

# Soluções da OBM Nível 1

## Problema 1 - Escrito por Tiago Trindade

**Problema.** Um ano  $A$  é dito *inteiraço* quando os dois últimos algarismos de  $A$  **não** são 00 e a divisão de  $A$  pelo número formado pelos dois últimos algarismos de  $A$  tem como resultado um número inteiro. Por exemplo, 2025 e 2002 são anos inteiraços, pois

$$\frac{2025}{25} = 81 \quad \text{e} \quad \frac{2002}{02} = \frac{2002}{2} = 1001$$

são inteiros. Já 2000 e 2003 não são inteiraços, pois 2000 termina em 00 e  $\frac{2003}{3}$  não é inteiro.

- (a) Quais são os próximos três anos inteiraços depois de 2025? Justifique sua resposta.
- (b) Há quantos anos inteiraços entre 1900 e 1999? Justifique sua resposta.

*Solução.*

- (a) Vamos fazer uma suposição por enquanto, e caso consigamos os próximos três anos inteiraços, maravilha! A nossa suposição é que cada um dos próximos três anos inteiraços começa com 20, e portanto é da forma  $2000 + a$  para algum número  $a > 25$  de dois algarismos.

Queremos que  $\frac{2000+a}{a} = \frac{2000}{a} + 1$  seja inteiro, isto é, que  $a$  seja um divisor de 2000. Os próximos divisores de 2000 depois de 25 são 40, 50, 80.

Portanto os próximos três anos inteiraços são 2040, 2050, e 2080.

(Note é claro que qualquer número cujos primeiros dois algarismos formem um número maior que 20 será maior que 2080, então podemos de fato manter a nossa suposição inicial.)

- (b) Pela mesma lógica de antes esses números são da forma  $1900 + a$ , onde  $a$  é um divisor positivo de 1900 com até dois algarismos.

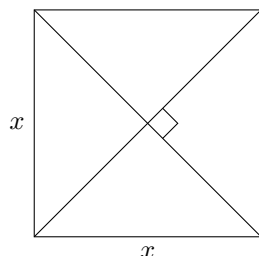
É fácil verificar que todos os divisores positivos de  $1900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$  com até dois algarismos são 1, 2, 4, 5, 10, 19, 20, 25, 38, 76, 95, num total de 11 divisores.

Portanto há 11 anos inteiraços entre 1900 e 1999.

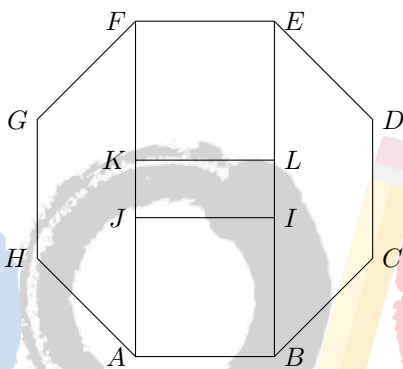
## Problema 2 - Escrito por Tiago Trindade

### Problema.

- (a) A figura a seguir mostra um quadrado de lado  $x$  e diagonal 2 cm. Obtemos uma equação ao calcular a área do quadrado de duas formas: diretamente usando o lado do quadrado ou somando as quatro áreas dos triângulos formados pelos lados e pelas diagonais. Encontre essa equação e calcule o valor de  $x$ .



- (b) A figura a seguir apresenta um octógono regular  $ABCDEFGH$  de lado 2 cm. Cada um dos ângulos internos do octógono regular mede  $135^\circ$ . No interior do octógono, sobre os lados  $AB$  e  $EF$  foram construídos dois quadrados  $ABIJ$  e  $EFLK$ , respectivamente. Qual é a área do quadrilátero  $IJKL$ ?



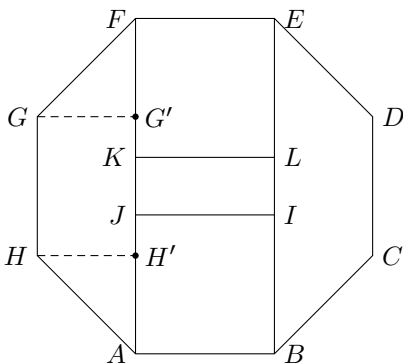
*Solução.*

- (a) Como o lado de cada um dos quatro triângulos retângulos formando o quadrado é metade da diagonal, temos

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}$$

Portanto  $x = \sqrt{2}$ .

- (b) Sejam  $H'$  e  $G'$  as projeções ortogonais de  $H$  e  $G$  sobre  $AF$ :



Pelo item anterior temos:

$$4 + KJ = AF = AH' + H'G' + G'F = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} \quad (1)$$

Logo  $KJ = 2(\sqrt{2} - 1)$  e a área de  $IJKL$  é  $IJ \cdot KJ = 4(\sqrt{2} - 1)$ .

## Problema 3 - Escrito por Tiago Trindade

**Problema.** Ana e Beto decidem disputar um jogo. Inicialmente estão escritos numa lousa os 25 números inteiros de 1 até 25 e nenhum deles está circulado. Eles jogam alternadamente com Ana jogando primeiro. Na sua vez, o jogador escolhe um número não circulado e o circula. Uma configuração é dita *final* se há três números circulados tal que a soma dos três é divisível por 3. O primeiro jogador que após sua jogada deixar uma configuração final perde o jogo.

- Suponha que os números circulados são 1, 2 e 4. Agora é a vez de Beto jogar. Como Beto deve jogar para vencer o jogo? Justifique!
- Considerando o jogo no estado inicial em que nenhum número está circulado e Ana fará a primeira jogada, qual dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer não importando quais sejam as jogadas de seu oponente? Lembre-se de explicar como o jogador que possui estratégia vencedora deve fazer suas jogadas para garantir a vitória.

*Solução.*

- Note que  $1 + 2$ ,  $1 + 4$ ,  $2 + 4$  deixam, respectivamente, restos 0, 2 e 0 na divisão por 3. Assim Beto não pode circular nenhum número que deixa resto 0 nem resto 1 na divisão por 3, pois assim haveriam três cuja soma deixa resto 0 na divisão por 3.

Para Beto ganhar, basta ele circular qualquer número diferente de 2 que deixe resto 2 na divisão por três: assim haverão pares de números cuja soma deixa resto 0 (1 e 2), resto 1 (2 e o outro número que deixa resto 2 na divisão por 3) e resto 2 (1 e 4), de modo que Ana não possa circular nenhum outro número sem deixar uma configuração final.

- Afirmamos que Beto tem uma estratégia vencedora.

Vamos dividir em dois casos:

Se Ana começa circulando um número  $a$  que não é divisível por 3 então Beto circula um número que é congruente a  $3 - a$  módulo 3. Digamos que na sua segunda jogada Ana circula um número  $b$ . Se este fosse divisível por 3 então  $a + 3 - a + b = 3 + b$  seria divisível por 3, portanto suponha que este não é o caso. Então Beto pode circular um número que é congruente a  $3 - b$ : ora, nenhum dos números  $a + 3 - a + b = 3 + b$ ,  $a + 3 - a + 3 - b = 6 - b$ ,  $a + b + 3 - b = 3 + a$ ,  $3 - a + b + 3 - b = 6 - a$  é divisível por 3. Por fim, digamos que Ana escolha um número  $c$  na sua terceira jogada. Se  $c$  é divisível por 3 então também o é  $a + 3 - a + c = 3 + c$  e Ana perde. Similarmente,  $c$  não pode ser congruente a 1 nem 2 módulo 3, pois como se vê facilmente ou um dos números  $a + b$ ,  $6 - a - b$  é congruente a 1 módulo 3 e o outro é congruente a 2, ou o mesmo pode ser dito dos números  $a + 3 - b$ ,  $3 - a + b$ .

Se Ana começar circulando um número  $a$  que seja divisível por 3 então Beto circula outro número que também é divisível por 3. Digamos que em sua segunda jogada Ana circule um número  $b$ . Se este fosse divisível por 3, a soma dos três números escritos até então seria divisível por 3, então podemos supor que este não é o caso. Na sua segunda jogada Beto pode então escolher um número congruente a  $b$  módulo 3: nenhum dos números  $0 + 0 + b$ ,  $0 + b + b$  é divisível por 3. Por fim, na sua terceira jogada Ana não pode escolher um múltiplo de 3 (senão a soma dos dois primeiros com este seria múltiplo de 3), nem um número congruente a  $b$  módulo 3 (senão a soma dos três números com essa propriedade seria múltiplo de 3), nem um número congruente a  $3 - b$  módulo 3 (senão a soma de  $a$ ,  $b$  e este número seria múltiplo de 3). Isto é, qualquer número que Ana circule resultará em uma configuração final.

(Note que não precisamos nos preocupar com números com um certo resto módulo 3 “acabando” no meio do processo acima: há pelo menos 5 números com cada um dos três possíveis restos na lousa.)

## Problema 4 - Escrito por Tiago Trindade

**Problema.** Vamos chamar de *supersoma* de um número inteiro positivo  $N$  a soma de todos os números formados pelas ordenações dos algarismos de  $N$ . Vamos denotar a supersoma por  $S(N)$ . Por exemplo, se  $N = AB$  tem dois algarismos ( $A \neq 0$ ), então a supersoma de  $N$  é dada por  $S(N) = AB + BA$ , e se  $N = ABC$  tem três algarismos ( $A \neq 0$ ), então a supersoma de  $N$  é dada por

$$S(N) = ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA.$$

Observe que mesmo que  $N$  tenha algarismos repetidos fazemos *todas* as ordenações possíveis como se fossem algarismos todos distintos. Por exemplo, 100 tem supersoma  $S(100) = 100 + 100 + 010 + 010 + 001 + 001 = 222$ . Veja que não podemos considerar  $N = 010$  com três algarismos, pois se  $N$  tem três algarismos, então é da forma  $ABC$  com  $A$  diferente de zero.

- Encontre um  $N$  que não é múltiplo de 9, mas cuja supersoma  $S(N)$  é igual a um múltiplo de 9.
- Prove que se  $N$  é múltiplo de 9, então a sua supersoma  $S(N)$  é também um múltiplo de 9.
- Qual é o menor número inteiro positivo  $N$  tal que  $S(N)$  é um múltiplo de 2025?

*Solução.*

- Podemos tomar  $N = 600$ :  $S(600) = 2(600 + 60 + 6) = 1332 = 9 \cdot 148$ .

- É fácil ver que

$$\begin{aligned} S(\overline{A_1 A_2 \dots A_n}) &= (n-1)! \left[ 10^{n-1} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) + 10^{n-2} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) + \dots + (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \right] \\ &= (n-1)! \cdot 11 \dots 1 \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \end{aligned}$$

onde há  $n$  algarismos 1.

Mas é fato conhecido que se  $N = \overline{A_1 A_2 \dots A_n}$  é divisível por 9 então  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  é divisível por 9, e portanto pela fórmula acima  $S(N)$  é também divisível por 9.

- Pelo item anterior, temos:

$$\begin{aligned} S(\overline{AB}) &= 11 \cdot (A + B) \\ S(\overline{ABC}) &= 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (A + B + C) \\ S(\overline{ABCD}) &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot (A + B + C + D) \\ S(\overline{ABCDE}) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 271 \cdot (A + B + C + D + E) \\ S(\overline{ABCDEF}) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (A + B + C + D + E + F) \end{aligned}$$

Evidentemente, nenhum inteiro positivo de um ou dois algarismos tem supersoma múltipla de 2025, já que  $2 \cdot 99 < 2025$ .

Se um número de três algarismos  $\overline{ABC}$  tem supersoma múltipla de 2025, então  $A + B + C$  deve ser múltiplo de  $3^3 \cdot 5^2 = 675$ , o que não é possível já que essa soma é no máximo  $3 \cdot 9 = 27$ .

Se um número de quatro algarismos  $\overline{ABCD}$  tem supersoma múltipla de 2025 então  $A + B + C + D$  é múltiplo de  $3^3 \cdot 5^2 = 675$ , o que não é possível já que essa soma é no máximo  $4 \cdot 9 = 36$ .

Se um número de cinco algarismos  $\overline{ABCDE}$  tem supersoma múltipla de 2025 então  $A + B + C + D + E$  é múltiplo de  $3^3 \cdot 5^2 = 675$ , o que não é possível já que essa soma é no máximo  $5 \cdot 9 = 45$ .

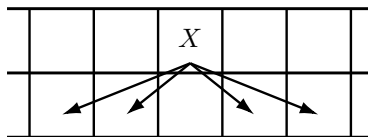
Se um número de seis algarismos  $\overline{ABCDEF}$  tem supersoma múltipla de 2025 então  $A + B + C + D + E + F$  é múltiplo de  $3^2 \cdot 5 = 45$ . É fácil ver que o menor número de seis algarismos com essa propriedade é  $\boxed{189999}$ .

Portanto o menor número com supersoma múltipla de 2025 é 189999.

## Problema 5 - Escrito por Tiago Trindade

**Problema.** Uma cartela do jogo *arrumadinho caótico* é um tabuleiro  $2 \times n$  em que na primeira fila aparecem os números  $1, 2, \dots, n$ , nessa mesma ordem, e, na segunda fila, aparecem os mesmos números arrumados de forma diferente, satisfazendo as seguintes regras:

- (I) Um número escrito na primeira fila só pode aparecer na segunda fila em uma das duas colunas mais próximas que ficam à esquerda ou à direita da coluna em que ele está na primeira fila. Note que não pode aparecer na mesma coluna nas duas filas, ou seja, não há coluna com dois números iguais.



- (II) O conjunto de números escritos nas  $k$  primeiras casas consecutivas da segunda fila, contando da esquerda para a direita, nunca é igual ao conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ , exceto se  $k = n$ . Por exemplo, na figura a seguir, os tabuleiros 1 a 4 não são cartelas do jogo. O **Tabuleiro 1** não satisfaz a regra (I): o número 4 da segunda fila está três colunas à esquerda da quarta coluna. O **Tabuleiro 2** não satisfaz a regra (II): as três primeiras casas da segunda fila formam o conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . O **Tabuleiro 3** não satisfaz a regra (I): temos uma coluna com dois números iguais e também o número 1 da segunda fila está três colunas à direita da primeira coluna. O **Tabuleiro 4** não satisfaz nem a regra (I) nem a regra (II).

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 3 |

Tabuleiro 1  
não é cartela

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 4 |

Tabuleiro 2  
não é cartela

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 4 |

Tabuleiro 3  
não é cartela

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 5 |

Tabuleiro 4  
não é cartela

- (a) Copie a cartela a seguir na sua folha de solução e dê um exemplo de preenchimento para ela fazer parte do jogo.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |

- (b) Qual o número de cartelas  $2 \times 2025$  desse jogo?

*Solução.*

- (a)

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 1 | 5 | 2 | 7 | 4 | 8 | 6 |

(b) Afirmamos que há  $\boxed{2}$  cartelas.

Provaremos o seguinte fato mais forte por indução forte em  $n$ : Para todo  $n \geq 5$ , existem exatamente duas cartelas, uma com  $n, n-2$  nas duas últimas colunas, e outra com  $n-3, n-1$ .

Os caso base  $n = 5$  e  $n = 6$  são relativamente fáceis: mostramos a existência abaixo, e a unicidade segue de um argumento semelhante ao argumento do passo indutivo.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 1 | 5 | 3 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 1 | 5 | 2 | 6 | 4 |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 |

Curiosamente, há uma cartela “extra” para  $n = 4$ .

Para o passo indutivo, suponha que isso é verdade para  $n-2$  e considere um tabuleiro com  $n$  colunas. Note que há duas possibilidades para o número  $n$ : ou ele vai pra coluna  $n-2$  ou ele vai pra coluna  $n-1$ .

No primeiro caso, podemos ver que somente os números  $n-3, n-2, n-1$  podem ser colocados nas últimas duas colunas, donde concluímos que elas devem ter os números  $n-3$  e  $n-1$  (ora, o número  $n-3$  deve estar entre elas, senão as últimas três colunas teriam os números  $n-2, n-1, n$ ; além disso, se  $n-2$  estivesse na última coluna, as últimas quatro colunas teriam os números  $n-2, n, n-3, n-1$ ). Agora, podemos usar a hipótese de indução para  $n-2$ : basta trocar o  $n$  da coluna  $n-2$  por um  $n-3$ , então obter a única cartela possível nessas condições, e trocar o  $n-3$  por  $n$  novamente. Isso funciona pois caso seja possível obter uma cartela  $2 \times n$  nessas condições, efetuando a troca mencionada acima obteríamos uma cartela  $2 \times (n-2)$ .

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $n-3$ | $n-2$ | $n-1$ | $n$   |
|       | $n$   | $n-3$ | $n-1$ |

Agora, vamos pro segundo caso. Agora, a última coluna deve ter o  $n-2$  (senão as duas últimas colunas teriam  $n, n-1$ ), e o  $n-1$  deve ir pra coluna  $n-3$  (senão as três últimas colunas teriam  $n-1, n, n-2$ ). Agora de modo análogo ao que fizemos anteriormente podemos trocar o  $n-1$  da coluna  $n-3$  por  $n-2$  e usar a hipótese de indução para obter a única cartela possível nessa configuração.

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| $n-3$ | $n-2$ | $n-1$ | $n$   |
| $n-1$ |       | $n$   | $n-2$ |

Tomando  $n = 2025$  terminamos o problema.