retornarem ao estado fundamental, emitem radiação eletromagnética. As ondas emitidas se espalham de forma esférica e, quando somadas, formam um cone de ângulo de abertura 2α , como mostra a figura abaixo.



Esse efeito é similar a um jato movendo-se em velocidade super sônica, ou seja, segue o mesmo princípio do Cone de Mach, porém, com a luz. Finalmente, iremos desenvolver o modelo matemático do Efeito Cherenkov. Considere uma partícula movimentando-se a velocidades relativísticas em um meio de índice de refração n . Sabe-se que sua massa de repouso é m_0 , possui momento linear p e velocidade v . Em determinado momento, há emissão de um fóton sob um ângulo α , como mostra a figura.

- Sendo μ a frequência do fóton emitido, determine a equação de seu momento linear, p_μ , e sua energia, E_μ . Sua resposta deve estar em função de n , μ e constantes físicas.
- Encontre uma expressão para o momento linear da partícula após a emissão do fóton em função de p_μ , p e α .
- Sendo $\beta_n = vn/c$, prove que a relação abaixo é verdadeira:

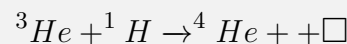
$$\cos\alpha = \frac{1}{\beta_n}$$

- Considerando que o momento linear e a energia se conservem, determine a velo-

cidade mínima para a ocorrência do Efeito Cherenkov.

Dica: Quando comparado com os outros parâmetros, o fator $(n^2 - 1)h\mu$ pode ser desprezado.

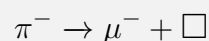
A cadeia próton-próton é um processo de reações de fusão para conversão de hidrogênio em hélio. Uma dos ramos possíveis da cadeia próton-próton é a pp IV, na qual, teoricamente, um átomo de hélio-3 reage diretamente com um próton, conforme a reação a seguir.



- (e) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.
- (f) Considere que essa reação foi reproduzida em laboratório e que a energia do neutrino emitido foi de 18,00 MeV. Sabe-se também que a energia liberada pela reação é dividida entre o neutrino e a partícula no quadrado. Sendo assim, determine o índice de refração do meio reacional para que haja radiação Cherenkov.

Dados: Massa do Hélio-3: $2808,30\text{MeV}/c^2$, massa do Hélio-4: $372,40\text{MeV}/c^2$, massa do próton: $398,27\text{MeV}/c^2$, massa da partícula no quadrado: $0,511\text{MeV}/c^2$.

Píon é um méson produzido quando prótons de alta energia dos raios cósmicos e outros componentes de raios cósmicos hadrônicos interagem com a matéria na atmosfera da terrestre. Dado um píon, π^- , ocorre o seguinte decaimento:



- (g) Indicando a lei de conservação nuclear utilizada, indique qual partícula faltante no quadrado da reação acima.
- (h) Na tentativa de estudar a formação de múons, emite-se um feixe de píons e múons por um material transparente. Nesse material, somente múons podem emitir radiação pelo Efeito Cherenkov. Dado que o momento linear dos dois tipos de partícula no experimento é de $140\text{MeV}/c$, qual o intervalo de valores do índice de refração do meio?

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 20. (IOAA 2023) Em um modelo simplificado de explosão de uma supernova, o núcleo da estrela, composto de núcleos de ferro puro ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ com uma massa total de $1M_{\odot}$, transforma-se em uma estrela de nêutrons composta de elétrons individuais, prótons e nêutrons em uma proporção numérica de 1:1:8. Esse processo é chamado de “neutronização” e resulta na emissão de um grande número de neutrinos. Calcule o fluxo de neutrinos solares na Terra. O quão maior o fluxo de neutrinos atingindo a Terra vindo da supernova seria em relação à emissão estável de neutrinos pelo Sol, se a supernova explodisse no centro da Galáxia e o processo de neutronização do núcleo durasse em torno de 0,01 s? Dê uma resposta em ordem de magnitude.

Solução:

1. Emissão de neutrinos da supernova

Massa de um átomo de ferro ${}^{56}_{26}\text{Fe}$:

$$m_{\text{Fe}} = 56 \text{ Da} = 56 \times 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg} = 9.3016 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

O número de núcleos de ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ no núcleo é, portanto:

$$n_{\text{Fe}} = M/m_{\text{Fe}} = 2.1373 \times 10^{55}$$

e o número inicial de núcleons é:

$$n_{\text{nuc}} = 56 n_{\text{Fe}} = 1.1969 \times 10^{57}.$$

Correspondentemente, o número inicial de prótons é $n_p = 26 n_{\text{Fe}}$ e o número inicial de nêutrons é $n_n = 30 n_{\text{Fe}}$.

Após a explosão: $n'_n = \frac{8}{9}n_{\text{nuc}} = 1.0634 \times 10^{57}$ nêutrons e $n'_p = \frac{1}{9}n_{\text{nuc}} = 1.3299 \times 10^{56}$ prótons permanecem, e assim $n_p - n'_p = 26 n_{\text{Fe}} - n'_p = 4.2271 \times 10^{56}$ prótons são convertidos. Como 1 neutrino é produzido para cada próton convertido ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$), o fluxo de neutrinos é:

$$I_{\nu} = \frac{4.2271 \times 10^{56}}{0.01 \text{ s}} = 4.2271 \times 10^{58} \text{ neutrinos s}^{-1}.$$

O fluxo de neutrinos observado na Terra é dado por:

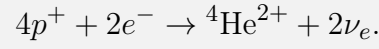
$$F_{\text{SN}} = \frac{I_{\nu}}{4\pi d_{\text{Gal}}^2}.$$

Substituindo $d_{\text{Gal}} = 8 \text{ kpc} = 8000 \times 3.086 \times 10^{16} \text{ m} = 2.4688 \times 10^{20} \text{ m}$,

$$F_{\text{SN}} \approx 5.5 \times 10^{16} \text{ neutrinos s}^{-1}\text{m}^{-2}.$$

2. Fluxo de neutrinos do Sol

Podemos assumir que a principal fonte de luminosidade solar é a reação p-p:



Negligenciando os elétrons e neutrinos, a variação de massa é:

$$\Delta m = 4 \times 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} - 6.645 \times 10^{-27} \text{ kg} = 4.7 \times 10^{-29} \text{ kg},$$

e assim, pela relação $E = (\Delta m)c^2$, a energia liberada é $\approx 4.2244 \times 10^{-12} \text{ J}$.

A luminosidade solar é $L_{\odot} = 3.826 \times 10^{26} \text{ W}$, então o número de reações por segundo é aproximadamente:

$$\frac{3.826 \times 10^{26}}{4.2244 \times 10^{-12}} = 9.057 \times 10^{37}.$$

Com 2 neutrinos liberados por reação, isso dá um fluxo solar de neutrinos de:

$$I_{\nu_{\odot}} \approx 1.8 \times 10^{38} \text{ neutrinos s}^{-1}.$$

A uma distância da Terra, a densidade de fluxo observada é dada por:

$$F_{\odot} = \frac{I_{\nu_{\odot}}}{4\pi d_{\odot}^2},$$

onde $d_{\odot} = 1 \text{ ua} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$, e portanto:

$$F_{\odot} \approx 6.4 \times 10^{14} \text{ neutrinos s}^{-1}\text{m}^{-2}.$$

A razão final é, portanto:

$$\frac{F_{\text{SN}}}{F_{\odot}} = \frac{5.5 \times 10^{16}}{6.4 \times 10^{14}} \approx 86 \approx 100.$$

pr 21. (IOAA 2022) Considere uma fonte de luz isotrópica de frequência f_R em um referencial fixo à fonte (i.e. referencial de repouso). Nesse referencial, considere um raio de luz emitido pela fonte fazendo um ângulo θ_R com o eixo X. A fonte de luz está se movendo ao longo da direção positiva do eixo X com velocidade relativística v medida no referencial do laboratório.

(a) Encontre uma expressão para a frequência f_L desse raio no referencial do laboratório e outra para o cosseno do ângulo que esse raio faz com o eixo X no referencial do laboratório.

(b) Para os seguintes casos:

i) $\theta_R = 0^\circ$

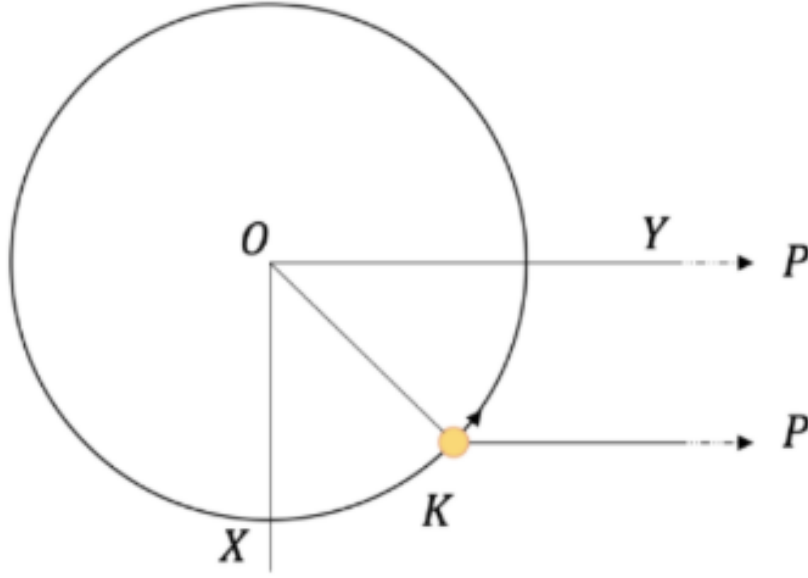
ii) $\theta_R = \cos^{-1}(-v/c)$

iii) $\theta_R = 90^\circ$

iv) $\theta_R = 180^\circ$

desenhe vetores indicando a direção do raio no plano XY do referencial de repouso, assim como no plano X'Y' do referencial de repouso, separadamente.

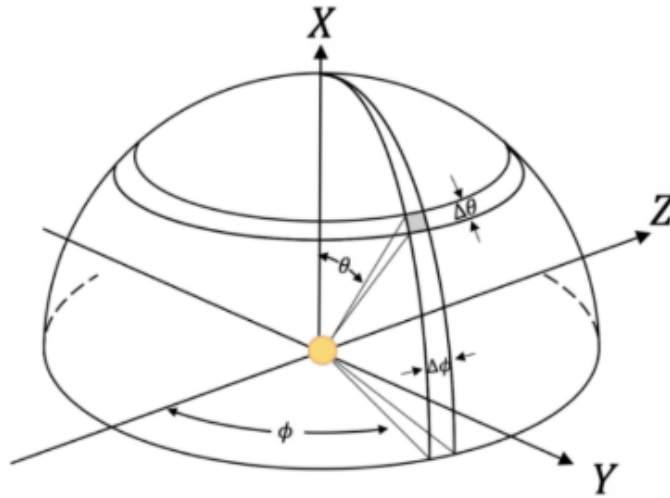
Em discos de acreção em torno de buracos negros, as partículas carregadas estão orbitando com velocidades relativísticas e em seus referenciais de repouso podem ser consideradas como fontes isotrópicas pontuais de luz. Considere uma partícula K em uma órbita circular de raio r e velocidade angular ω em torno de um objeto central localizado em O (veja a figura).



Assuma que o referencial do laboratório está fixo em relação a um observador localizado no ponto P no eixo OY, que é estacionário com respeito a O. $OP = R \gg r$. Suponha que $t_{L0} = t_{R0} = 0$ corresponda ao momento em que K está cruzando o eixo OX. Como K está se movendo com velocidade relativística, o intervalo Δt_R medido por um observador no referencial de repouso da fonte K está relacionado ao intervalo medido no referencial do laboratório Δt_L em P pela expressão $\Delta t_L = \gamma \Delta t_R$

- (c) Derive uma expressão para f_L em função de t_L ($t_L > R/c$).

Consideremos uma fração da luz vinda da fonte que é emitida em um ângulo sólido infinitesimal $\Delta\Omega_R = -\Delta(\cos\theta_R) \cdot \Delta\phi$ na direção fazendo um ângulo θ_R com respeito ao eixo X no referencial de repouso, como mostrado na figura a seguir.



(d) Mostre que, como medido no referencial do laboratório

$$\Delta\Omega_L = \frac{\Delta\Omega_R}{\gamma^2(1 + \frac{v}{c} \cos(\theta_R))^2}$$

(e) Se a luminosidade intrínseca da fonte de luz é L , qual é o fluxo de energia F_L medido pelo observador no ponto P no momento t_L ($t_L > R/c$)?

Dica: No referencial de repouso da fonte, você pode assumir que N_R fótons se movem dentro de um ângulo sólido $\Delta\Omega_R$ no intervalo de tempo Δt_R .

(f) Partículas carregadas em um feixe relativístico emitido pelo buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87 têm velocidades de até $0,95c$. Qual deveria ser o máximo e mínimo fator de amplificação para o fluxo de energia de um feixe relativístico de M87?

Solução:

(a) Temos a energia de um fóton $E = hf$, enquanto o momento $\vec{p} = \frac{hf}{c} \vec{n}$, onde $\vec{n}$ é um vetor unitário na direção do movimento do fóton. Substituindo isso na lei de transformação de energia-momento, temos:

$$\frac{hf_L}{c} = \gamma \left(\frac{hf_R}{c} + \frac{vp_{xR}}{c} \right)$$

$$p_{xL} = \gamma \left(p_{xR} + \frac{hf_R v}{c^2} \right)$$

$$p_{yL} = p_{yR}, \quad p_{zL} = p_{zR}$$

em nosso caso:

$$p_{xL} = |p_L| \cos \theta_L, \quad p_{yL} = |p_L| \sin \theta_L, \quad p_{zL} = 0$$

$$p_{xR} = |p_R| \cos \theta_R, \quad p_{yR} = |p_R| \sin \theta_R, \quad p_{zR} = 0$$

Assim:

$$f_L = \gamma \left(f_R + \frac{v}{h} |p_R| \cos \theta_R \right)$$

$$= \gamma \left(f_R + \frac{v}{h} \frac{hf_R}{c} \cos \theta_R \right)$$

$$f_L = \gamma f_R \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R \right)$$

$$\cos \theta_L = \frac{p_{xL}}{|p_L|} = \frac{cp_{xL}}{hf_L}$$

$$= \frac{c\gamma \left(p_{xR} + \frac{hf_R v}{c^2} \right)}{hf_L}$$

$$= \frac{\gamma f_R \left(\frac{cp_{xR}}{hf_R} + \frac{v}{c} \right)}{f_L}$$

$$= \frac{\gamma f_R \left(\cos \theta_R + \frac{v}{c} \right)}{f_R \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R \right)}$$

$$\boxed{\cos \theta_L = \frac{\cos \theta_R + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R}}.$$

- (b) Agora, apenas substituindo os valores do cosseno, vemos que no caso (i) (seta laranja) $\cos \theta_L = 1$, então o fóton continua se movendo na mesma direção; no caso (ii) (seta verde) $\cos \theta_L = 0$; no caso (iii) (seta amarela) $\cos \theta_L = v/c$; e no

caso (iv) (seta cinza) $\cos \theta_L = -1$.

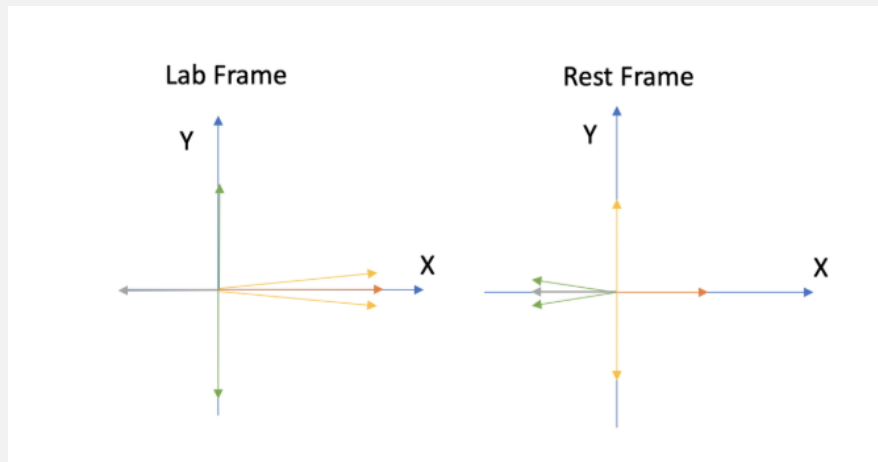


Figura 9.2

(c) A partir da figura, vemos que:

$$KP = OP - OK \sin \theta = R - R \sin \theta$$

onde $\theta = \omega t$.

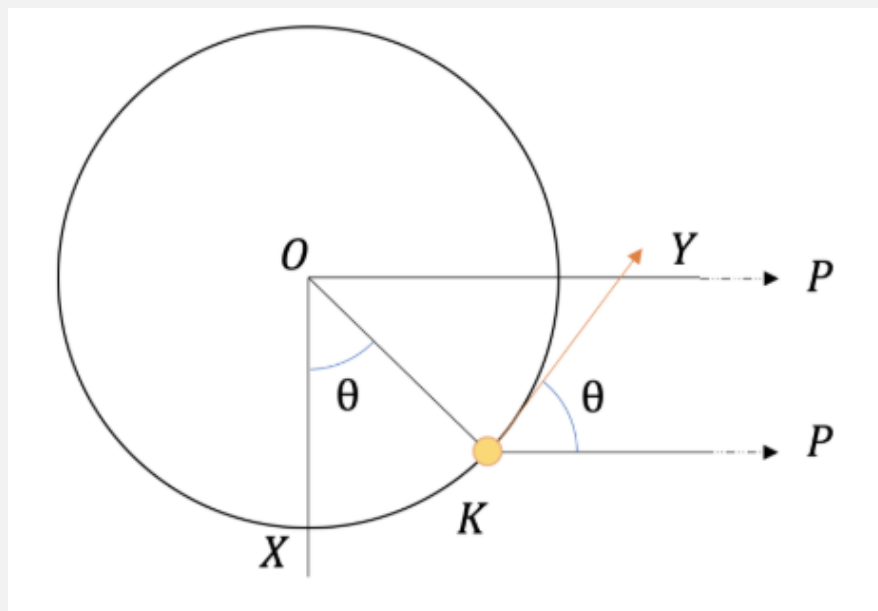


Figura 9.3

Seja $t_L = T$ o tempo em que o fóton atinge P após sair de K em um tempo t (no referencial de laboratório). Então:

$$c(T - t) = KP = R - R \sin \theta \approx R$$

$$t = t_L - \frac{R}{c}$$

Esse fóton faz um ângulo $\theta = \omega t$ com a direção de seu movimento no referencial de laboratório. Agora,

$$\cos \theta_L = \frac{\cos \theta_R + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R}$$

$$\cos \theta_L + \frac{v}{c} \cos \theta_L \cos \theta_R = \cos \theta_R + \frac{v}{c}$$

$$\cos \theta_R (1 - \frac{v}{c} \cos \theta_L) = \cos \theta_L - \frac{v}{c}$$

$$\cos \theta_R = \frac{\cos \theta_L - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_L}$$

$$\begin{aligned} f_L &= \gamma f_R \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R \right) \\ &= \gamma f_R \left(1 + \frac{v}{c} \frac{\cos \theta_L - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_L} \right) \\ &= \gamma f_R \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c} \cos \theta_L - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_L} \\ &= \frac{f_R}{\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta_L)} = \frac{f_R}{\gamma (1 - \frac{v}{c} \cos(\omega t))} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_L = \frac{f_R}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \left[\omega \left(t_L - \frac{R}{c} \right) \right] \right)}}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Delta \Omega_L &= -\Delta(\cos \theta_R) \Delta \phi \\ &= [\cos \theta_R - \cos(\theta_R + \Delta \theta_R)] \Delta \phi \\ &= [\cos \theta_R - \cos \theta_R \cos(\Delta \theta_R) + \sin \theta_R \sin(\Delta \theta_R)] \Delta \phi \\ &= [\cos \theta_R (1 - \cos \Delta \theta_R) + \sin \theta_R \sin(\Delta \theta_R)] \Delta \phi \\ \Delta \Omega_L &= \sin \theta_R (\Delta \theta_R) (\Delta \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega_L &= \sin\theta_R(\Delta\theta_R)(\Delta\phi) \\
\sin^2\theta_L &= 1 - \cos^2\theta_L \\
&= 1 - \left(\frac{\cos\theta_R + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R} \right)^2 \\
&= \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta_R + 2\frac{v}{c}\cos\theta_R - \cos^2\theta_R - 2\frac{v}{c}\cos\theta_R - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)^2} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(1 - \cos^2\theta_R)}{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)^2} \\
&= \frac{\sin^2\theta_R}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)^2} \\
\sin\theta_L &= \frac{\sin\theta_R}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)}
\end{aligned}$$

Também, $\Delta\theta_L \approx \sin(\Delta\theta_L)$

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_L &= \frac{\sin(\Delta\theta_R)}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)} \\
\frac{\Delta\Omega_L}{\Delta\Omega_R} &= \frac{\sin\theta_L(\Delta\theta_L)(\Delta\phi)}{\sin\theta_R(\Delta\theta_R)(\Delta\phi)} \\
&= \frac{\sin\theta_L(\Delta\theta_L)}{\sin\theta_R(\Delta\theta_R)} \\
&= \frac{\sin\theta_R/\left[\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)\right]}{\sin\theta_R} \frac{\Delta\theta_R}{\Delta\theta_R} \\
\boxed{\Delta\Omega_L} &= \boxed{\frac{\Delta\Omega_R}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R\right)^2}}.
\end{aligned}$$

- (e) Seja $N(\theta_L)\Delta\Omega_L\Delta T$ o número de fótons que chegam nas proximidades de P dentro do elemento de ângulo sólido $\Delta\Omega_L$ e intervalo de tempo T_L a $T_L + \Delta T$ (é importante que $\Delta T \neq \Delta t_R$ onde Δt_R é o tempo de emissão dos mesmos fótons, no referencial de laboratório). Esses fótons sendo emitidos por K dentro do ângulo sólido $\Delta\Omega_R$ no intervalo de tempo t_{0R} , $t_{0R} + \Delta t_{0R}$, de modo que:

$$N(\theta_L)\Delta\Omega_L\Delta T = N\Delta\Omega_R\Delta t_{0R}$$

De uma parte anterior:

$$cT = ct + R - R\sin\theta_L = ct + R - R\sin(\omega t)$$

$$c\Delta T = c\Delta t - R[\sin(\omega t)\cos(\omega\Delta t) + \sin(\omega\Delta t)\cos(\omega t) - \sin(\omega t)]$$

$$c\Delta T = c\Delta t - R\omega\cos(\omega t)\Delta t$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 1 - \frac{v}{c}\cos(\omega t)$$

$$\frac{\Delta t_{0R}}{\Delta T} = \frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos(\omega t))}$$

$$\frac{N(t_L)}{N_R} = \frac{\Delta\Omega_R\Delta t_{0R}}{\Delta\Omega_L\Delta T}$$

$$= \frac{\gamma^2(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R)^2}{\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos(\omega t))}$$

$$= \gamma \frac{(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_R)^2}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_L)}$$

$$= \frac{\gamma}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_L)^3}$$

$$N(t_L) = \frac{N_R}{\gamma^3(1 - \frac{v}{c}\cos(t_L - R/c))^3}$$

Em termos de fluxos de energia:

$$F_0 = \frac{hf_R N_R}{R^2} = \frac{L}{4\pi R^2}$$

$$F(t_L) = \frac{hf_L N(t_L)}{R^2}$$

$$\frac{F(t_L)}{F_0} = \frac{hf_L N(t_L)}{hf_R N_R}$$

$$= \frac{1}{\gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\right)^4}$$

$$F(t_L) = \frac{L}{4\pi R^2 \gamma^4 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\right)^4}.$$

A radiação é fortemente direcionada no sentido do movimento da fonte, de modo que um observador remoto no plano orbital da fonte vê uma radiação fortemente pulsada.

- (f) A amplificação (para um dado v) é máxima quando $\cos \theta_L = 1$.

$$F(t_L) = \frac{F_0}{[\gamma(1 - \frac{v}{c})]^4}$$

$$A_{\max} = \frac{1}{[0.0975 \times 0.05]^4} \approx 1.8 \times 10^9.$$

De forma similar,

$$A_{\min} = \frac{1}{[0.0975 \times 1.95]^4} \approx 770.$$

pr 22. (Vinhedo 2022) Os irmãos gêmeos Wesley e Wesley' (os pais deles não são muito criativos) são físicos muito aventureiros. Certo dia, ao aprender um pouco sobre relatividade restrita, eles decidem fazer um experimento para determinar como a aceleração de um corpo varia em função do tempo quando este se move com velocidades relativísticas. Para isso, Wesley' partirá do repouso de sua espaçonave em seu referencial S' , movendo-se com aceleração constante a_0 (medida em S'), ao longo do eixo x' . Considere que os gêmeos estavam na origem comum $x = x' = 0$ em $t = t' = 0$.

- Ache uma expressão para a aceleração da nave medida por Wesley em seu referencial S . A resposta deve ser uma função de a_0 e γ (fator de Lorentz).
- Ache uma expressão para a velocidade da nave medida por Wesley em seu referencial S . A resposta deve ser uma função de a_0 , t e outras constantes físicas.

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).

pr 23. (IPhO 2022) Uma espaçonave viaja a uma magnitude constante de aceleração própria $g = 10m/s^2$, i.e. essa é a aceleração da espaçonave no referencial inercial (que não possui aceleração) no qual ela está em repouso naquele instante. Os passageiros devem ser capazes de retornar à Terra dentro de seu tempo esperado de vida de 50 anos. A distância máxima da Terra atingida pela espaçonave é d . Se a aceleração é aumentada para $g' = 15m/s^2$, a espaçonave pode atingir uma distância maior d' . Qual é a razão d'/d ?

Dica 1: Você pode ter de lidar com funções hiperbólicas, definidas da seguinte forma:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Dica 2: Você pode precisar das seguintes integrais: $\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + C$, $\int \sinh x dx = \cosh x + C$.

Solução:

Seja $\beta = \tanh w$ a velocidade da nave espacial, o fator de Lorentz $\gamma = \cosh w$, e seu momento $p = m_0 \sinh w$.

Uma nave espacial que experimenta uma aceleração própria constante g experimenta uma força própria constante

$$F = m_0 g = \frac{dp}{dt} = m_0 \cosh w \frac{dw}{dt} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\cosh w}.$$

Enquanto isso, a dilatação do tempo relaciona t com o tempo próprio τ da nave como

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = \cosh w \Rightarrow \frac{dw}{d\tau} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} = g.$$

Integrando, obtemos $w = g\tau$. Recordando que $dt = \gamma d\tau$, obtemos o seguinte como a distância total percorrida durante um quarto da viagem da nave espacial:

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{T/4} \beta \gamma d\tau = \int_0^{T/4} \tanh w \cosh w d\tau \\ &= \int_0^{T/4} \sinh g\tau d\tau = \frac{1}{g} (\cosh(gT/4) - 1). \end{aligned}$$

A resposta é, portanto,

$$\boxed{\frac{g_1 \cosh(g_2 T/4c) - 1}{g_2 \cosh(g_1 T/4c) - 1} = 480}.$$

pr 24. (T3 2023) A emissão sincrotron é um fenômeno que ocorre quando partículas carregadas, como elétrons, são aceleradas em campos magnéticos intensos. Essas partículas em movimento curvilíneo emitem radiação eletromagnética de alta energia, que pode ser observada em diversas regiões do espectro eletromagnético, desde rádio até raios gama. Esse fenômeno é observado em diversos contextos astronômicos, como em jatos ultrarrelativísticos em nuvens de gás que orbitam buracos negros. Quando alguma partícula está eletricamente carregada e é acelerada, ela emitirá energia na forma de ondas eletromagnéticas. A fórmula de Larmor quantifica essa energia por unidade de tempo, no referencial do elétron, da seguinte forma:

$$P' = \frac{2}{3} \frac{e^2 (a'_\perp)^2}{c^3}$$

Em que P' é a potência emitida, e é a carga elétrica e $a'_\perp$ a aceleração perpendicular ao raio de rotação, todos no referencial de repouso, ou seja, do elétron.

- Primeiramente, faremos um estudo da dinâmica relativista, com o apoio da visão cinemática do tema. Com isso em vista, use o fato de que $a = dv/dt$ para mostrar que $a = a'/\gamma^2$, em que γ é o fator de Lorentz.
- No referencial do laboratório, podemos escrever a potência emitida por $P = dE/dt$. Demonstre que a potência é uma invariante.
- Sabendo que o vetor velocidade do elétron, $\vec{v}$ e o vetor campo magnético, $\vec{B}$, fazem um ângulo α entre si, mostre que a potência emitida, também conhecida por Emissão Síncrotron, é dada por:

$$P = \frac{2e^4}{3c^3} \frac{B^2 \sin^2 \alpha}{m_0^2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2$$

Em que E é a energia total do elétron.

Ao longo de um pulso de emissão síncrotron, um elétron ultrarrelativístico ($\gamma \gg 1$) percorre um ângulo $\Delta\theta = 2/\gamma$ em sua órbita. Considere, por simplificação, que o elétron está se movendo na direção de observador muito distante no momento da emissão.

- Utilize dessas informações para encontrar a duração de um pulso de energia do elétron. Disso, conclua que a frequência característica da emissão é:

$$\nu_e = \frac{eB}{m_0} \sin \alpha \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2$$

- (e) Considere um elétron ultrarrelativístico que emitiu, inicialmente, um pulso de frequência característica ν_0 . Mostre que o tempo para o elétron resfriar por radiação síncrotron, levando em consideração que ele emite energia de forma ininterrupta, é escrito da forma abaixo.

$$t = \frac{3m_0^3 c^3}{2e^4 B^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{eB \sin \alpha}{\nu_0 m_0}}$$

Solução:

A solução oficial está disponível [aqui](#).