

## Instruções Gerais

1. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas;
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página;
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA;
4. O preenchimento da Folha Resumo de Respostas é obrigatório;
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 325 pontos), divididas nas seguintes categorias:
  - Questões Curtas - **5 questões**, sendo 2 valendo 15 pontos, 1 valendo 20 pontos e 2 valendo 25 pontos.
  - Questões Médias - **3 questões**, sendo 1 valendo 30 pontos e 2 valendo 35 pontos.
  - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 55 pontos e 1 valendo 70 pontos.
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva.
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

## Instruções Específicas

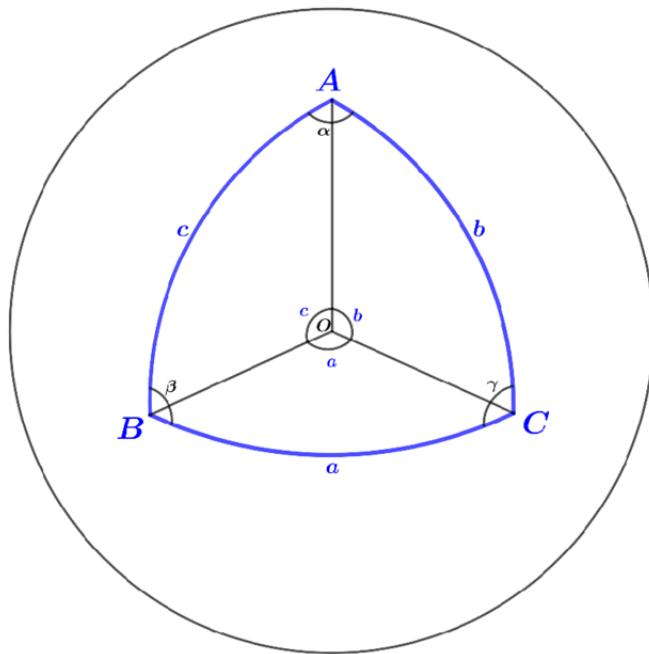
1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Hubble:

$$v_{rad} = H_0 \cdot d$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$F = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

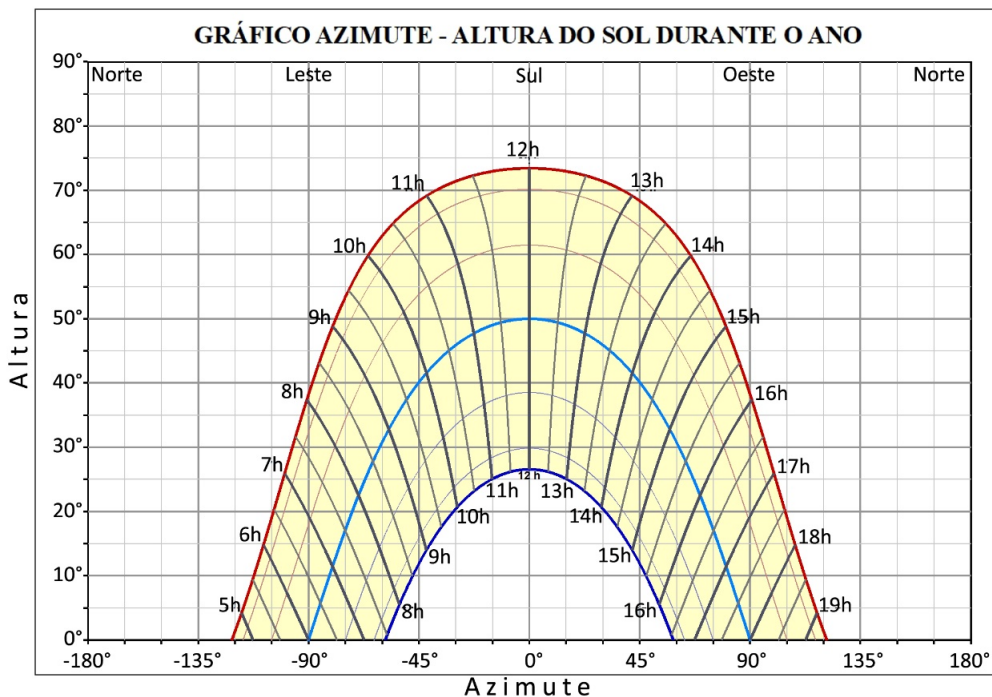
sendo  $\epsilon$  a emissividade do corpo irradiante, com  $\epsilon = 1$  para corpos negros

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

## Questões Curtas

1. (15 pontos) O gráfico abaixo traz a altura do Sol em função do azimute em uma determinada cidade, ao longo de um ano inteiro.



Sabendo que as horas no gráfico correspondem ao Tempo Solar Verdadeiro do local, responda:

- (5 pontos) Qual é a latitude geográfica desta cidade?
  - (3 pontos) Qual será a distância zenital do Sol às 14 horas do dia do Solstício de Verão?
  - (3 pontos) Qual será o azimute do Sol às 11 horas do dia do Solstício de Inverno?
  - (4 pontos) A que horas o Sol estará  $45^\circ$  acima do Horizonte nos dias dos Equinócios?
2. (15 pontos) O famoso astronauta Juvenas está em uma missão espacial muito importante para o avanço da humanidade. Seu amigo, Cabrito, influente engenheiro aeroespacial, pergunta qual o seu paradeiro. Juvenas, entretanto, não dá a resposta diretamente: apenas diz estar em um asteroide e que, quando em oposição com relação à Terra, a magnitude aparente do Sol medida por ele é  $m_A = -24,85 \text{ mag}$ .

Cabrito, inteligente como sempre, decide medir o tamanho angular do asteroide em oposição a fim de determinar exatamente de onde seu amigo enviou sua resposta. O valor obtido foi de  $\theta_A = 0,530''$ .

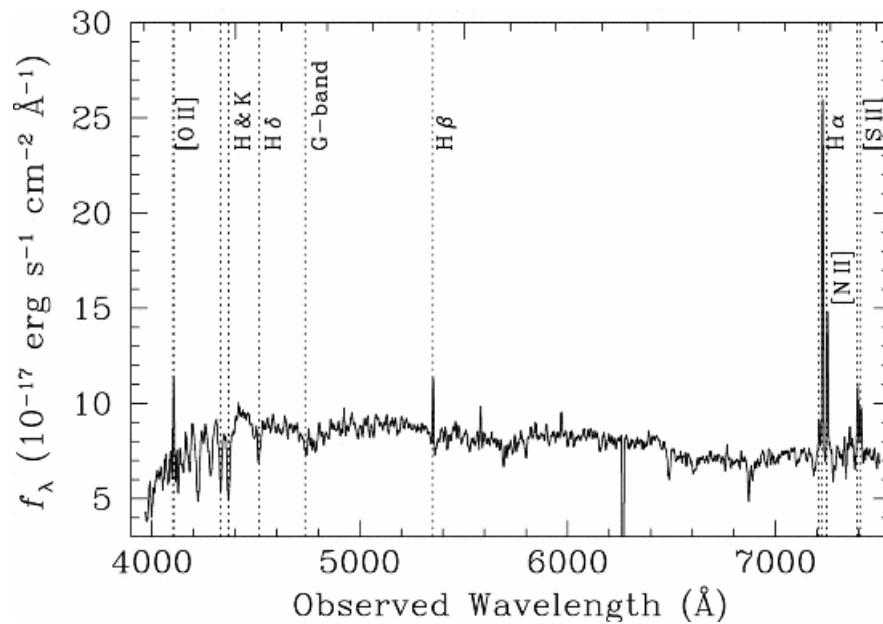
Com base na tabela abaixo, em qual asteroide o astronauta realizava sua missão?

Tabela 1: Tabela de Asteroides

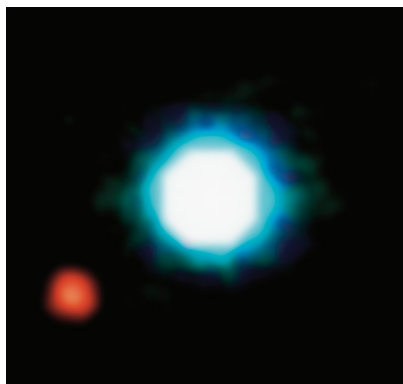
Nome	Diâmetro Médio (km)
Vesta	525
Hígia	431
Interamnia	326
Euphrosyne	268
Themis	196

**Dado:** As órbitas são coplanares e todos os efeitos de extinção podem ser desprezados.

3. **(20 pontos)** Determine a luminosidade, em watts, de uma galáxia com inclinação  $i = 0^\circ$ , magnitude aparente  $m = 18,2$  e cujo espectro está representado na figura abaixo. Desconsidere os efeitos relativísticos.



4. **(25 pontos)** A figura abaixo é a primeira imagem direta de um exoplaneta, feita em 2004 pelo *Very Large Telescope* (VLT). Trata-se do planeta  $2M1207b$ , cinco vezes mais massivo que Júpiter e que descreve uma órbita aproximadamente circular de raio  $r = 55 UA$  ao redor da estrela  $2M1207$ , cuja massa é  $M = 0,025 M_\odot$ . A foto foi construída a partir de observações na banda de infravermelho próximo  $L$  (comprimento de onda  $\lambda = 3,8 \mu m$ ). Considerando uma revolução do planeta em torno da estrela, calcule a duração total, em anos, do período de tempo em que o VLT não conseguiria resolver angularmente a separação entre  $2M1207b$  e  $2M1207$ , mantendo sempre as condições de observações descritas acima.



Créditos: *ESO*.

**Dados:**

- Massa de Júpiter:  $1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
- Distância de *2M1207* ao Sol:  $d = 70,5 \text{ pc}$
- Diâmetro do espelho primário do VLT:  $D = 8,20 \text{ m}$
- Considere que a linha de visada esteja contida no plano da órbita de *2M1207b* em torno de sua estrela

5. **(25 pontos)** Em uma certa noite, Gigirotto, ao estudar melhor o movimento do satélite Gelecaio-42, percebe que este logo passará por seu meridiano local. Ela decide então descobrir a que distância, naquele momento, Gelecaio-42 estará do Kennedy Space Center, na Flórida ( $\phi = 28^\circ 31' 27'' \text{ N}$ ), onde ela está passando suas férias. Gigirotto sabe que o satélite se move em uma órbita circular de altura  $h = 420 \text{ km}$ , e, ao analisar dados de um almanaque astronômico, descobre que, em uma certa noite, ele terá, em momentos diferentes, as mesmas coordenadas geocêntricas de 2 estrelas: Arcturus ( $\alpha_A = 14\text{h } 15\text{m } 38\text{s}$ ;  $\delta_A = 19^\circ 10' 19''$ ) e Markab ( $\alpha_M = 23\text{h } 04\text{m } 46\text{s}$ ;  $\delta_M = 15^\circ 12' 19''$ ). Por coincidência, ela percebe que Gelecaio-42 passará pelo seu meridiano local exatamente quando estiver no ponto de sua órbita com maior declinação. Qual a distância que Gigirotto deverá encontrar, em  $\text{km}$ , no momento desse fenômeno?

## Questões Médias

6. **(30 pontos)** Em uma aula de astronomia sobre estrelas binárias, a professora da turma apresentou a seus alunos Albireo ( $\beta \text{ Cyg}$ ), da constelação de Cisne. Informou a eles que levaria seu telescópio para a escola em uma noite sem nuvens para que eles pudessem observar a beleza das duas estrelinhas. No entanto, ela precisava verificar se era possível fazer a observação com o telescópio que possuía em casa e deu esse desafio a seus alunos.

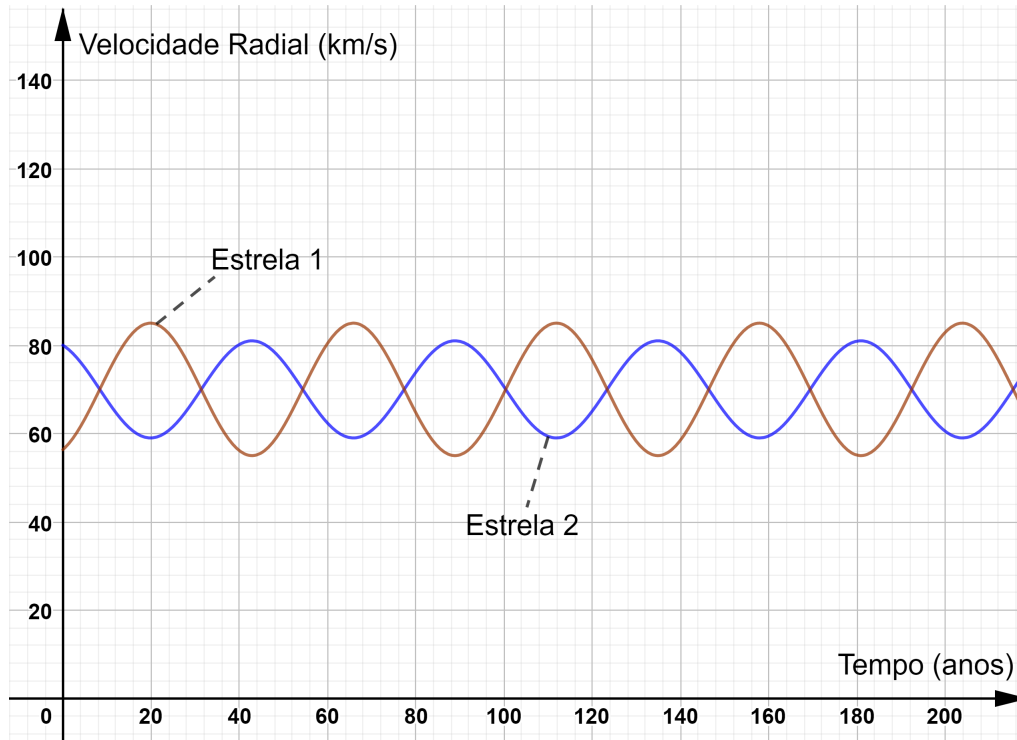
A professora informou que seu telescópio podia observar estrelas com fluxo até  $F_{lim} = 3 \times 10^{-16} F_\odot$  e sabe-se que a separação angular das estrelas de Albireo é  $\theta = 34''$ . Com essas informações, resolva os itens abaixo:

- (a) **(15 pontos)** Calcule a magnitude limite observável pelo telescópio (em mag) e seu diâmetro (em milímetros);
- (b) **(5 pontos)** Calcule o poder de resolução do telescópio (em segundos de arco) e verifique se é possível observar as duas estrelas de Albireo com esse instrumento;
- (c) **(10 pontos)** Calcule o diâmetro do campo de visão (em segundos de arco) do telescópio sabendo que a estrela Deneb ( $\alpha \text{ Cyg}$ ) fica  $\Delta t = 2$  minutos nesse campo.

Dados:

- Diâmetro da pupila humana:  $D_{olho} = 6 \text{ mm}$
- Magnitude limite do olho humano:  $m_{olho} = 6$
- Comprimento de onda central da banda visível  $\lambda_v = 550 \text{ nm}$
- Declinação de Deneb:  $\delta_* = 45^\circ 16' 49,3''$

7. (35 pontos) Uma estudante de astronomia observa um sistema binário e tem em mãos o gráfico das velocidades radiais medidas de cada componente em função do tempo, como mostrado abaixo. Ela fica maravilhada com a quantidade de informações que podemos obter de um único gráfico.



Assuma que as órbitas das estrelas são circulares e que a inclinação dos planos de órbita em relação ao plano do céu são de  $90^\circ$ . Analisando o gráfico, responda:

- (a) (3 pontos) Qual a velocidade radial do centro de massa do sistema, em  $km/s$ ?
- (b) (4 pontos) Quais as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  das componentes em relação ao centro de massa do sistema, em  $km/s$ ?
- (c) (8 pontos) Determine os raios das órbitas das estrelas,  $r_1$  e  $r_2$ , em unidades astronômicas.
- (d) (15 pontos) Determine a massa de cada uma das componentes,  $m_1$  e  $m_2$ , em massas solares.
- (e) (5 pontos) Suponha que a estudante obtenha um gráfico da magnitude pelo tempo do sistema binário. Poderíamos obter as variáveis a seguir combinando o gráfico inicial com o dos eclipses?

Responda com S se sim e N se não para cada item. Não é necessário justificar.

- I. A magnitude aparente de cada estrela;
- II. O raio de cada estrela;
- III. A classe espectral de cada estrela;
- IV. A composição química de cada estrela.
- V. A distância ao sistema.

8. **(35 pontos)** Uma anã branca é um remanescente estelar composto principalmente por matéria eletronicamente degenerada que não mais produz energia por fusão nuclear. À medida que perde energia por radiação, ela esfria com o tempo e, eventualmente, espera-se que atinja o equilíbrio de temperatura com o espaço, emitindo tão pouca energia que pode vir a ser chamada de anã negra. Nesse problema, analisaremos o resfriamento da anã branca mais próxima do sistema solar: *Sirius B*.

Considere que *Sirius B* seja composta integralmente por carbono e que tenha uma massa de  $1,02 M_{\odot}$ , raio de  $0,0080 R_{\odot}$  e luminosidade de  $0,024 L_{\odot}$ . Considere, também, que *Sirius B* tenha raio constante em todos os itens abaixo.

- (a) **(5 pontos)** Considerando que a estrela se encontra a uma distância de  $2,64 pc$  do sistema solar, encontre sua magnitude aparente bolométrica. Ignore qualquer fonte de extinção.
- (b) **(10 pontos)** Suponha que *Sirius B* esfrie de uma temperatura efetiva  $T$  para uma temperatura efetiva  $T - \Delta T$ . Encontre a razão entre a variação de magnitude bolométrica e a variação de temperatura efetiva  $\frac{\Delta m}{\Delta T}$ . Considere  $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$ . Se necessário, utilize:  $\ln(1+x) \approx x$  para  $x \ll 1$ . Dê sua resposta em função de  $T$ .
- (c) **(5 pontos)** Considere que *Sirius B* esfrie  $10 K$ . Calcule sua variação de magnitude bolométrica  $\Delta m$ .
- (d) **(15 pontos)** A temperatura interna de uma anã branca é aproximadamente constante em todo seu volume. Contudo, nas proximidades da superfície, sua temperatura efetiva cai drasticamente devido a efeitos de opacidade. Assim, sua temperatura efetiva  $T_{eff}$  se relaciona com sua temperatura interna  $T_{int}$  de acordo com a seguinte equação:

$$T_{eff} = \alpha \cdot (T_{int})^{\frac{7}{8}}, \text{ em que } \alpha \approx 0,014 K^{\frac{1}{8}}$$

Com base nisso, calcule o tempo (em anos) para que a temperatura efetiva  $T_{eff}$  de *Sirius B* esfrie  $10 K$ . Para tal, considere que o calor específico molar a volume constante do carbono seja igual a  $c_v = 3R$ , onde  $R$  é constante universal dos gases. A massa molar do carbono é de  $12 g/mol$ . Para fins de simplificação, considere que a estrela só perca energia por emissão de radiação.

Use que  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x \ll 1$ , caso necessário.

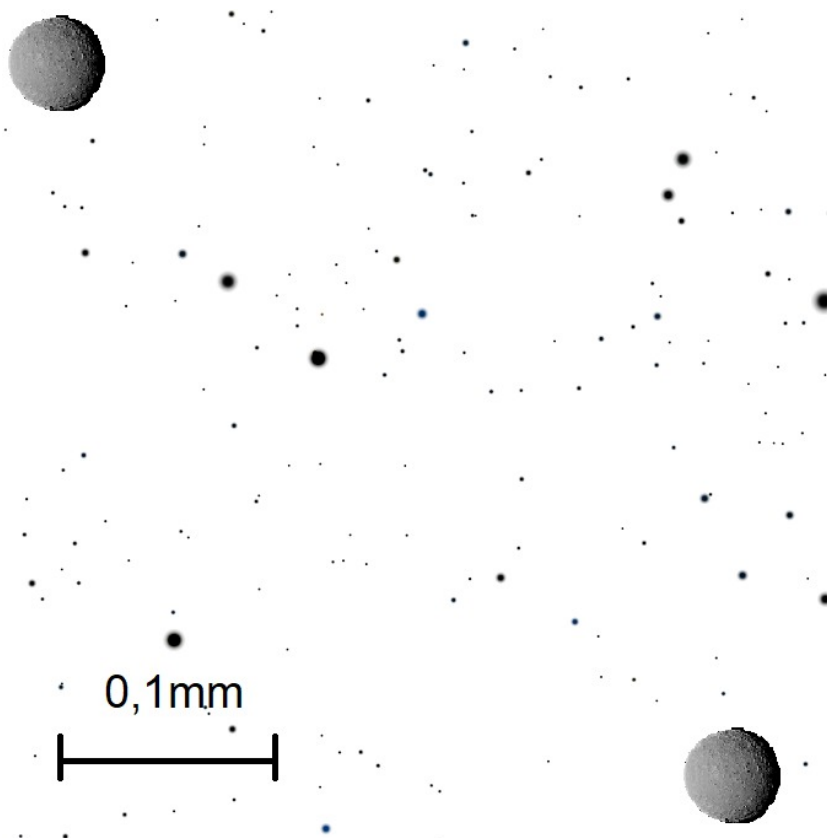
## Questões Longas

9. **(55 pontos)** O cometa Hale-Bopp foi um dos maiores cometas observados no século XX e um dos mais brilhantes das últimas décadas. Um fato curioso sobre ele é que o plano de sua órbita faz aproximadamente  $90^\circ$  com a eclíptica. Sabendo que sua excentricidade é de cerca de  $0,995$  e seu semi-eixo maior é de aproximadamente  $186 UA$ , responda os seguintes itens:
- (a) **(5 pontos)** Qual o seu período orbital (em anos)?
- (b) **(5 pontos)** Calcule sua distância periélica e afélica (em  $UA$ ).
- (c) **(7 pontos)** Calcule sua velocidade orbital (em relação ao Sol) nos pontos de periélio e afélio (em  $km/s$ ).

É conhecido que o ângulo entre o vetor-posição - em relação ao Sol - do cometa em seu ponto de periélio e o plano da eclíptica é de cerca de  $50^\circ$ . Com base nisso:

- (d) **(8 pontos)** Calcule as distâncias entre o Sol e o cometa, nos pontos em que ele passa sobre o plano da eclíptica, em  $UA$ . Dica: lembre-se da equação polar de uma elipse.
- (e) **(10 pontos)** Considere que, em uma de suas passagens pelo seu periélio, o cometa possui a mesma longitude eclíptica geocêntrica que o Sol. Calcule as duas possíveis distâncias Cometa-Terra (em  $UA$ ) para essa configuração.

- (f) **(20 pontos)** Calcule o movimento próprio (em segundos de arco por hora) do cometa para um observador na Terra na configuração anterior de maior distância Cometa-Terra. Desconsidere, para fins de simplificação, a rotação da Terra.
10. **(70 pontos)** Numa noite em que Ceres estava em seu periélio e em oposição em relação ao Sol, o jovem astrônomo Tiago decide tirar fotos do planeta anão e, para isso, ele conta com seu telescópio, que possui diâmetro  $883 \text{ mm}$  e razão focal  $f/12$ . A montagem equatorial do instrumento conta com um motor que acompanha o movimento diurno das estrelas. O astrônomo tirou duas fotos separadas por um intervalo  $\Delta t = 16,1 \text{ min}$  e elas foram sobrepostas para obter a imagem abaixo:



A partir dos dados acima, calcule:

- (a) **(5 pontos)** A escala de placa do telescópio em  $''/mm$ ;

Além disso, Tiago toma nota de algumas características do planeta anão: sua magnitude aparente  $m = 6,40$  e seu albedo geométrico  $p = 0,0900$ .

Considere que o fluxo de Ceres na Terra na configuração de oposição é dado por:

$$F = p \cdot \frac{P}{\pi r^2}$$

Onde  $P$  é a potência solar incidente no planetóide e  $r$  é sua distância até à Terra. A partir desses dados e sabendo que o sentido da translação do corpo celeste é o mesmo que o da Terra e que as órbitas são coplanares, calcule, para Ceres.

- (b) **(18 pontos)** A sua distância ao Sol nessa ocasião em  $UA$ ;
- (c) **(5 pontos)** O seu raio em  $km$ ;
- (d) **(6 pontos)** A sua velocidade angular para um observador na Terra em  $''/h$ ;

- (e) **(13 pontos)** O semieixo maior da sua órbita em  $UA$ ;
- (f) **(3 pontos)** A excentricidade da sua órbita;

Empolgado, o garoto mostra suas descobertas ao seu amigo Luiz, que decide explorar mais a fundo o corpo celeste e, para isso, envia uma sonda ao pequeno planeta. Quando ela chega ao seu destino, o aparelho adquire uma órbita circular cujo raio é o dobro do raio de Ceres. Em seguida, ele se certifica de impulsioná-lo de modo que sua velocidade tangencial seja nula em relação ao centro do planeta anão. A partir disso, a sonda começa um processo de queda livre até colidir com a superfície do planetóide. Sabendo que este processo durou  $58,7 \text{ min}$ , calcule:

- (g) **(15 pontos)** A massa de Ceres em  $kg$ ;
- (h) **(5 pontos)** O incremento de velocidade, em  $m/s$ , necessário para que a sonda inicie a queda livre.