

Soluções da OBM Nível 3

Problema 1 - Escrito por Fábio Medeiros

Problema. Prove que existe um inteiro positivo n e $2n$ números reais não negativos

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad \text{e} \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

satisfazendo as três propriedades a seguir:

- (i) $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2025^{2025}$;
- (ii) $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq 2025^{2025}$;
- (iii) $c_1 + c_2 + \dots + c_n \leq \frac{1}{2025^{2025}}$, onde $c_i = \min\{a_i, b_i\}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Além disso, encontre o menor inteiro positivo n com tal propriedade.

Solução. Seja $2025^{2025} = k$. Vamos provar que o menor n que satisfaz o enunciado é $k^2 = 2025^{4050}$.

Temos $n \geq k^2$: perceba que

$$na_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq k$$

$$nb_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq k$$

Assim, $a_n \geq \frac{k}{n}$ e $b_n \geq \frac{k}{n} \Rightarrow c_n = \min(a_n, b_n) \geq \frac{k}{n}$. Ademais,

$$\frac{1}{k} \geq c_1 + c_2 + \dots + c_n \geq c_n \geq \frac{k}{n} \Rightarrow n \geq k^2$$

Existem as sequências para $n = k^2$: para atingir esse resultado, deve ocorrer igualdade nas desigualdades acima. Dessa forma, basta tomar

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0, \quad a_n = k \Rightarrow \sum a_i = k \geq k$$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = \frac{k}{n} \Rightarrow \sum b_i = k \geq k$$

Portanto,

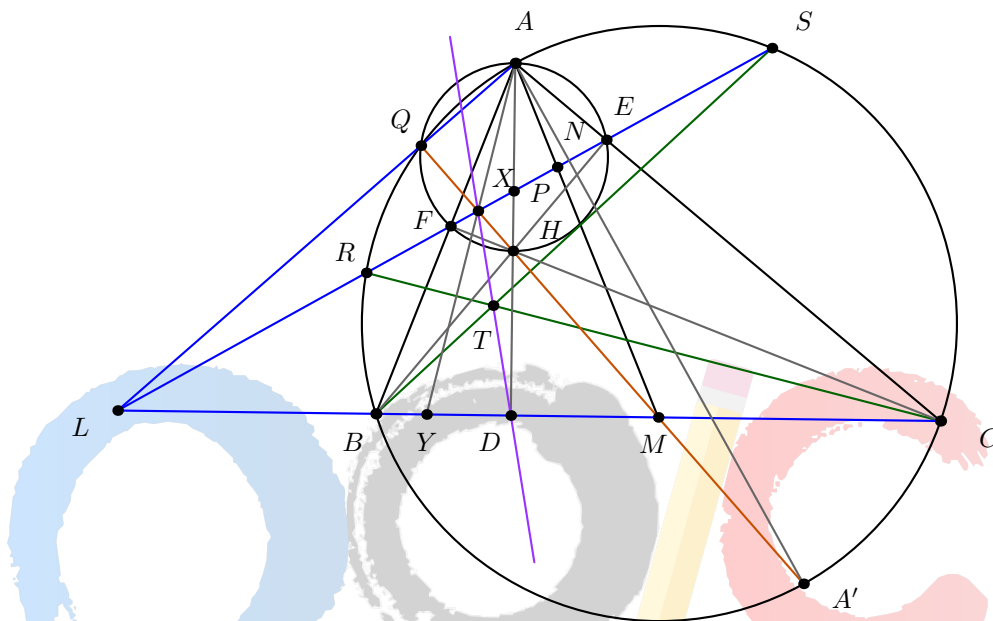
$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0, \quad c_n &= \frac{k}{n} \\ \Rightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_n &= \frac{k}{n} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

■

Problema 2 - Escrito por Fábio Medeiros

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB < AC$ e seja Γ sua circunferência circunscrita. Defina M como o ponto médio do lado BC , e D , E e F como os pés das alturas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente. Tome o ponto N como a interseção de EF e AM . Sejam R , S as interseções de EF e Γ , de forma que R esteja no arco menor AB de Γ e S esteja no arco menor AC de Γ . Além disso, suponha que BS e CR se encontram no ponto T . Mostre que DA é bissetriz do ângulo $\angle TDN$.

Solução.



Sendo A' o reflexo de H por M , é conhecido que A' é a antípoda de A em Γ . Ademais, sendo Q a outra interseção de MH com Γ , sabemos que $\angle AQH = \angle AQA' = 90^\circ \Rightarrow AQFHE$ são cíclicos (círculo de diâmetro AH). Dessa forma, por centro radical em $(AQFHE)$, $(BCEF)$, Γ sabemos que BC , EF , AQ concorrem em L .

Seja X a interseção de MH com EF , O o circuncentro de Γ , $P = AD \cap EF$ e $Y = AX \cap BC$.

Lema 1: $AR = AS$

Sabemos que $\angle EAO = \angle CAO = 90^\circ - \angle B$ e $\angle FEA = \angle B \Rightarrow AO \perp EF \Rightarrow AO$ é mediatriz de RS , já que $OR = OS$ também. Logo, $AR = AS$. ■

Lema 2: $(L, X; R, S) = -1$

$(L, X; R, S) \stackrel{Q}{=} (A, A'; R, S) = -1$, pois $AR = AS$ e $A'R = A'S$. ■

Lema 3: D, T, X colineares

Seja ℓ a polar de L em relação a Γ . Por ceva-menelaus, $(L, D; B, C) = -1 \Rightarrow D \in \ell$. Por brokard no $\#BRSC$ sabemos que $T \in \ell \Rightarrow \ell = DT$. Dessa forma, se $DT \cap RS = X' \Rightarrow (L, X'; R, S) = -1 \Rightarrow X = X' \Rightarrow D, T, X$ colineares. ■

Lema 4: $(L, P; X, N) = -1$

Temos $(L, P; X, N) \stackrel{A}{=} (L, D; Y, M) \stackrel{X}{=} (L, XD \cap AL; A, Q) = -1$ já que XD é a polar de L . ■

Pelo Lema 4, sabemos que $(L, P; X, N) = -1$ e que $LD \perp PD \Rightarrow PD$ é bissetriz do $\angle XDN \Rightarrow AD$ é bissetriz do $\angle TDN$. ■

Problema 3 - Escrito por Fábio Medeiros

Problema 1. Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência infinita de inteiros positivos tal que

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ são inteiros positivos distintos dois a dois;
- (ii) para $n > 1000$, define-se a_n como o menor inteiro positivo diferente de $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ tal que $|a_{n-1} - a_n|$ é uma potência de 2025 (note que 1 é uma potência de 2025).

Prove que todo inteiro positivo aparece na sequência.

Solução. Seja A essa sequência. Vamos mostrar o resultado a partir do seguinte lema.

Lema 1: A passa infinitas vezes por todos os restos mod 2025^k , $\forall k \geq 1$.

Prova: Vamos mostrar isso por indução em k .

- **Base:** Caso isso seja falso para $k = 1$, então há algum resto r mod 2025 que aparece finitas vezes. Dessa forma, $\exists c$ tal que para todo $l \geq c$, $2025l + r \notin A$.

Existe um ponto N_1 a partir do qual não aparecem mais termos com resto r (mod 2025). Existe um ponto N_2 a partir do qual não aparecem mais termos $a_j \equiv r + 1$ mod 2025 e que $a_j < 2025c + r$. Olhe a sequência a partir do ponto $M = \max(N_1, N_2)$.

Se o resto $r + 1$ aparecesse infinitas vezes, então temos um $a_j = 2025z + (r + 1)$ com $j > M$ e $z > c$. Como $2025z + r$ seria uma opção para a_{j+1} (já que $2025z + r \notin A$ e assim não apareceu antes), então $a_{j+1} < a_j$. Ademais, não temos mais termos congruentes à r mod 2025 $\Rightarrow a_{j+1} = a_j - 2025^t$ e $t \geq 1$. Dessa forma, $a_{j+1} \equiv r + 1$ (mod 2025). Como $M > N_2 \Rightarrow a_{j+1} > 2025c + r$, podemos repetir o argumento para a_{j+2} e então a sequência fica decrescente a partir de a_j , absurdo.

Logo, o resto $r + 1$ aparece finitas vezes. Analogamente, $r + 2, r + 3, \dots$ aparecem finitas vezes. Como cicla (estamos analisando mod 2025), então todos os restos aparecem finitas vezes $\Rightarrow$ a sequência é finita, absurdo!

- **Passo:** Suponha que é válido para $k = n$. Vamos dividir cada resto r mod 2025^n em 2025 restos mod 2025^{n+1} : $r, 2025^n + r, 2 \cdot 2025^n + r, \dots, 2024 \cdot 2025^n + r$.

Caso exista algum resto $m2025^n + r$ mod 2025^{n+1} que aparece finitas vezes, então há um c tal que $2025^{n+1}l + (m2025^n + r) \notin A$ para todo $l \geq c$.

Existe um ponto N_1 a partir do qual não aparecem mais termos com resto $m2025^n + r$ (mod 2025^{n+1}). Existe um ponto N_2 a partir do qual não aparecem mais termos $a_j \equiv (m + 1)2025^n + r$ mod 2025^{n+1} e que $a_j < 2025^{n+1}c + m2025^n + r$. Olhe a sequência a partir do ponto $M = \max(N_1, N_2)$.

Se o resto $(m + 1)2025^n + r$ aparecesse infinitas vezes, então temos um $a_j = z2025^{n+1} + (m + 1)2025^n + r$ com $j > M$ e $z > c$. Similarmente ao que foi feito no caso base, $a_{j+1} < a_j - 2025^n c \Rightarrow a_{j+1} \equiv a_j$ mod 2025^{n+1} . Como $M > N_2 \Rightarrow a_{j+1} > 2025^{n+1}c + m2025^n + r$, podemos repetir o argumento para a_{j+2} e então a sequência fica decrescente a partir de a_j , absurdo. ■

Suponha, por absurdo, que $(a_n)_{n \geq 1}$ não cubra todos naturais. Tome o menor m que não aparece na sequência. Dessa forma, para todo $b > constante$ temos que $m + 2025^b \notin A$. Caso contrário, $a_{j-1} = m + 2025^b \Rightarrow a_j = m + 2025^b - 2025^c < m$. Logo, $a_j \in (1, 2, \dots, m - 1)$, o que só ocorre finitas vezes.

Corolário da existência de m : Para $b > N$ (tal que $2025^N > m \geq 2025^{N-1}$) temos que $m + k \cdot 2025^b \notin A$ para todo $k \geq 1$.

Prova: Vamos mostrar isso para por indução.

- **Base:** Feita acima para $k = 1$.

- **Passo:** Sabemos que $m + i2025^b$ não está na sequência para todo $i < k$. Se existe j com $a_j = m + k2025^b \Rightarrow a_{j+1} = a_j - 2025^t$, com $t > b$.

Contudo, sabemos que $k \geq 2025^{t-b}$, se não $a_{j+1} \leq m + (2025^{t-b} - 1)2025^b - 2025^t = m - 2025^b \leq m - 2025^N < 0$, contradição.

Logo, podemos escrever $k = k' + 2025^{t-b} \Rightarrow a_{j+1} = m + k'2025^b \notin A$, absurdo!

Entretanto, o corolário diz que há finitos termos em A com resto $m \bmod 2025^b$, o que contradiz o Lema 1! Logo, todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ está em A .



Problema 4 - Escrito por Rafael Amiune

Problema. Para todo inteiro positivo n , defina

$$f(n) = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Determine todos os inteiros positivos k tais que existe um inteiro positivo n satisfazendo $f(n) = nk$.

Observação: para um número real x , define-se $\lfloor x \rfloor$ como o maior inteiro que é menor ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor \sqrt{1} \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \sqrt{14} \rfloor = 3$.

Solução. Testando até $n = 34$ (fica a cargo do leitor, não é uma tarefa árdua), obtemos apenas 1, 2 e 3 como possíveis soluções, com $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(11) = 22$ e $f(25) = 75$, portanto assumamos $n \geq 35$.

Podemos calcular $f(m^2 - 1)$ facilmente, pois o número k aparece $2k + 1$ vezes como o piso de alguém, para $1 \leq k \leq m - 1$, logo

$$f(m^2 - 1) = \sum_{k=1}^{m-1} k \cdot (2k + 1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} k^2 + \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{(m-1)(m)(4m+1)}{6}.$$

Deste modo, se $n = m^2 - 1 + r$, com $r \leq 2m$, temos $f(n) = \frac{(m-1)(m)(4m+1)}{6} + mr$. Se $f(n) = nk$, temos $n \mid f(n) \Rightarrow n \mid 6 \cdot f(n)$, então

$$\begin{aligned} m^2 - 1 + r &\mid 4m^3 - 3m^2 - m + 6mr \\ \Rightarrow m^2 - 1 + r &\mid -3m^2 + 3m + 2mr \\ \Rightarrow m^2 - 1 + r &\mid 3m + 2mr - 3 + 3r. \end{aligned}$$

É claro que $3m + 2mr - 3 + 3r > 0$, logo $3m + 2mr - 3 + 3r = q \cdot (m^2 - 1 + r)$, para algum $q > 0$. Note que $q < 5$, pois

$$3m + 2mr - 3 + 3r < 5(m^2 - 1 + r) \iff r \cdot (2m - 2) < 5m^2 - 3m - 2.$$

E, de fato, $2m \cdot (2m - 2) < 5m^2 - 3m - 2 \iff m^2 + m > 2$, que é obviamente verdade, portanto, $q \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Caso 1: $q = 1$.

$$\begin{aligned} 3m + 2mr - 3 + 3r &= m^2 - 1 + r \\ \Rightarrow 2r \cdot (m + 1) &= m^2 - 3m + 2 \\ \Rightarrow m + 1 &\mid m^2 - 3m + 2 \\ \Rightarrow m + 1 &\mid -4m + 2 \\ \Rightarrow m + 1 &\mid 6, \end{aligned}$$

que é falso para $n \geq 35$.

Caso 2: $q = 2$.

$$\begin{aligned} 3m + 2mr - 3 + 3r &= 2m^2 - 2 + 2r \\ \Rightarrow r \cdot (2m + 1) &= 2m^2 - 3m + 1 \\ \Rightarrow 2m + 1 &\mid 2m^2 - 3m + 1 \\ \Rightarrow 2m + 1 &\mid -4m + 1 \\ \Rightarrow 2m + 1 &\mid 3, \end{aligned}$$

que é falso para $n \geq 35$.

Caso 3: $q = 3$.

$$3m + 2mr - 3 + 3r = 3m^2 - 3 + 3r \implies r = \frac{3(m-1)}{2}.$$

Podemos substituir $m = 2l + 1$, nos dando $r = 3l$, e jogando na original temos

$$k = \frac{\frac{(2l)(2l+1)(8l+5)}{6} + (2l+1)(3l)}{4l^2 + 7l} = \frac{(2l+1)(\frac{8l+5}{3} + 3)}{4l+7} = \frac{4l+2}{3}.$$

Para que k seja inteiro, devemos ter $l = 3t + 1$, nos dando $k = 4t + 2$.

Caso 4: $q = 4$.

$$\begin{aligned} 3m + 2mr - 3 + 3r &= 4m^2 - 4 + 4r \\ \implies r \cdot (2m - 1) &= 4m^2 - 3m - 1 \\ \implies 2m - 1 &\mid 4m^2 - 3m - 1 \\ \implies 2m - 1 &\mid -m - 1 \\ \implies 2m - 1 &\mid m - 2, \end{aligned}$$

que é falso para $n \geq 35$.

Portanto, concluímos que os únicos possíveis valores de k são 1, 3 e $4t + 2$, para $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. ■



Problema 5 - Escrito por Tiago Trindade

Problema. Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de n vértices, $n \geq 4$. Podemos particionar $\mathcal{P}$ em triângulos, traçando diagonais que não se intersectam no interior de $\mathcal{P}$. Uma partição desse tipo é chamada de *triangulação*. Um conjunto X de diagonais de $\mathcal{P}$ é dito *obstrutivo* se tem a seguinte propriedade:

Qualquer triangulação de $\mathcal{P}$ utiliza ao menos uma diagonal que pertence ao conjunto X .

Determine, em função de n , qual é a menor quantidade possível de elementos de um conjunto obstrutivo.

Solução. Vamos provar que a resposta é $n - 2$.

Diremos que um vértice é *vizinho* de outro quando há um lado de $\mathcal{P}$ ligando os dois.

Chamaremos uma diagonal de *curta* liga dois vértices que são vizinhos de um mesmo vértice de $\mathcal{P}$.



Para uma construção com $n - 2$ diagonais, considere o conjunto com todas as diagonais incidentes a um certo vértice v de $\mathcal{P}$ e a diagonal curta entre os vizinhos de v . É fácil ver que este conjunto é obstrutivo.

Provaremos agora por indução em n que qualquer conjunto obstrutivo tem pelo menos $n - 2$ diagonais.

O caso base $n = 4$ é trivial. Para o passo indutivo, suponha que isso é verdade para $n - 1$ mas que entretanto existe um conjunto obstrutivo X com no máximo $n - 3$ diagonais de $\mathcal{P}$.

Afirmção. Existe um vértice v de $\mathcal{P}$ tal que X contém uma diagonal incidente a v mas não contém a diagonal curta entre os vizinhos de v .

Demonstração. Diremos que X incide em um vértice w de $\mathcal{P}$ quando existe uma diagonal em X que é incidente em w .

Suponha que não existe tal vértice v .

Temos então que se X incide em w , a diagonal curta entre os vizinhos de w está em X donde X também é incidente aos vizinhos de v . Consequentemente X incide a todos os vértices de $\mathcal{P}$.

Mas note que isso implica que X contém todas as diagonais curtas de $\mathcal{P}$. Isso é uma contradição pois existem n diagonais curtas (já que $n \geq 5$) enquanto X tem no máximo $n - 3$ diagonais. ■

Seja v um vértice com a propriedade da afirmação acima. Seja também $\mathcal{P}'$ o polígono convexo de $n - 1$ lados formado removendo os lados de $\mathcal{P}$ incidentes a v e adicionando a diagonal curta entre os vizinhos de v .

Por fim seja X' o conjunto obtido removendo de X todas as diagonais incidentes a v .

Note que X' tem no máximo $n - 4$ diagonais. Logo pela hipótese de indução existe uma triangulação T' de $\mathcal{P}'$ que não utiliza nenhuma diagonal de X' .

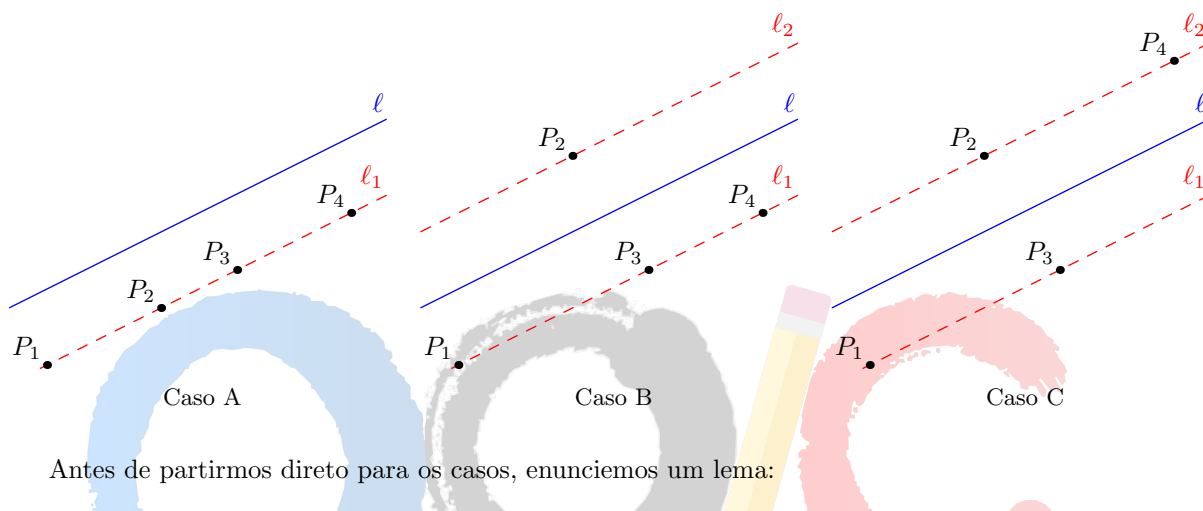
Adicionando a diagonal curta entre os vizinhos de v à T' obtemos uma triangulação T de $\mathcal{P}$ sem nenhuma diagonal em X . Contradição.

Portanto, qualquer conjunto obstrutivo de $\mathcal{P}$ tem pelo menos $n - 2$ diagonais.

Problema 6 - Escrito por Bruno Feltran

Problema. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo satisfazendo $90^\circ > \angle ABC > \angle CDA > \angle DAB$. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as retas ℓ tais que existe uma circunferência tangente às quatro reflexões de ℓ pelos quatro lados do quadrilátero $ABCD$. Prove que $\mathcal{R}$ pode ser particionado em 8 conjuntos de modo que as retas de cada conjunto sejam todas concorrentes ou todas paralelas.

Solução. Comece percebendo que há tal circunferência se e somente se existe um ponto que equidista de todas as retas refletidas. Alternativamente (desrefletindo), isso acontece se e somente se há um ponto P_ℓ tal que suas quatro reflexões equidistam de ℓ . Sejam P_1, P_2, P_3 e P_4 tais reflexões e defina ℓ_1 e ℓ_2 de acordo com a figura. Note que quatro pontos podem equidistar de uma reta de três maneiras distintas:



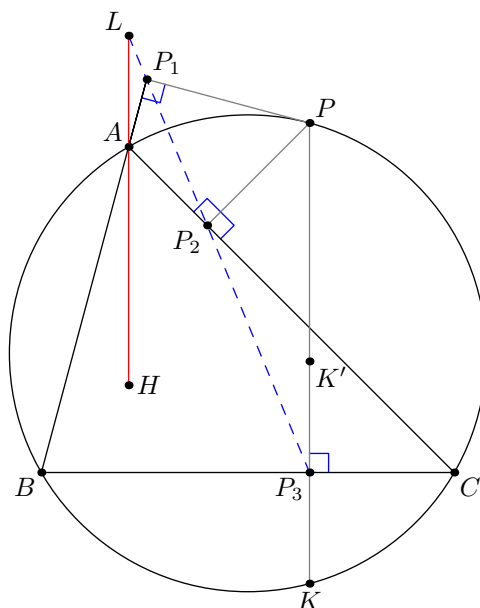
Antes de partirmos direto para os casos, enunciemos um lema:

Lema 1 (Reta de Steiner)

Sejam ABC um triângulo, P um ponto qualquer no plano, e P_1, P_2 e P_3 suas reflexões pelos lados do triângulo. Então $\overline{P_1P_2P_3}$ formam uma reta se e somente se $(ABCP)$ estão em um círculo. Além disso, se isso acontecer, então essa reta passa pelo ortocentro H de $\triangle ABC$.

Demonstração

Inicie realizando uma homotetia de centro P e razão $\frac{1}{2}$, de forma que as reflexões sejam mapeadas para os pés das perpendiculares. Pela preponderância de quadriláteros cíclicos formados pelos ângulos retos:



Lema de Steiner

$$\angle AP_2P_1 = \angle P_3P_2C \iff \angle APP_1 = \angle P_3PC \iff \angle PAB + \angle BCP = 180^\circ$$

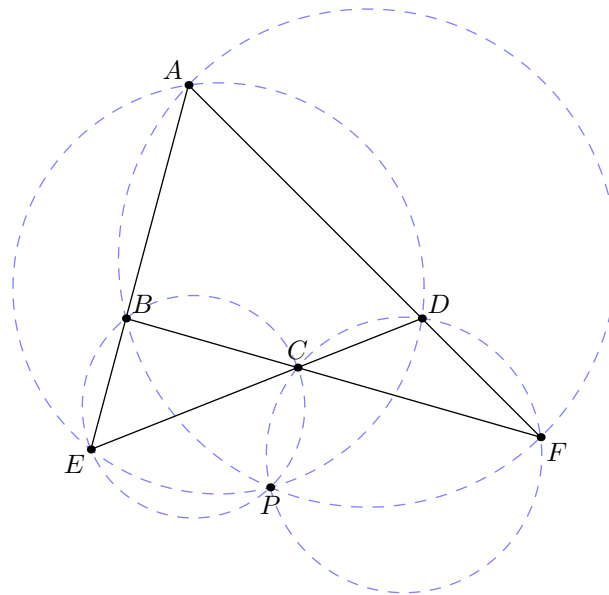
Para provar que a reta de Steiner passa pelo ortocentro, basta provar que sua homotetia (reta de Simson) corta o segmento HP em seu ponto médio. Seja, $L = \overline{AH} \cap \overline{P_1P_2P_3}$, $K = (ABC) \cap \overline{PP_2}$ e K' seu reflexo por $\overline{BC}$. Note que, pelo lema da reflexão de ortocentro, K' é ortocentro de $\triangle PBC$ e pode-se provar (traçando uns trapézios isósceles) que $AHK'P$ é paralelogramo. Além disso, tem-se que ALP_3K também é paralelogramo, pois $\angle LP_3P = \angle P_2CP = \angle AKP$. Portanto, é óbvio que LHP_3P é paralelogramo e terminamos. ■

Caso A

Neste caso, tratamos a situação onde todos os quatro pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 estão sobre uma mesma reta paralela a ℓ . Sejam $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ e $F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$.

Por sucessivas aplicações do lema, temos que $P \in (BCE)$, $P \in (ADE)$, $P \in (ABF)$ e $P \in (CDF)$, o que prontamente conclui que P é o ponto de Miquel de $ABCD$, que é único. Dessa forma, todas as retas ℓ correspondentes a este caso são paralelas a uma única reta fixa.

Este caso delimita 1 conjunto de retas paralelas.

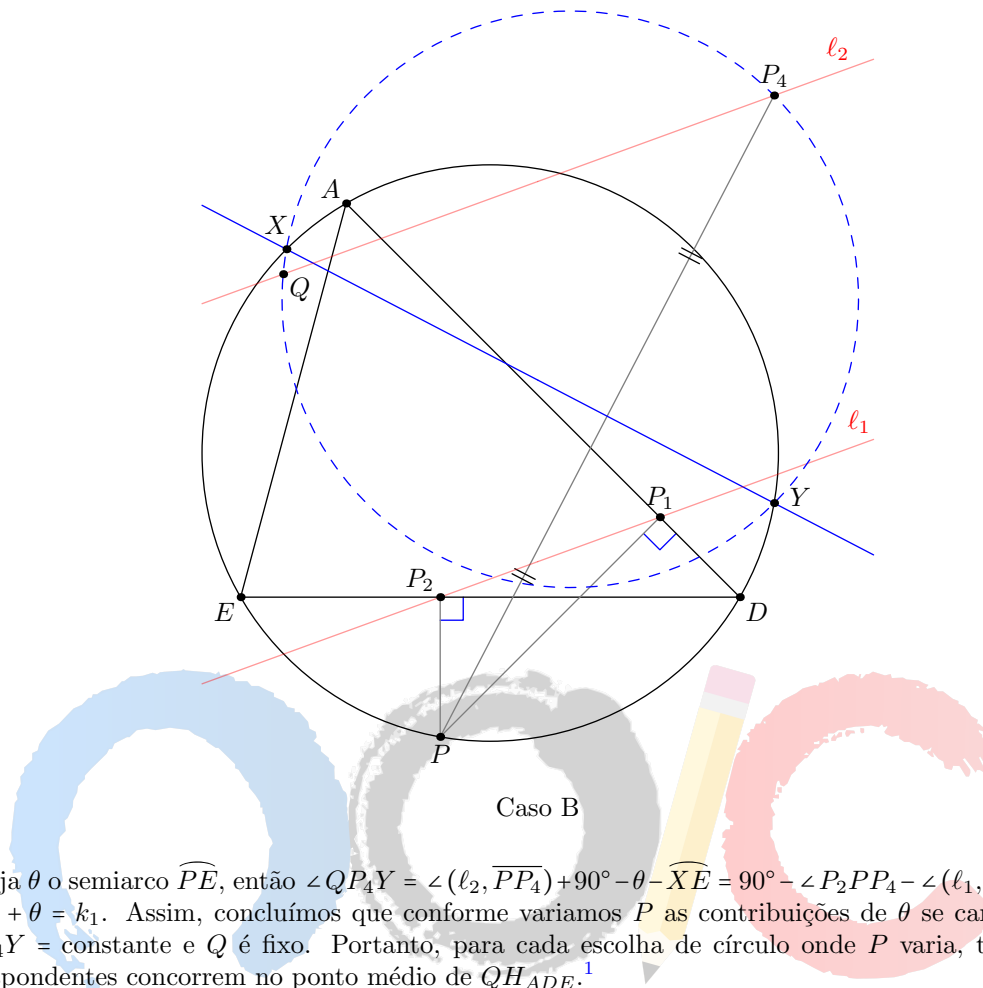


Caso A

Caso B

Neste caso, tratamos a situação onde três pontos P_1 , P_2 e P_3 estão sobre uma reta ℓ_1 paralela a ℓ , enquanto P_4 está sobre uma outra reta ℓ_2 também paralela a ℓ de forma que ℓ seja a “mediatriz” das duas.

Pelo lema, temos que P deve estar em um dos círculos enunciados logo acima (SSPG que este é (ADE)). Também, é fato que ℓ_1 passa por um ponto fixo (o ortocentro de $\triangle ADE$). Portanto, basta obter que a reta paralela a ℓ_1 que passa pela reflexão de P por $\overline{BC}$ também passa por um ponto fixo, pois assim, todas as ℓ correspondentes concorreriam no ponto médio dos pontos fixos (se isso não faz sentido para você, tente desenhar uma figura). Note que este caso vai resultar em 4 subconjuntos de retas devido a escolha do ponto estranho P_4 para corresponder a alguma das quatro retas que resultam no quadrilátero. Assim, reduzimos ao seguinte problema de *moving pictures*:



Caso B

Seja θ o semiarco $\widehat{PE}$, então $\angle QP_4Y = \angle(\ell_2, \overline{PP_4}) + 90^\circ - \theta - \widehat{XE} = 90^\circ - \angle P_2PP_4 - \angle(\ell_1, \overline{DE}) + k_0 - \theta = k_1 - \theta + \theta = k_1$. Assim, concluímos que conforme variamos P as contribuições de θ se cancelam, então $\angle QP_4Y = \text{constante}$ e Q é fixo. Portanto, para cada escolha de círculo onde P varia, todas as retas correspondentes concorrem no ponto médio de QH_{ADE} .¹

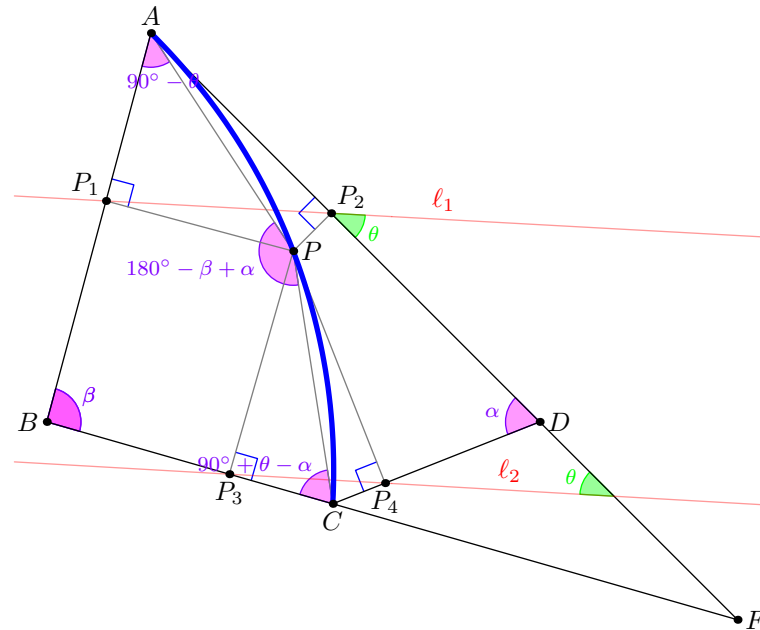
Este caso resulta em 4 conjuntos de retas concorrentes.

Caso C

Neste caso, investigaremos o cenário onde dois pontos P_1 e P_2 estão sobre uma reta ℓ_1 paralela a ℓ , enquanto P_3 e P_4 estão sobre uma outra reta ℓ_2 também paralela e ℓ de forma que ℓ seja a “mediatriz” das duas. Ademais, vamos dividir este caso em dois subcasos: se P_1 e P_2 são de lados opostos e se são de lados adjacentes.

Subcaso C.1 Este caso se refere a quando os pontos são de lados adjacentes e é melhor representado por um ponto dentro do quadrilátero (tanto faz o que você escolhe pois tudo é generalizável por ângulos orientados). Este caso vai culminar em dois subconjuntos correspondendo aos pareamentos $A \leftrightarrow C$ e $B \leftrightarrow D$ (a figura, por exemplo, retrata o primeiro evento).

¹Neste passo utilizamos que XY efetivamente existem para fazer as contas com os angulinhos, isto é os círculos se intersectam. Na verdade, na metade dos casos possíveis isso não acontece. No entanto, isso não é um problema, poderíamos ter escolhido quaisquer pontos sobre o círculo para fazer isso, dando exatamente o mesmo resultado, mas com mais difícil visualização, afinal a única coisa que importa é o ângulo entre retas.



Caso C.1

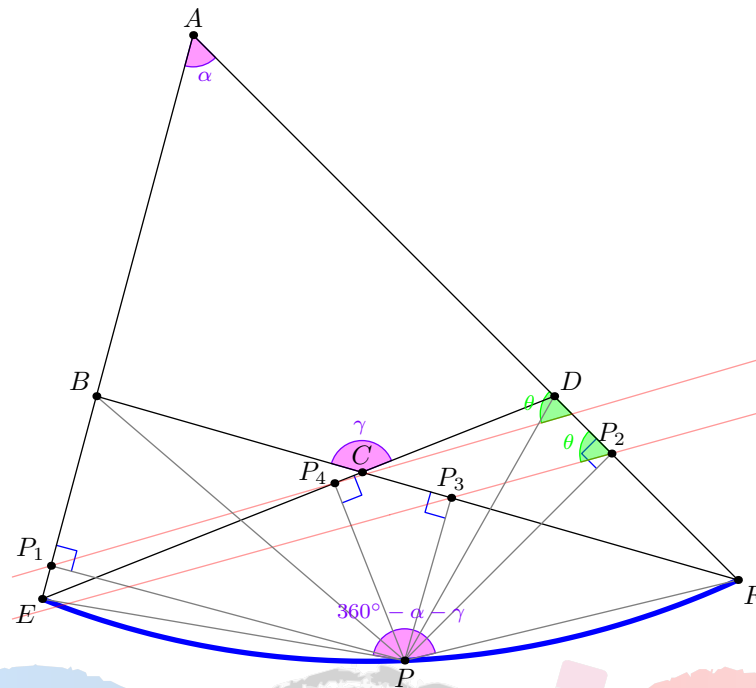
Realizando a caça angular de acordo com os ângulos do quadrilátero definidos na figura excessivamente estilosa:

$$\begin{aligned} \ell_1 \parallel \ell_2 &\iff \theta = \angle P_1 P_2 A = \angle P_4 P_3 C + \angle CFD \iff \\ 90^\circ - \angle BAP &= 90^\circ - (\angle BCD - \angle PCB) + \angle BCD - 180^\circ + \alpha \iff \\ \angle PCB + \angle BAP &= 180^\circ - \alpha \iff \angle APC = 180^\circ - \beta + \alpha \end{aligned}$$

Assim, concluímos que P jaz em um círculo fixo por A e C . Para finalizar, defina $X = \overline{AD} \cap (APC)$ e $Y = \overline{AB} \cap (APC)$. Pelo lema de Steiner, as reflexões de P por $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ formam uma reta que passa pelo ortocentro de $\triangle AXY$. Portanto, é evidente que, uma vez que tanto ℓ_1 quanto ℓ_2 passam por pontos fixos, sua mediatriz ℓ também deve passar por um ponto fixo (o ponto médio destes dois).

Este subcaso dá origem a 2 conjuntos de retas concorrentes.

Subcaso C.2 O presente subcaso corresponde à situação onde os pontos que formam retas paralelas provêm de lados opostos. Nesse contexto, haverá somente um subconjunto (pois só há um tal pareamento) e este é melhor visualizado tomando um ponto no exterior do quadrilátero.



Subcaso C.2

O desenrolar geométrico aqui será muito análogo ao feito anteriormente. Marcando os ângulos: $\angle EPF = \angle EPP_4 + \angle P_4PP_3 + \angle P_3PF = 180^\circ - \theta - \alpha + 180^\circ - \gamma + \theta = 360^\circ - \alpha - \gamma$. Assim, P varia sobre um círculo fixo por E e F e, utilizando o mesmo truque de prolongar as retas e considerar a reta de Steiner, temos que tanto ℓ_1 quanto ℓ_2 passam por ortocentros fixos e terminamos. ■

Este subcaso resulta em 1 subconjunto de retas concorrentes.