

APOSTILA MAGNA

Feito por medalhistas
internacionais e nacionais



Apostila Magna Solucionário Termodinâmica

Edição 1.0

Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento - NOIC

Brasil, Outubro de 2025

Creative Commons License

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Prefácio

A Apostila Magna é o resultado de um esforço conjunto do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), uma equipe de talentosos indivíduos, muitos deles medalhistas olímpicos internacionais das Olimpíadas de Astronomia e Astrofísica (IOAA) e da Olimpíada Internacional de Física (IPhO). O NOIC, com suas próprias experiências e conquistas, trouxe uma expertise valiosa para a elaboração deste livro.

O NOIC compreende profundamente os desafios que os estudantes enfrentam e os caminhos para o sucesso nas áreas de astronomia e astrofísica. Suas perspectivas únicas e experiências pessoais enriqueceram a Apostila Magna com abordagens eficazes, estratégias de resolução de problemas e um entendimento sólido das complexidades dessas competições.

Portanto, esta apostila não apenas incorpora conhecimento teórico e prático em astronomia e astrofísica, mas também reflete a paixão e o compromisso do NOIC em compartilhar seu conhecimento e experiência para ajudar a próxima geração de estudantes a alcançar o sucesso nas olimpíadas científicas. Esperamos que a Apostila Magna seja uma ferramenta valiosa na preparação de estudantes e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam se destacar nesse campo desafiador.

Ao longo da apostila, será presente diversos problemas, sendo eles separados por três níveis de dificuldade: **Fácil**, **Médio** e **Difícil**. Ressaltamos que dificuldade é relativa, podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Créditos e Contato

Autores

Felipe Maia

Revisão

Felipe Maia

Capa

Formatação da capa: Mariana Tana

Contato

Whatsapp 

<https://chat.whatsapp.com/CBNz8kHtHjoDbdvwIeQ94J>

Instagram 

@projeto noic

Site 

<https://noic.com.br/astronomia/>

Tabela de Constantes

Massa ($M_{\oplus}$)	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio ($R_{\oplus}$)	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_{\oplus}$)	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h \ 56min \ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ($M_{\odot}$)	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio ($R_{\odot}$)	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ($L_{\odot}$)	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_{\odot}$)	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ($m_{\odot}$)	$-26,7 \text{ mag}$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galático	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Wien (b)	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	

Capítulo 7

Termodinâmica

pr 1. Considere o modelo de uma atmosfera isotérmica (temperatura constante T) de gás de massa molar μ num local de gravidade constante g . Qual é a sua pressão em função da altura $p(z)$, se a pressão no nível do mar é p_0 ?

Solução:

Para resolver essa questão, vamos utilizar duas relações principais, a Lei de Stevin e a Relação de Klepeiron, dados por:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g, \quad PV = Nk_B T$$

Trabalhando com a segunda equação e definindo μ a massa molar

$$PV\mu = N\mu k_B T \rightarrow P\mu = \frac{M}{V} k_B T = \rho k_B T$$

Ou seja, temos $\rho = \frac{P\mu}{k_B T}$ substituindo na Lei de Stevin

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P\mu g}{k_B T}$$

Separando as variáveis e integrando

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{k_B T} \int_0^z dr$$

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{\mu g}{k_B T} z}$$

pr 2. Um modelo muito mais realista para a atmosfera é o de uma atmosfera adiabática, em que as massas de ar se movimentam sempre que há uma diferença de pressão, liberando todo o calor que recebem. Há gravidade constante g e o gás tem massa molar μ e Coeficiente de Poisson γ . Então, qual a pressão em função da altura $p(z)$, se a pressão e a temperatura ao nível do mar são p_0 e T_0 ?

Solução:

Para adiabáticas, temos a relação $PV^\gamma = cte$ isso implica que $PT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = cte$, assim temos

$$PT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_0 T_0^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Da Lei de Stevin

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P\mu g}{k_B T} = -\frac{P\mu g}{k_B T_0} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Separando as variáveis e integrando

$$\int_{P_0}^{P(z)} P^{-\frac{1}{\gamma}} dP = -\frac{\mu g}{k_B T_0} P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \int_0^z dr$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (P(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) = -\frac{\mu g z}{k_B T_0} P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Isolando $P(z)$

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g z}{k_B T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

pr 3. Uma estrela esfericamente simétrica de um gás ideal de massa molar μ encontra-se no espaço sideral. Ela possui uma densidade de massa no equilíbrio dada por $\rho(r) = \rho_0 r^{-2}$.

- a) Determine como varia a temperatura da estrela em função da distância ao centro r e seu raio R .

b) Se sua luminosidade depende da distância radial da forma

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi\epsilon r^2 \rho(r),$$

ache o raio r da estrela em função de ρ_0 , ϵ e demais constantes físicas.

Solução:

a) Novamente, utilizando a relação de Stevin

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g \equiv -\frac{GM(r)\rho_0}{r^4}$$

Mas como a distribuição de massa não é uniforme, temos

$$M(r) = \int_0^r \rho(r)dV = \int_0^r \frac{\rho_0}{r^2} 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 r$$

Assim.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho_0^2}{r^3}$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int dP = -4\pi G\rho_0^2 \int \frac{dr}{r^3}$$

$$P(r) = \frac{2\pi G\rho_0^2}{r^2} + C$$

Para achar a constante C , vamos nos lembrar que a estrela é um objeto em equilíbrio hidrostático em sua superfície, isto é $P(R) = 0$

Para essa condição de contorno ser satisfeita, devemos ter $C = -\frac{2\pi G\rho^2}{R^2}$, Logo

$$P(r) = 2\pi G\rho_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right)$$

Por fim, utilizando a relação de Clepeiron,

$$T(r) = \frac{P(r)\mu}{\rho(r)k_B} = 2\pi G\rho_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{r^2\mu}{\rho_0 k_B}$$

Simplificando

$$T(r) = \frac{2\pi G\rho_0\mu}{k_B} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

- b) Vamos achar a luminosidade a uma distância r do centro da estrela e igualar essa a Lei de Stefan-Boltzmann

$$dL = 4\pi\epsilon r^2 \rho(r) dr \equiv 4\pi\epsilon\rho_0 dr$$

Integrando

$$\int_0^{L(r)} dL' = 4\pi\epsilon\rho_0 \int_0^r dr'$$

$$L(r) = 4\pi\epsilon\rho_0 r$$

Usando a Lei de Stephan Boltzmann

$$L(r) = 4\pi r^2 \sigma T(r)^4 = 4\pi\epsilon\rho_0 r$$

Simplificando e substituindo a fórmula de $T(r)$, encontrada no item anterior,

$$r = \frac{\epsilon\rho_0}{\sigma T(r)^4} = \frac{\epsilon k_B^4}{16\pi^4 G^4 \mu^4 \rho_0^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{-4}$$

Mas note que ao substituirmos $r = R$, obtemos que $R = 0$, o que leva a uma inconsistência física.

pr 4. (Lista 4 - Vinhedo 2021) Nesse problema, estudaremos um modelo simplificado e clássico de pulsações estelares. Considere que uma estrela seja um sistema formado por um ponto central de massa M (massa da estrela) envolto por uma camada esférica de gás ideal de massa desprezível e de raio R (raio da estrela), sendo que a superfície

estelar é uma fina casca esférica de massa m que não oferece resistência à expansão nem compressão e é responsável por isolar termodinamicamente o gás interno do ambiente externo (vácuo). Assuma que as transformações do gás na estrela se dão de maneira reversível.

- a) Calcule o valor mínimo do coeficiente de expansão adiabática γ do gás para que as oscilações da casca que reveste a estrela sejam harmônicas simples. Considere que a amplitude das oscilações tenha tamanho desprezível em relação ao raio R da estrela.
- b) Considerando um coeficiente de expansão adiabática $\gamma = \frac{5}{3}$ (gás monoatômico), calcule o período das oscilações da estrela em função de G , M e R . Se necessário, utilize que

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad \text{para } x \ll 1$$

e ignore quaisquer termos de segunda ordem em suas aproximações.

Solução:

- a) Para expansões adiabáticas, $PV^\gamma = cte$ e como $V \propto r^3$ temos $Pr^{3\gamma} = cte$

Vamos considerar que a estrela sofra um incremento de pressão δP e um incremento de raio δr , assim

$$Pr^{3\gamma} = (P + \delta P)(r + \delta r)^{3\gamma}$$

Dividindo os dois lados por $Pr^{3\gamma}$ temos

$$1 = \left(1 + \frac{\delta P}{P}\right) \left(1 + \frac{\delta r}{r}\right)^{3\gamma} \rightarrow 1 + \frac{\delta P}{P} = \left(1 + \frac{\delta r}{r}\right)^{-3\gamma}$$

Utilizando a aproximação de $(1+x)^n \approx 1+nx$ temos

$$\delta P = -\frac{3\gamma P \delta r}{r}$$

A pressão casada pela força gravitacional pode ser calculada por

$$P_G = \frac{F}{A} = \frac{\frac{GMm}{r^2}}{4\pi r^2} = \frac{GMm}{4\pi r^4}$$

Para a estrela se manter gravitacionalmente ligada, $P < P_G$

Assim, pode dizer que

$$P + \delta P < \frac{GMm}{4\pi} (r + \delta r)^{-4} \equiv P \left(1 + \frac{\delta r}{r} \right)^{-4}$$

Utilizando a mesma aproximação

$$\delta P < -\frac{4P\delta r}{r}$$

Juntando as expressões para δP

$$\frac{3\gamma P\delta r}{r} > \frac{4P\delta r}{r}$$

Resolvendo para γ obtemos

$$\boxed{\gamma > \frac{4}{3}}$$

- b) Para esse item, vamos utilizar do fato que para pequenas oscilações é valido que $\omega \approx \sqrt{\frac{|V''(R)|}{m}}$ onde $V(R)$ é o potencial na posição de equilíbrio, no caso, em R e m a massa da partícula oscilante.

Para encontrar V temos que somar o potencial térmico com o gravitacional, assim

$$V = V_T + V_G$$

Da termodinâmica, sabemos que $V_T = -\int PdV$ e da gravitação, sabemos que $V_G = -\frac{GMm}{r}$

Para calcular V_T vamos utilizar do fato que $Pr^{3\gamma}$ é cosntante. Como sabemos que em $r = R$ é valido que $P_T = P_G$ temos

$$P_T r^{3\gamma} = \frac{GMm}{4\pi R^4} R^{3\gamma}$$

O enunciado nos diz que $\gamma = 5/3$, substituindo

$$P_T = \frac{GMm}{4\pi} \frac{R}{r^5}$$

Usando essa fórmula para P_T para achar V_T chegamos em

$$V_T = - \int \frac{GMm}{4\pi} \frac{R}{r^5} dV = - \int \frac{GMm}{4\pi} \frac{R}{r^5} (4\pi r^2) dr = -GMmR \int \frac{dr}{r^3}$$

Como queremos o potencial na posição de equilíbrio, vamos integrar de 0 até R ,

$$V_T(R) = \frac{GMm}{2R}$$

Utilizando que $V(R) = V_T(R) + V_G(R)$

$$V(R) = -\frac{GMm}{2R}$$

Derivando duas vezes em relação a R

$$V'(R) = \frac{GMm}{2R^2}$$

$$V''(R) = -\frac{GMm}{R^3}$$

Substituindo na fórmula para ω

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

Finalmente, utilizando a relação $T = 2\pi/\omega$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

pr 5. (Vinhedo 2022 - Adaptada) Nos estudos sobre radiação eletromagnética, a Distribuição de Planck (ou Lei de Planck) para a radiação de corpo negro é uma das mais

importantes relações matemáticas que existem. Ela relaciona a temperatura de um corpo com a energia que este emite na forma de radiação em uma determinada frequência, sendo usada para quantificar sua radiância espectral. Em termos da temperatura T do corpo (em Kelvin) e da frequência f (em Hz), a distribuição de Planck assume a forma:

$$B_f(f, T) = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Onde k é a constante de Boltzmann, h a constante de Planck e B_f mede a densidade de energia por unidade de frequência por unidade de esferorradiano. Além dessa expressão, é possível descrever a radiância espectral de um corpo utilizando o comprimento de onda no lugar da frequência, resultando em uma forma alternativa da lei de Planck denotada por B_λ .

- a) Expresse a lei de Planck em termos da temperatura e do comprimento de onda λ , explicitando cada passo da mudança de variáveis. Através da análise da lei de Planck, é possível descobrir inúmeras características de um corpo negro. Uma delas é a relação entre o comprimento de onda λ_{max} do pico de emissão do corpo. Onde b é uma constante. Esta relação é conhecida como Lei de Wien.
- b) Demonstre a Lei de Wien, a partir da Lei de Planck, e avalie o valor de b .

Dica: tome a temperatura como sendo uma constante.

Outra quantidade interessante que pode ser obtida a partir da análise da distribuição de Planck é a densidade média de energia contida na radiação, que pode ser utilizada na cosmologia, por exemplo.

- c) Encontre a densidade média de energia contida na radiação de corpo negro, considerando uma pequena superfície plana que emite em todas as direções e que está em equilíbrio térmico com a radiação circundante. Se necessário, utilize que

$$P = \sigma T^4$$

Onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e P é o fluxo em potência por metro quadrado irradiado por um corpo negro.

Dica: o valor médio de uma função qualquer em um intervalo $[a, b]$ é dado pela razão entre a integral da função de a até b e o valor $b - a$ (comprimento do

intervalo).

Solução:

- a) O enunciado nos diz que B_f mede a densidade de energia por unidade de frequência por unidade de ângulo sólido (esferradiano), ou seja

$$B_f = \frac{dE}{dV d\Omega df}$$

É razoável de se pensar portanto, que

$$B_\lambda = \frac{dE}{dV d\Omega d\lambda}$$

Assim, podemos facilmente perceber que

$$B_\lambda = B_f \frac{df}{d\lambda}$$

Da relação fundamental da ondulatoria, obtemos $f = c/\lambda$ o que segue $df/d\lambda = -c/\lambda^2$. Perceba que o sinal de menos foi ignorado, uma vez que o importante é apenas o módulo da energia. Com isso

$$B_\lambda = \frac{2h(c/\lambda)^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h(c/\lambda)}{kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2}$$

Simplificando,

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

- b) A Lei de Wein é uma relação entre a temperatura e o comprimento de onda de pico emitido. Note que o comprimento de pico se dá no máximo de $B(\lambda, T)$, que ocorre quando $dB(\lambda, T)/d\lambda = 0$. Derivar $B(\lambda, T)$ diretamente é uma tarefa chata e demorada, então vamos usar o seguinte "truque": Quando o valor de $B(\lambda, T)$ é máximo, o valor de $\ln B(\lambda, T)$ também é máximo, tirando o $\ln$ temos

$$\ln B(\lambda, T) = -5 \ln \lambda - \ln \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right) + C$$

Onde C é uma constante que absorve os demais fatores numéricos. Essa função é bem mais fácil de se derivar:

$$\frac{d \ln B(\lambda, T)}{d\lambda} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{hc}{\lambda^2 k_B T} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Para encontrar o valor máximo, igualamos a derivada a 0. Denominando $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ podemos simplificar a expressão para

$$x = 5(1 - e^{-x})$$

Essa equação precisa ser resolvida utilizando métodos numéricos, e fazendo-os, obtemos $x \approx 4,965$

Voltando a definição de x

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = 4,965 \rightarrow \boxed{\lambda T = 2,989 \cdot 10^{-3}}$$

c) Definindo $u = dE/dV$ temos que

$$B_f = \frac{uc}{d\Omega df}$$

Seja u_f a densidade de energia por unidade de frequência, tem-se que

$$du_f = B_f \frac{d\Omega}{c} \rightarrow u_f = \frac{4\pi}{c} B_f$$

Para achar u basta integrar u_f em todas as frequências,

$$u = \int_0^\infty u_f df = \int_0^\infty \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} df$$

Para resolver essa integral, fazemos uma substituição de variável. Definimos:

$$x = \frac{hf}{k_B T} \quad \text{ou} \quad f = \frac{k_B T}{h} x$$

Assim, $df = \frac{k_B T}{h} dx$. Substituímos na integral:

$$u = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h} x \right)^3 \frac{1}{e^x - 1} \frac{k_B T}{h} dx$$

Agrupando os fatores:

$$u = \frac{8\pi(k_B T)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

A integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

é uma integral bem conhecida em física estatística. Seu valor é dado por:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Substituímos esse resultado:

$$u = \frac{8\pi(k_B T)^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15}$$

Utilizando a definição da constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$$

Podemos escrever

$$u = \frac{4\sigma T^4}{c} \equiv \frac{4P}{c}$$

pr 6. No espaço sideral, há uma nuvem simetricamente esférica feita de gás de massa molecular μ de densidade constante ρ e temperatura T .

- **Observação:** Massa molecular é o número de prótons de cada molécula do gás, sendo que a massa de cada molécula, então, é dada por $m = \mu m_H$, em que m_H é a massa de um hidrogênio ionizado.

- a) Pensando na nuvem como sendo feita de várias cascas esféricas, deduza sua energia potencial autogravitacional em função de G , de sua massa M e de seu raio R .
- b) Deduza a massa necessária para que forme uma protoestrela pelo Critério de Jeans em função dos dados do enunciado e de constantes físicas.
- c) Deduza o raio necessário para que forme uma protoestrela pelo Critério de Jeans em função dos dados do enunciado e de constantes físicas.

Solução:

- a) A força de atração dF entre a casca e o resto da nuvem é dada por:

$$dF = \frac{GM(r)dm}{r^2}$$

A energia potencial diferencial associada é:

$$dU = -\frac{GM(r) dm}{r}$$

Substituímos $M(r)$ e dm em termos da densidade ρ . A massa interna $M(r)$ é dada por:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

E a massa da casca dm é:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

Logo, substituindo $M(r)$ e dm em dU , temos:

$$dU = -\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho}{r} dr$$

$$dU = -\frac{16\pi^2 G \rho^2 r^4}{3} dr$$

A energia potencial total da nuvem é obtida integrando dU de $r = 0$ até $r = R$:

$$U = - \int_0^R \frac{16\pi^2 G \rho^2 r^4}{3} dr$$

Resolvendo a integral:

$$U = - \frac{16\pi^2 G \rho^2}{3} \int_0^R r^4 dr$$

$$U = - \frac{16\pi^2 G \rho^2}{3} \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$U = - \frac{16\pi^2 G \rho^2 R^5}{15}$$

Substituímos $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$:

$$U = - \frac{16\pi^2 G}{15} \cdot \left(\frac{3M}{4\pi R^3} \right)^2 \cdot R^5$$

Simplificando:

$$U = - \frac{16\pi^2 G}{15} \cdot \frac{9M^2}{16\pi^2 R^6} \cdot R^5$$

$$U = - \frac{3GM^2}{5R}$$

Portanto, a energia potencial autogravitacional da nuvem é:

$$\boxed{U = - \frac{3GM^2}{5R}}$$

- b) Pelo teorema do virial, quando temos uma força central, $F(n) \propto r^n$ a relação de equilíbrio da energia cinética e da potencial segue:

$$U < nK$$

Para o caso da força gravitacional, $n = -2$, assim

$$U + 2K < 0$$

Onde, nesse caso, K é a soma das energias cinéticas individuais de cada molécula do gás, isso é

$$K = \frac{3Nk_B T}{2}$$

O número de moléculas é dada por $N = M/m \equiv \frac{M}{\mu m_H}$

Substituindo os valores na expressão do Teorema do Virial,

$$\frac{3Mk_B T}{\mu m_H} < \frac{3GM^2}{5R}$$

Resolvendo para M

$$M > \frac{5k_B T R}{G\mu m_H}$$

Porem, o exercício nos pede que deixamos a resposta em função da densidade e não de R , assim

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Voltando a desigualdade de M

$$M > \frac{5k_B T}{G\mu m_H} \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$M^{\frac{2}{3}} = \frac{5k_B T}{G\mu m_H} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{M > \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

c) Voltando alguns, passos, podemos perceber que

$$R > \frac{G\mu m_H M}{5k_B T}$$

$$R > \frac{G\mu m_H}{5k_B T} \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente

$$R > \left(\frac{15k_B T}{4\pi G\mu m_H \rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

pr 7. (P2 Vinhedo 2023) Neste problema, celebraremos os mecanismos por trás do funcionamento de um dos principais corpos celestes presentes em nosso universo: estrelas! O colapso de uma nuvem de gás é um processo fundamental na formação de estrelas. Seja U a energia potencial gravitacional de uma nuvem, e K a sua energia cinética interna (associada ao movimento das partículas que a compõem). Podemos escrever a condição de colapso como:

$$2K + U < 0$$

Aqui, consideraremos uma nuvem esférica de raio R e massa M homogeneamente distribuída. Nessa situação, U será dado por:

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

- a) Determine a massa mínima M_J (Massa de Jeans) para que uma nuvem de gás esférica e homogênea colapse. Responda em função da temperatura T , do raio R e da massa m das partículas de gás que a compõem, suposto diatômico. Com isso, responda se é provável o colapso de uma nuvem feita de gás hidrogênio, à temperatura $10K$, de massa $100M_\odot$ e de raio 10 pc .
- b) Considere uma estrela esférica, na qual a densidade depende da distância r ao centro da forma $\rho(r)$. Sendo $m(r)$ a massa englobada por uma esfera de raio r concêntrica à contida na estrela, mostre que, em um regime de equilíbrio hidros-

tático, o gradiente de pressão $\Delta P/\Delta r$ é dado por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}.$$

- c) Em uma estrela, o transporte de energia do núcleo à superfície pode ser mediado por radiação, convecção ou condução; aqui, trataremos somente do primeiro, o qual é dominante em muitas estrelas.

No regime radiativo, o gradiente de temperatura no interior da estrela segue uma expressão do tipo:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = a \cdot \kappa^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot L^\beta \cdot r^{\alpha+\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \sigma^\delta,$$

em que a é uma constante adimensional, κ é a opacidade, ρ a densidade, L a luminosidade, T a temperatura e σ a constante de Stefan-Boltzmann. Encontre os valores de α , β , γ e δ .

Observação: No SI, a opacidade possui dimensões de kg^{-1}m^2 . A solução exata dos sistemas de equações diferenciais envolvendo as estruturas estelares está além do escopo computacionalmente. Todavia, é possível derivar algumas relações entre propriedades físicas dessas estrelas de maneira extremamente simplificada.

- d) Utilizando as equações obtidas nos itens (c) e a lei dos gases ideais, obtenha uma dependência aproximada da luminosidade L de uma estrela com sua massa e raio, isto é, se $L \propto M^x R^y$, encontre x e y .

Considere dois casos específicos:

- (i) Estrelas pouco massivas, nas quais a opacidade segue a lei de opacidade de Kramers:

$$\kappa \propto \rho T^{-3.5}.$$

- (ii) Estrelas muito massivas, nas quais a opacidade é dominada por espalhamento de elétrons, e portanto:

$$\kappa \approx \text{constante}.$$

Observação: Não utilize a equação de Stefan-Boltzmann. Para fins de estimativa, considere que os gradientes de temperatura e pressão no interior estelar

seguem uma relação linear, de forma que:

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \propto \frac{T}{R}, \quad \frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{P}{R}.$$

- e) Baseando-se nos resultados do item anterior, responda: por que estrelas mais massivas possuem menor tempo de vida?

Outra forma de entender melhor sobre a evolução e estrutura estelar é analisando as escalas de tempo nas quais diferentes processos físicos ocorrem.

- f) Surpreendentemente, apenas uma pequena fração da massa total de uma estrela está disponível para a geração de energia, aproximadamente 0,008%. Sabendo disso, estime, em bilhões de anos, o período t_N (tempo nuclear) pelo qual o Sol consegue sustentar sua luminosidade, assumida constante.
- g) Um efeito alternativo de geração de energia e muito importante na fase inicial da vida de uma estrela é o mecanismo de Kelvin-Helmholtz, no qual a contração da estrela diminui sua energia gravitacional e imediatamente essa diferença de energia tem forma de radiação. Estime o tempo t_t (tempo térmico) pelo qual o Sol conseguiria sustentar sua luminosidade assumindo que essa fosse sua única fonte de energia.

Dica: A expressão fornecida de U para uma estrela homogênea pode ser útil.

- h) Na gênese estelar, a pressão contrapondo o peso das camadas superiores é praticamente nula, e a estrela contrai. Estime o período t_D (tempo dinâmico), em horas, para que o Sol colapsasse caso estivesse nesse regime

Dos seus últimos resultados, você deve conseguir notar a seguinte relação hierárquica:

$$t_N \gg t_t \gg t_D.$$

Solução:

- a) Utilizando do teorema do Virial e o mesmo procedimento do exercício anterior, com a diferença que pelo gás ser diatômico, a energia de cada molécula é $\frac{5k_B T}{2}$:

$$-\frac{3GM^2}{5R} + \frac{5Mk_B T}{m} > 0$$

Resolvendo para M

$$M > \frac{25k_B T R}{3Gm}$$

Substituindo numericamente, encontramos

$$M_J \approx 800M_\odot$$

- b) Imagine um cilindro de área da base, S e altura dr e massa dm , de modo que a base inferior dele esteja a uma distância r do centro da estrela:

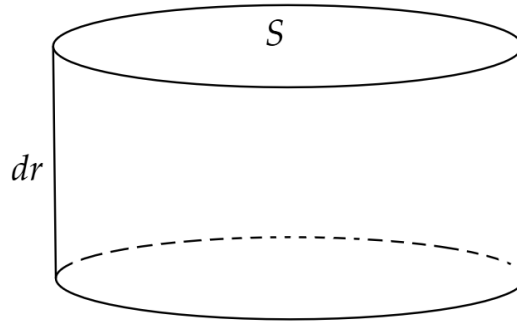


Figura 7.1: Cilindro

A diferença de pressão no cilindro é dada por

$$P(r + dr) - P(r) \approx P(r) + \frac{dP}{dr}dr - P(r) = dP$$

A força causada por essa diferença de pressão é $dF = SdP$ que na condição de equilíbrio, deve ser balanceada pela força gravitacional, $dF_G = gdm = \rho g dV = \rho g Sdr$. Do equilíbrio de forças

$$SdP + \rho g Sdr = 0$$

por fim,

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \equiv -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

c) Por análise dimensional, temos

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{[K]}{[m]}$$

e

$$a \cdot \kappa^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot L^\beta \cdot r^{\alpha+\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \sigma^\delta = \frac{[m]^{2\alpha}}{[kg]^\alpha} \cdot \frac{[kg]^\beta}{[m]^{3\beta}} \cdot \frac{[kg]^\beta [m]^{2\beta}}{[s]^{3\beta}} \cdot [m]^{\alpha+\gamma} \cdot [K]^\gamma \cdot \frac{[kg]^\delta}{[s]^{3\delta} [K]^{4\delta}}$$

Igualando os expoentes, podemos montar o seguinte sistema de equação

$$2\alpha - 3\beta + 2\beta + \alpha + \gamma = -1$$

$$\alpha + \beta + \beta + \delta = 0$$

$$-3\beta - 3\delta = 0$$

$$\gamma - 4\delta = 1$$

Com trabalho, conseguimos resolver esse sistema chegando em

$$\boxed{\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = -1}$$

d) A equação obtida no item c) foi

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \propto \frac{T}{r} \propto \frac{\kappa \rho L}{r^2 T^3}$$

A Lei dos gases ideais nos diz que

$$P\mu = \rho k_B T$$

Ou seja, $P \propto \rho T$. Utilizando que $\rho \propto \frac{M}{r^3}$, chegamos em

$$P \propto \frac{MT}{r^3}$$

Podemos usar também a expressão do gradiente de pressão

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{P}{r} \propto \frac{M\rho}{r^2} \propto \frac{M^2}{r^5}$$

Assim, temos que

$$P \propto \frac{M^2}{r^4}$$

Combinando as duas expressões para a pressão, temos

$$\frac{MT}{r^3} \propto \frac{M^2}{r^4}$$

Ou seja

$$T \propto \frac{M}{r}$$

Para o caso (i) temos $\kappa \propto \frac{\rho}{T^{3,5}}$ a equação obtida em c) se torna

$$\frac{T}{r} \propto \frac{\rho^2 L}{r^2 T^{6,5}}$$

Simplificando

$$L \propto \frac{T^{7,5} r}{\rho^2}$$

Substituindo ρ e T

$$L \propto \frac{M^{7,5}}{r^{7,5}} \frac{r^6}{M^2} r$$

Por fim,

$$\boxed{L \propto \frac{M^{5,5}}{r^{0,5}}}$$

Ou seja, $x = 5,5$, $y = -0,5$

Para o caso (ii) em que κ é constante, a expressão encontrada em c) se reduz a

$$\frac{T}{r} \propto \frac{\rho L}{r^2 T^3}$$

utilizando o mesmo método que anteriormente, chegamos em $x = 3$ e $y = 0$

- e) A luminosidade aumenta muito com M . De maneira simplificada tempo de vida de uma estrela é a quantidade de tempo que ela leva para queimar seu estoque de combustível. O estoque de combustível é proporcional a massa, porém a luminosidade é proporcional a $M^{5,5}$. Ou seja, uma estrela mais massiva, possui mais combustível, mas o queima MUITO mais rapidamente, possuindo assim um menor tempo de vida

- f) Temos então

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{d(\eta mc^2)}{dt} = -\eta c^2 \frac{dm}{dt}$$

Aqui utilizamos a famosa relação massa-energia, e representamos a fração de massa disponível como η . Resolvendo para t e utilizando que L é constante

$$\int_0^{t_N} dt = -\frac{\eta c^2}{L} \int_{M_\odot}^0 dm$$

$$t_N = \frac{\eta c^2}{L} M_\odot \approx 10 \text{ Gyr}$$

- g) Utilizando que $U = -\frac{3GM^2}{5R}$, nesse caso teríamos

$$L = \frac{dU}{dt} = -\frac{6GM}{5R} \frac{dM}{dt}$$

Novamente, resolvendo para t e assumindo L constante

$$\int_0^{t_t} dt = -\frac{6G}{5LR} \int_{M_\odot}^0 M dM$$

Assim

$$t_t = \frac{3GM_\odot^2}{5LR} \approx 10 \text{ Myr}$$

- h) Como não há nenhuma pressão contrapondo a gravidade, Podemos estimar a força em uma camada de massa $dm = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr$ a uma distância r do centro da estrela como:

$$dF = -\frac{GM(r)dm}{r^2} = -\frac{16\pi^2 G \rho^2 r^3 dr}{3}$$

Integrando e utilizando a segunda lei de newton, obtemos

$$F(r) = -\frac{4\pi^2 G \rho^2 r^4}{3} = M(r) \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Simplificando

$$-\frac{4\pi^2 G \rho^2 r^4}{3} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\pi G \rho r$$

Perceba que essa é a equação de um M.H.S com $\omega = \sqrt{\pi G \rho}$. O tempo de colapso, seria equivalente a 1/4 do período, sendo este igual a

$$t_D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{G \rho}}$$

Utilizando que $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ encontramos

$$\boxed{t_d \approx 0,5 \text{ h}}$$