

Soluções da OBM Nível 2

Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Determine o menor valor possível para a soma dos dígitos de uma potência de 2 que tenha pelo menos dois dígitos e justifique por que não é possível encontrar uma potência de 2 com soma dos dígitos menor que a resposta encontrada.

Solução. Seja $s(m)$ a soma dos dígitos de m . Afirmamos que $s(2^n) \geq 5$ quando 2^n tem pelo menos dois dígitos.

Igualdade ocorre para $2^5 = 32$.

Temos que

$$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$$

Logo, basta analisar $s(2^n)$ para $n \equiv 1 \pmod{4}$. Em particular, podemos assumir que n é ímpar. Além disso, como $s(m) \equiv m \pmod{9}$, e

$$2^1 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$2^4 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$2^5 \equiv 5 \pmod{9}$$

$$2^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

temos que $2^n \equiv 2, 8, 5 \pmod{9}$.

Mas é claro, a soma dos dígitos de 2^n é ao menos 3, já que o último dígito é ao menos 2 e há outro dígito não nulo.

Portanto, $s(2^n) \geq \min\{2 + 9, 8, 5\} = 5$ uma vez que não pode ser $s(2^n) = 2$. $\square$

Problema 2 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja m um inteiro positivo. Ana e Banana jogam o seguinte jogo em um tabuleiro 5×5 , inicialmente com 0 em todas as casas. Alternadamente, elas escolhem uma casa do tabuleiro e somam ao número escrito nela um inteiro do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, de forma que o número escrito na casa não ultrapasse o número m . Ganha quem fizer uma jogada que complete as cinco casas de uma linha, uma coluna ou uma das duas diagonais com o número m em todas as casas. Para quais inteiros positivos m , Ana, a primeira a jogar, possui uma estratégia vencedora?

Solução. Ana sempre tem uma estratégia vencedora, exceto quando $6 \mid m$.

Estratégia para Banana em $6 \mid m$

Neste caso, Banana pode fazer um pareamento em que, sempre que Ana coloca pedras em uma certa pilha, Banana também coloca pedras nessa pilha. Se provarmos que, no mini-jogo de colocar pedras em uma única pilha, Banana ganha (tipo um NIM), então o jogo final será uma superposição destes em paralelo, de forma que Banana sempre retira as últimas pedras de cada pilha (e, assim, sempre assegura a vitória). Provaremos por indução que Banana tem uma estratégia vencedora neste mini-jogo, ou seja, as posições perdedoras para o primeiro jogador são $6 \mid m$.

A base de indução é trivial $m = 0$. Por hipótese, as posições $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ e $6k + 5$ são vencedoras para Ana, pois basta tirar 1, 2, 3, 4 e 5 pedras, respectivamente, para enviar para a posição perdedora $6k$. Para finalizar, $6k + 6$ é perdedor para Ana (e vencedor para Banana), uma vez que manda justamente para essas cinco posições vencedoras.

Estratégia para Ana em $6 \nmid m$

Vamos elaborar uma estratégia de pareamento e combiná-la com o fato provado anteriormente. A ideia é a seguinte:

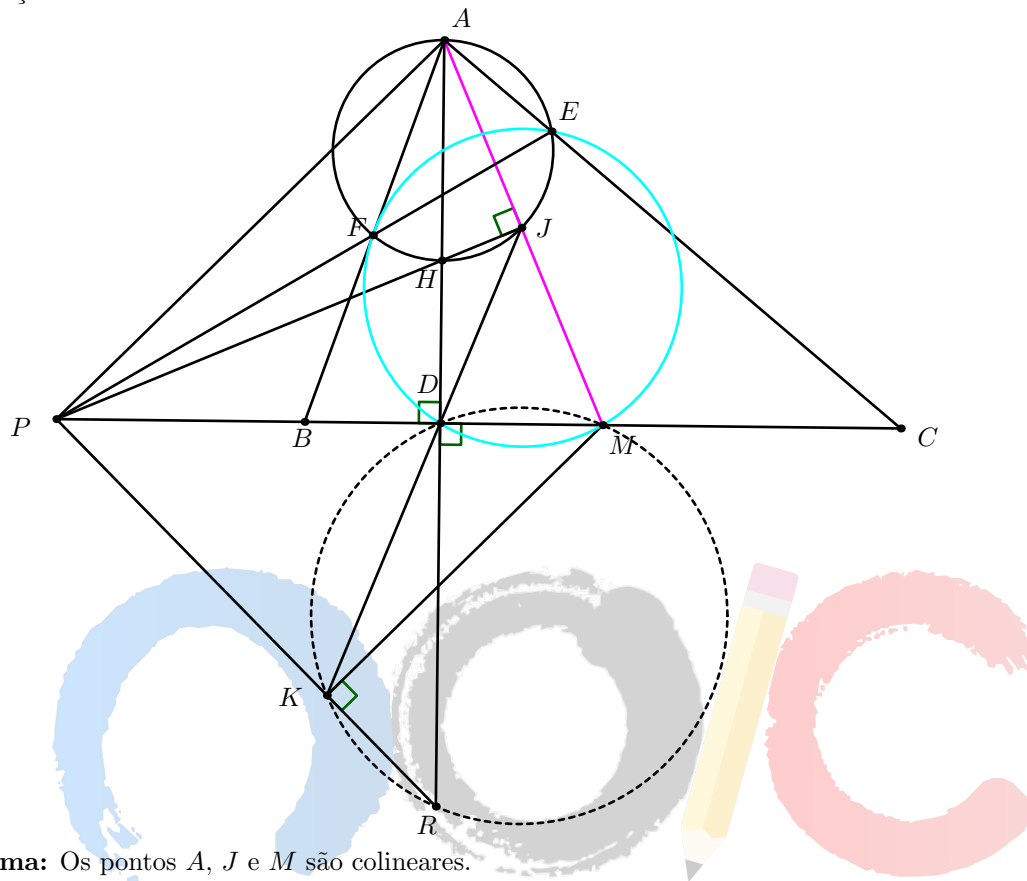
- No começo, Ana joga na casa central, de acordo com a estratégia vencedora do mini-jogo detalhado acima. Se Banana vier a jogar nesta casa também, Ana continua nela logo em seguida, sempre mantendo essa estratégia vencedora.
- Se Banana joga em uma casa não central, Ana repete o mesmo movimento na casa diametralmente oposta.

Note que, pelo pareamento, a configuração do tabuleiro é sempre simétrica. Veja que, necessariamente, temos que Ana retira a última peça na casa central, devido ao mini-jogo acima tê-la na posição vencedora. Perceba que, se Banana faz uma jogada fulminante, esta deve ser feita na casa recém-alterada por Ana, pois, caso contrário, Ana poderia ter ganhado o jogo na rodada anterior. De qualquer forma, temos que, pela simetria, Ana poderia ter realizado a jogada fulminante em seguida do movimento de Banana, e acabamos.

Problema 3 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$. Sejam D, E, F os pés das alturas de A, B, C , respectivamente, e seja M o ponto médio de BC . Seja P o ponto de interseção das retas EF e BC . Seja H o ortocentro de ABC . A reta PH intersecta o círculo de diâmetro AH novamente no ponto J . Seja R a reflexão de A em relação a BC . As retas JD e PR se encontram em K . Prove que o quadrilátero $KDMR$ é cíclico.

Solução.



Lema: Os pontos A, J e M são colineares.

Prova: Basta notar que

$$PJ \cdot PH = PE \cdot PF = PD \cdot PM,$$

que vale pois E, F, D e M estão sobre o círculo de nove pontos de ABC , portanto $HJMD$ é cíclico, que implica $\angle HJM = \angle HDM = 90^\circ = \angle HJA$, como queríamos. $\square$

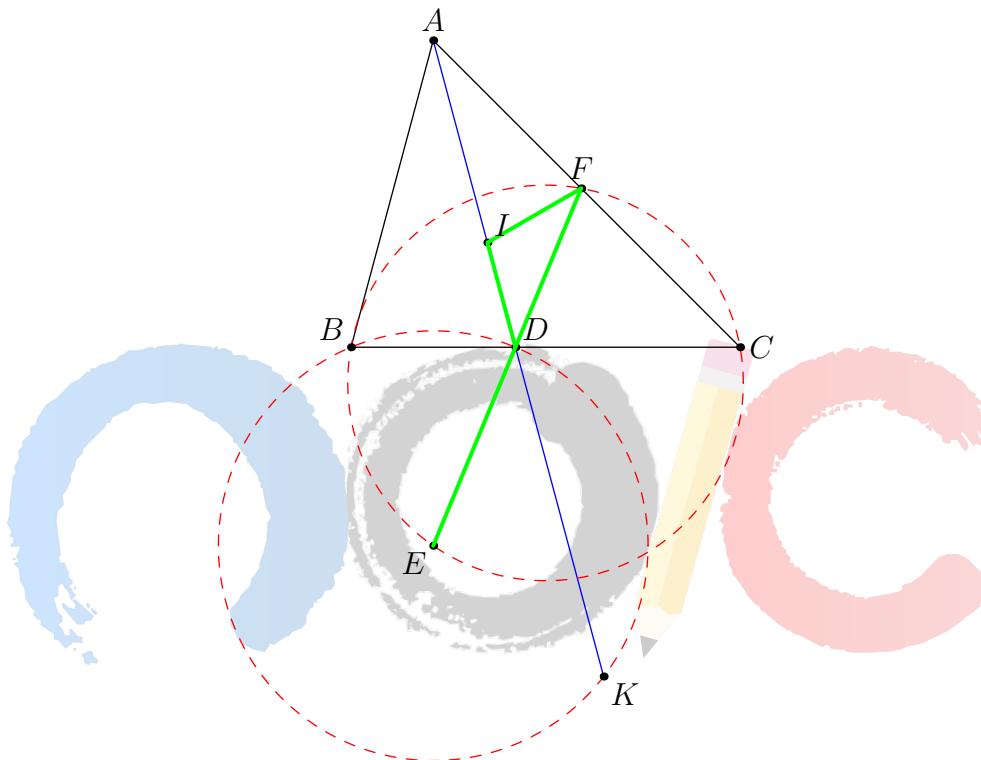
Agora, note que o quadrilátero $AJDP$ é cíclico, pois $\angle AJP = \angle ADP = 90^\circ$, logo $\angle MPK = \angle MPR = \angle MPA = \angle DJM = \angle KJM$, portanto $MJPK$ é cíclico, que nos dá $\angle MKR = \angle PJM = 90^\circ = \angle MDR$, e acabamos. $\square$

Problema 4 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja ABC um triângulo com incentro I e excentro relativo ao vértice A igual a K . Seja D o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A e E o circuncentro do triângulo BDK . Seja também $F \neq C$ a segunda interseção de AC com a circunferência circunscrita a BEC .

- Prove que os pontos D, E, F são colineares.
- Prove que $ID = IF$.
 - O incentro de ABC é o ponto de interseção das bissetrizes internas de $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$.
 - O excentro de ABC relativo ao vértice A é o ponto de interseção da bissetriz interna de $\angle A$, da bissetriz do ângulo externo de B e da bissetriz do ângulo externo de C .

Solução.



Item a

Como E é o centro de (BDK) e $BCEF$ e $BICK$ são cíclicos (devido aos ângulos retos formados pelas bissetrizes internas):

$$F \in \overline{ED} \iff \angle BED = \angle BEF = \angle BCF = 2\angle BCI = 2\angle IKB = 2\angle DKB$$

Item b

Note que, como I está na bissetriz do ângulo ACB , basta provar que $\overline{CD} = \overline{CF}$, mas isso é equivalente a:

$$\angle FDC = \angle DFC \iff \angle EBC = \angle EFC = \angle DFC = \angle FDC = \angle BDE = \angle DBE$$

Problema 5 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c inteiros não nulos, tem uma solução real positiva menor do que $\frac{1}{2025}$.

- (a) Dê um exemplo de equação satisfazendo o enunciado em que um dos números a, b, c é igual a 2025 e os outros dois números têm valor absoluto menor ou igual a 2025. Lembre-se de que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.
- (b) Prove que pelo menos um dos números a, b ou c tem valor absoluto maior ou igual a 2025.

Solução.

Item a

Tome $(a, b, c) = (2025, 2025, -1)$; portanto, a solução real positiva desejada é:

$$x = \frac{-2025 + \sqrt{2025^2 + 4 \times 2025}}{2 \times 2025} = \frac{-45 + \sqrt{2029}}{90} \approx \frac{1}{2025,999} < \frac{1}{2025}$$

Item b

Seja r tal raiz e suponha o contrário; então:

$$ar^2 + br + c = 0 \iff ar^2 + br = -c \implies |ar^2 + br| = |c|$$

Usando o fato de que c é um inteiro não nulo e a desigualdade triangular:

$$|a||r|^2 + |b||r| = |ar^2| + |br| \geq |ar^2 + br| = |c| \geq 1$$

Substituindo $|a|, |b| \leq 2024$ e $|r| < \frac{1}{2025}$:

$$1 \leq \frac{2024}{2025^2} + \frac{2024}{2025} < \frac{1}{2025} + \frac{2024}{2025} = 1$$

Problema 6 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de n vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto X de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto X .

Determine, em função de n , qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

Solução. Vamos provar que a resposta é $n - 2$.

Diremos que um vértice é *vizinho* de outro quando há um lado de $\mathcal{P}$ ligando os dois.

Chamaremos uma diagonal de *curta* liga dois vértices que são vizinhos de um mesmo vértice de $\mathcal{P}$.



Para uma construção com $n - 2$ diagonais, considere o conjunto com todas as diagonais incidentes a um certo vértice v de $\mathcal{P}$ e a diagonal curta entre os vizinhos de v . É fácil ver que este conjunto é obstrutivo.

Provaremos agora por indução em n que qualquer conjunto obstrutivo tem pelo menos $n - 2$ diagonais.

O caso base $n = 4$ é trivial. Para o passo indutivo, suponha que isso é verdade para $n - 1$ mas que entretanto existe um conjunto obstrutivo X com no máximo $n - 3$ diagonais de $\mathcal{P}$.

Afirmção. Existe um vértice v de $\mathcal{P}$ tal que X contém uma diagonal incidente a v mas não contém a diagonal curta entre os vizinhos de v .

Demonstração. Diremos que X incide em um vértice w de $\mathcal{P}$ quando existe uma diagonal em X que é incidente em w .

Suponha que não existe tal vértice v .

Temos então que se X incide em w , a diagonal curta entre os vizinhos de w está em X donde X também é incidente aos vizinhos de v . Consequentemente X incide a todos os vértices de $\mathcal{P}$.

Mas note que isso implica que X contém todas as diagonais curtas de $\mathcal{P}$. Isso é uma contradição pois existem n diagonais curtas (já que $n \geq 5$) enquanto X tem no máximo $n - 3$ diagonais. $\square$

Seja v um vértice com a propriedade da afirmação acima. Seja também $\mathcal{P}'$ o polígono convexo de $n - 1$ lados formado removendo os lados de $\mathcal{P}$ incidentes a v e adicionando a diagonal curta entre os vizinhos de v .

Por fim seja X' o conjunto obtido removendo de X todas as diagonais incidentes a v .

Note que X' tem no máximo $n - 4$ diagonais. Logo pela hipótese de indução existe uma triangulação T' de $\mathcal{P}'$ que não utiliza nenhuma diagonal de X' .

Adicionando a diagonal curta entre os vizinhos de v à T' obtemos uma triangulação T de $\mathcal{P}$ sem nenhuma diagonal em X . Contradição.

Portanto, qualquer conjunto obstrutivo de $\mathcal{P}$ tem pelo menos $n - 2$ diagonais.