CARTA CELESTE

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

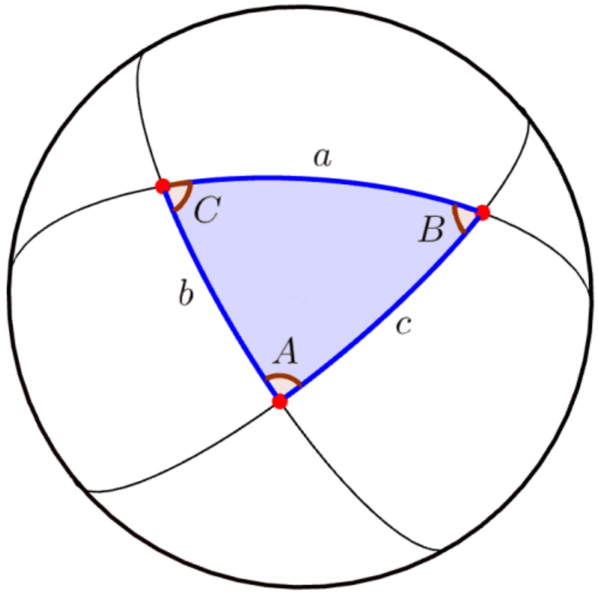
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., "não respondi à Q1 e à Q2";
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
11. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
12. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

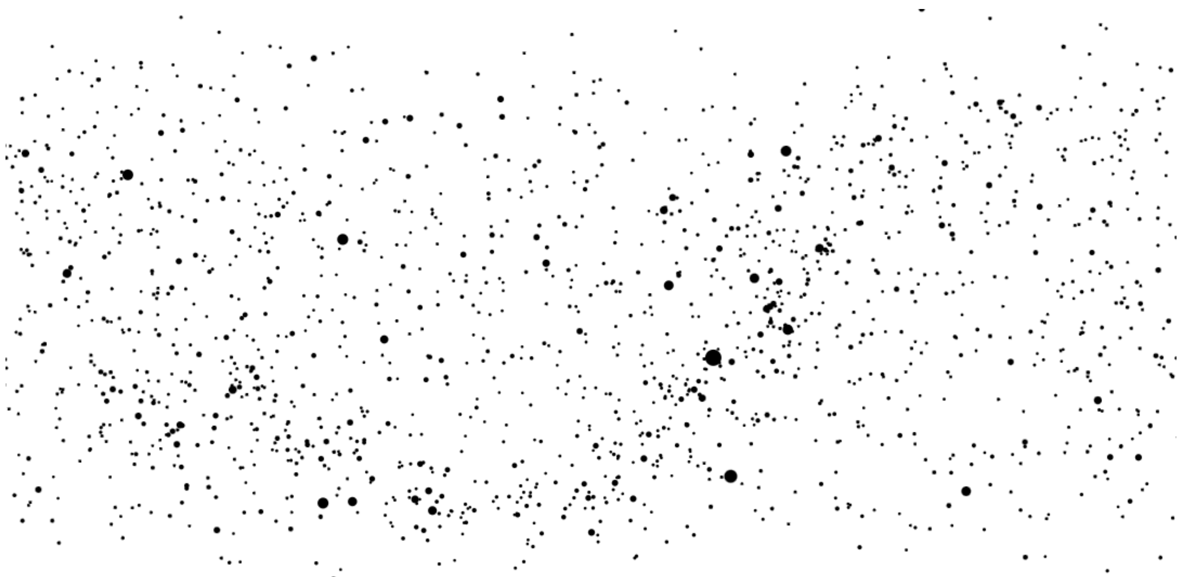
$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

Alguns valores da Equação do Tempo:

Data	**Equação do Tempo**
01 de janeiro	-3m 41s
21 de março	-7m 3s
01 de maio	2m 56s
21 de junho	-1m 53s
01 de julho	-3m 57s
01 de setembro	0m 4s
21 de setembro	7m 0s
01 de outubro	10m 25s
01 de novembro	16m 29s
21 de dezembro	1m 48s

1. A estrela era de Hydrus, Crux ou Centaurus? (50 pontos)

Depois de perceber que uma das maiores dificuldades dos estudantes que vão para internacionais é com ângulos, tanto seu crescimento no céu quanto sua estimativa (Hydrus 2024 (x-x)), Doardue resolveu relembrar esse conteúdo (mas rocla que não arise mau tãoques tementalto plessim). A seguir está uma carta celeste em projeção equirretangular, a qual pode ser dividida em vários retângulos congruentes.



Com base nessa representação do céu, responda as questões a seguir:

(a) **(15 pontos)** Marque as linhas do equador e da eclíptica.

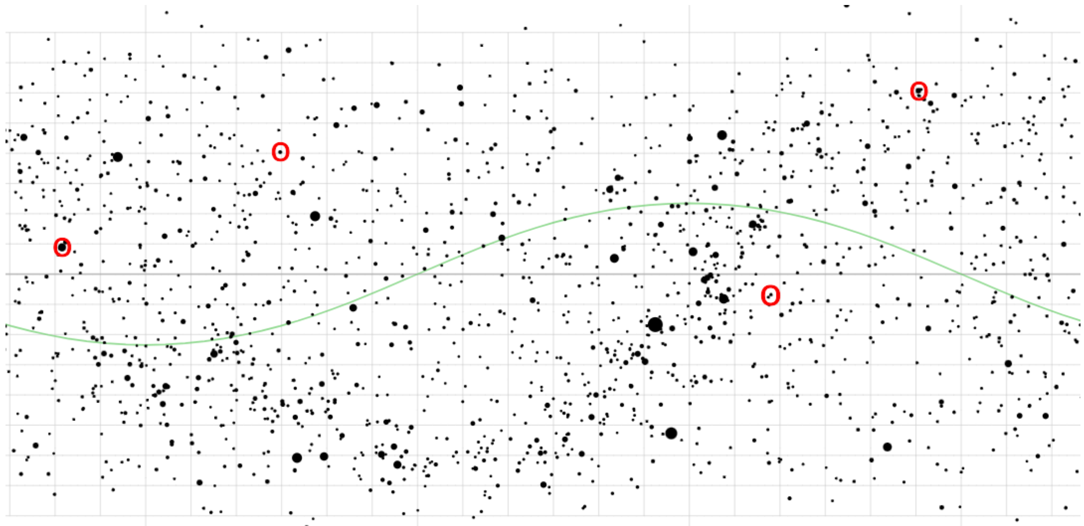
(b) **(5 pontos)** Indique a direção de crescimento do azimute e do ângulo horário.

(c) **(15 pontos)** Encontre a distância angular entre Altair (α Aql) e Nekkar (β Boo).

(d) **(15 pontos)** Encontre as coordenadas equatoriais de Cih (γ Cas) e de Beid (o Eri).

Solução:

(a) A seguir estão as marcações (a linha verde é a Eclíptica e a cinza é o Equador Celeste), juntamente com a grade equatorial da carta e as estrelas dos itens c e d marcadas:



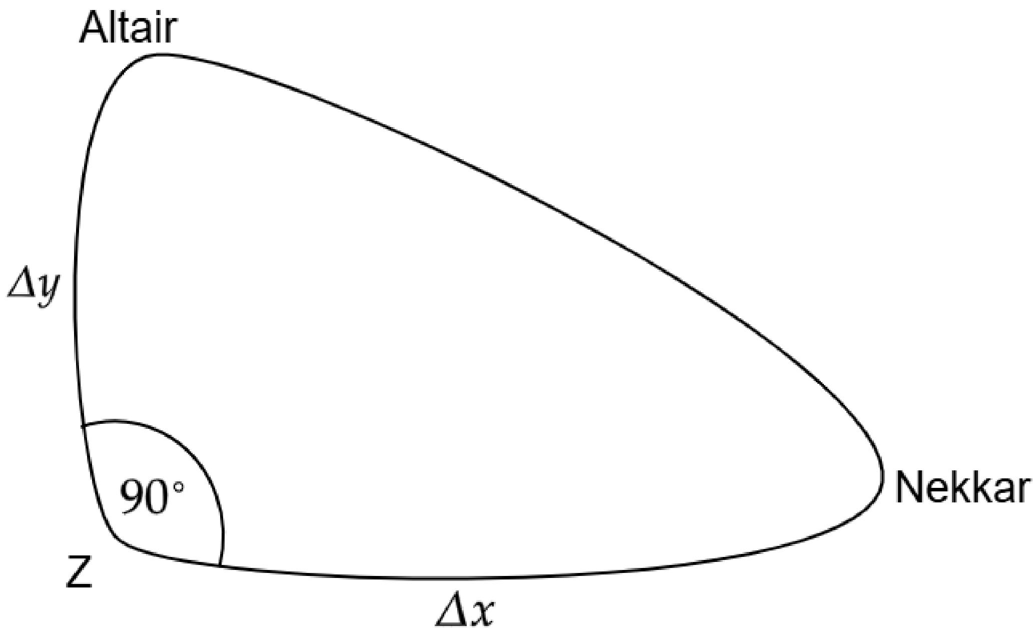
(b) Ambos o azimute e o ângulo horário crescem para oeste, o que é representado na carta crescendo da **esquerda para a direita**.

(c) Como a projeção é equirretangular, podendo ser dividida em retângulos de mesma medida, podemos fazer uma regra de três considerando o comprimento total de cada lado do triângulo e a distância em x e y em relação a algum ponto de referência, que para a distância entre as estrelas, basta a diferença em x e em y entre elas:

$$\Delta x = \frac{3{,}3}{16} \cdot 360 = 74{,}25^\circ$$

$$\Delta y = \frac{1{,}4}{8} \cdot 180 = 31{,}5^\circ$$

Agora, para encontrar a distância angular entre as estrelas, pode-se utilizar trigonometria esférica, no seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos cossenos:

$$\cos D = \cos \Delta x \cos \Delta y = \sin \Delta x \sin \Delta y \cos 90^\circ$$

$$\cos D = \cos \Delta x \cos \Delta y$$

$$\boxed{D = 76{,}6^\circ}$$

(d) Agora, para encontrar as coordenadas equatoriais, é necessário primeiro encontrar o ponto vernal, que a partir de seu meridiano conseguimos encontrar a ascensão reta. E a declinação será a distância ao Equador, o qual é uma reta:

$$\boxed{\delta_\gamma = \frac{2{,}8}{8} \cdot 180 = 63^\circ}$$

$$\boxed{\alpha_\gamma = \frac{0{,}7}{16} \cdot 24h = 1h3min}$$

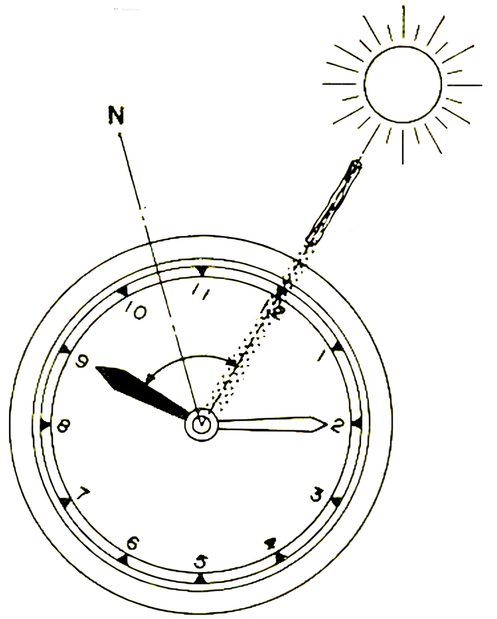
$$\boxed{\delta_o = \frac{0{,}3}{8} \cdot 180 = -6{,}75^\circ}$$

$$\boxed{\alpha_o = \frac{2{,}9}{16} \cdot 24h = 4h21min}$$

2. **Horário Norte (110 pontos)**

Mauí-mauê e seu inseparável amigo Mychelini Segrini estavam explorando uma trilha na mata quando, distraídos com a paisagem, acabaram se perdendo. Mychelini Segrini olha para o relógio e percebe que o horário do almoço se aproxima rapidamente — é hora de dar um jeito de voltar para casa. Felizmente, Mauí-mauê se lembra de um método simples, porém engenhoso, para descobrir a direção do norte usando apenas um relógio e o Sol.

Considere o seguinte método para determinar o Norte a partir de um relógio analógico de ponteiros simples, no Hemisfério Sul:



1. Coloque o relógio na horizontal.
2. Alinhe o número "12" com o azimute do Sol.
3. Observe o ângulo entre a posição do ponteiro das horas e a marcação "12". A bissetriz desse ângulo aponta, aproximadamente, para o Norte Geográfico.

Suponha que você esteja em uma latitude fixa φ no hemisfério sul. Usando este método, responda aos itens a seguir:

(a) **(10 pontos)** Descreva o princípio de funcionamento do método: o que te permite fazer essa aproximação, ou seja, quando você usa esse método, o que você está assumindo?

(b) **(5 pontos)** Encontre uma latitude φ_0 tal que, para $\varphi \to \varphi_0$, este método é cada vez mais preciso independente da data do ano.

(c) **(15 pontos)** Deduza a expressão analítica para o erro angular ε em função das variáveis

$$\varepsilon\left(\varphi,\delta,H,\Delta\lambda,ET\right)$$

em que ε é o azimute do Norte fictício (encontrado pelo método), H é o ângulo horário solar, δ é a declinação solar, $\Delta\lambda$ é a diferença de longitude entre o observador (λ) e o fuso de referência (λ_0, ou seja, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ (com λ positivo para Leste), ET é a Equação do Tempo (tempo solar aparente menos o médio) e $\varphi < 0$. A função precisa apenas ser válida para quando o Sol está ao norte do primeiro e segundo vertical ($-90° \leqslant A \leqslant +90°$).

(d) **(10 pontos)** Rascunhe à mão o esboço de dois gráficos de ε em função de H, para $\delta = 0$: Um em $\varphi_1 = -10°$ e outro em $\varphi_2 = -40°$. Ambos no centro do fuso e com $ET = 0$.

(e) **(10 pontos)** Se você usar esse método às 10h da manhã, no centro do fuso com $ET = 0$, e tentar seguir um caminho qualquer, você vai desviar para a direita ou para a esquerda?

Considere a seguinte carta para um observador no Solstício de Inverno do Hemisfério Sul no centro de seu fuso.

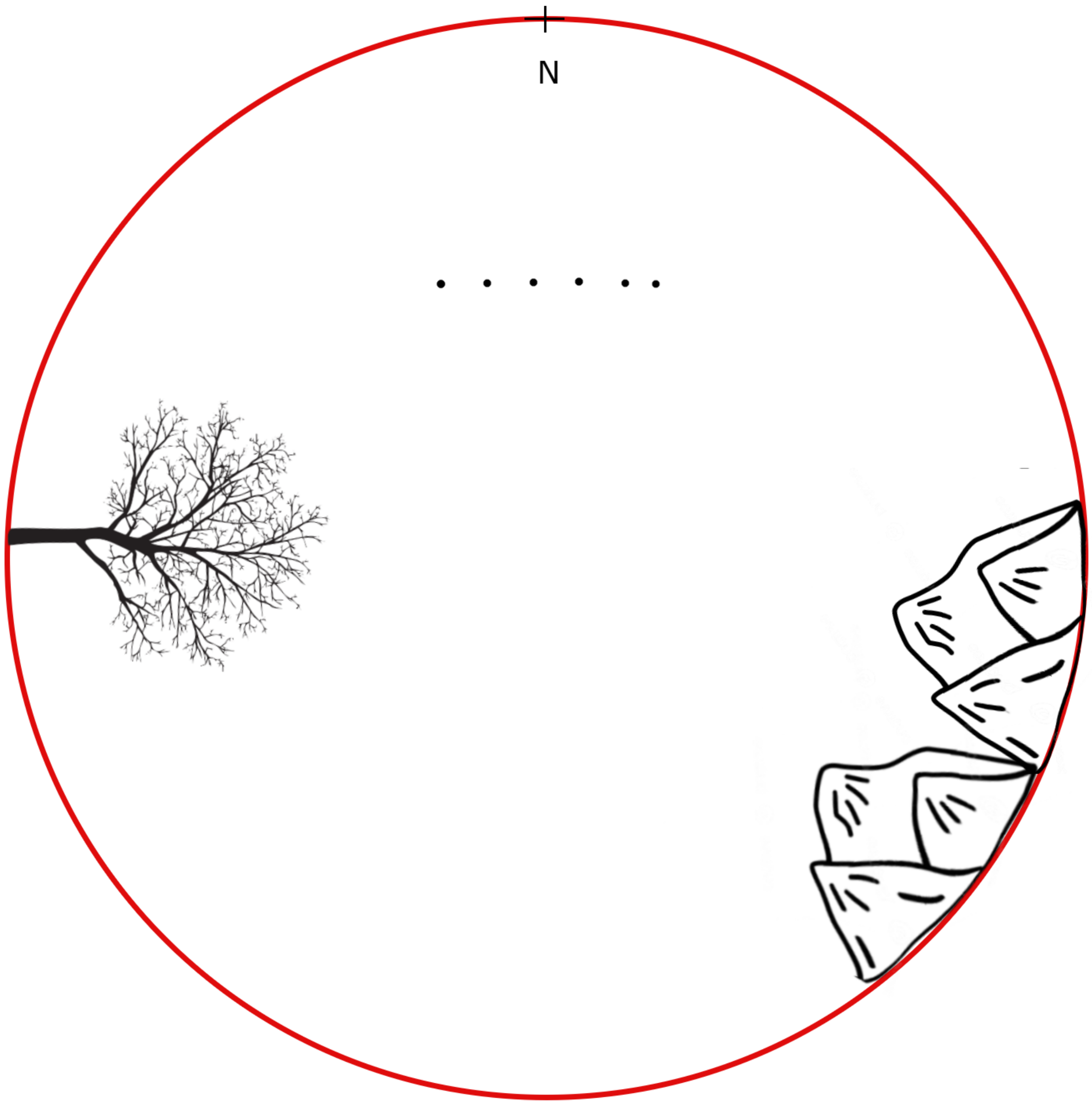


Figura 1: Nessa projeção, o azimute é conservado, e seu centro representa o zênite

Cada um dos 6 pontos representa a posição do Sol numa carta celeste de projeção indeterminada em 6 momentos diferentes, conforme a tabela abaixo.

i	Horário
1	10:52
2	11:22
3	11:52
4	12:22
5	12:52
6	13:12

Tabela 1

(f) **(10 pontos)** Monte uma tabela com as colunas i, Azimute e Azimute do Polo norte encontrado pelo método da questão.

(g) **(10 pontos)** Plote um gráfico dos pontos do erro (em graus) e o horário do dia.

(h) **(10 pontos)** Faça uma regressão linear, e através do coeficiente angular, encontre a latitude do observador. Considere a aproximação $\arctan(x) = x$.

(i) **(10 pontos)** Suponha que você se encontra em (φ,λ) no hemisfério sul e tal que λ é o centro do seu fuso, e pretende navegar até ($\varphi + 1°$, $\lambda + 1°$). Se você usar o método acima para orientar seu rumo "Norte" apenas no ponto de partida, qual será a *distância mínima de desvio* do seu trajeto até o destino real. (Desconsidere a Equação do Tempo)

(j) **(10 pontos)** Como seria o método adaptado para o hemisfério norte (e a nova fórmula para o erro angular)?

(k) **(10 pontos)** Para alguém no Hemisfério Sul, como em Barra do Piraí, o Sol se põe progressivamente mais cedo à medida que o Solstício de Inverno se aproxima. No entanto, o dia exato em que o Sol para de se pôr mais cedo e começa a se pôr mais tarde não coincide precisamente com o Solstício de Inverno.

Esse dia se localiza antes ou depois do Solstício de Inverno? Por que essa diferença ocorre?

Solução:

a)

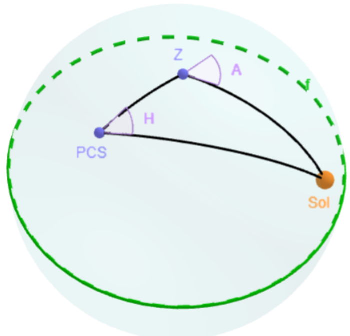
Vamos começar compreendendo o princípio que fundamenta o funcionamento do nosso método.

O horário indicado por um relógio é análogo ao *ângulo horário do Sol.* Em outras palavras, o movimento do ponteiro das horas pode ser interpretado como uma representação do ângulo horário: a cada hora que passa no relógio, o ângulo horário também avança uma hora. No entanto, há uma diferença importante na escala utilizada: enquanto o relógio completa uma volta (360°) em 12 horas, o ângulo horário do Sol é medido em uma escala de 24 horas para uma volta completa. Assim, temos, em um intervalo de tempo de 1 hora:

- 1 hora de ângulo horário equivale a 15° (pois $360°/24 = 15°$);
- 1 hora no mostrador do relógio representa 30° (pois $360°/12 = 30°$).

Portanto, ao interpretar o mostrador do relógio como um círculo onde o meio-dia (12h) corresponde ao ângulo 0°, tomar a **bissetriz** do ângulo formado entre o ponteiro da hora e a marcação de 12h equivale a dividir esse ângulo físico por dois. Essa operação nos dá o *ângulo horário do Sol* naquele instante.

Segundo o método analisado, essa bissetriz aponta aproximadamente para o **Norte geográfico**, desde que o ponteiro das 12h esteja alinhado com a direção do Sol. Ou seja, assumimos que o módulo do ângulo horário do Sol é aproximadamente igual ao módulo do seu *azimute*.



Como ilustra a figura acima, no hemisfério Sul essa convenção implica que o ângulo horário do Sol é aproximadamente igual a menos o seu azimute.

b)

Essa aproximação será cada vez mais válida tendendo a ter um erro nulo quando o **Polo Celeste Sul (PCS)** tende a coincidir com o zênite, ou seja, quando a latitude for $\varphi_0 = 90°$S.

c)

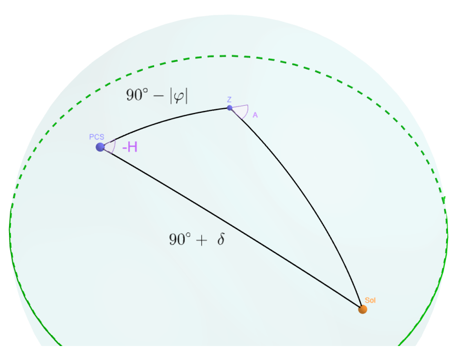
O nosso ângulo horário fica medido na posição horizontal, porém isso não é verdade, exceto no Polo Sul, então o nosso erro será a diferença do módulo do ângulo horário com o módulo do azimute. Suposição:

$$-H = A$$

Erro (definido como azimute do Norte encontrado pelo método):

$$\varepsilon = H + A$$

Podemos encontrar A em função de H com o seguinte triângulo esférico:



$$\cot(90° + \delta) \cdot \sin(90° - |\varphi|) = \cot(180° - A) \cdot \sin(-H) + \cos(90° - |\varphi|) \cdot \cos(-H) \tag{1}$$

$$-\tan(\delta)\cdot\cos(|\varphi|) = \cot(A)\cdot\sin(H) + \sin(|\varphi|)\cdot\cos(H)$$

$$\cot(A) = \frac{-\tan(\delta)\cdot\cos(|\varphi|) - \sin(|\varphi|)\cdot\cos(H)}{\sin(H)}$$

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(H)}{-\tan(\delta)\cdot\cos(|\varphi|) - \sin(|\varphi|)\cdot\cos(H)}\right)$$

Logo:

$$\varepsilon = H + \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(H)}{\tan(\delta)\cdot\cos(|\varphi|) + \sin(|\varphi|)\cdot\cos(H)}\right)$$

Agora apenas precisamos somar o erro causado pela equação do tempo e deslocamento do centro do fuso. Como ambos mudam o horário civil em relação ao horário solar verdadeiro, podemos apenas considerar que eles afetam o horário do relógio e portanto, somar esse erro com o erro já descoberto.

Uma equação do tempo positiva, significa que, em relação ao horário civil, o tempo verdadeiro do Sol é maior:

$$\text{ET} = T_{\odot}\text{VL} - T_{\odot}\text{ML}$$

Assim, como nosso relógio está com um tempo menor do que deveria, nosso chute para o Norte vai ser deslocado no sentido anti-horário (negativo). Como a nossa ET está numa escala de 0 a 24h, ela vai representar um ângulo dobrado no relógio, mas como pegamos a bissetriz esse efeito se anula. Portanto:

$$\varepsilon_{ET} = -ET$$

Tal que ε_{ET} é o erro devido a equação do tempo.

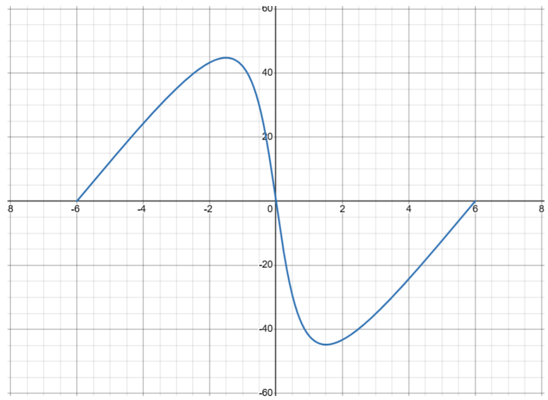
Usando a mesma lógica para o deslocamento, usando a definição do enunciado. Um deslocamento positivo, significa que você está a leste do centro do fuso, logo, o tempo verdadeiro do Sol é menor. Assim, nosso relógio (horário civil) marcará um tempo menor do que deveria, e usando a mesma lógica da equação do tempo:

$$\varepsilon_{\Delta\lambda} = -\Delta\lambda$$

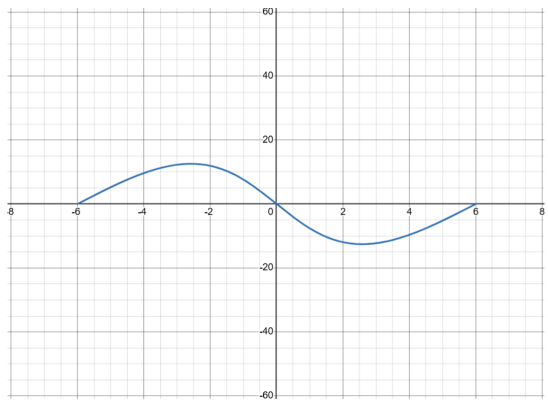
Somando tudo, a fórmula para o erro final é:

$$\varepsilon = H + \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(H)}{\tan(\delta)\cdot\cos(|\varphi|) + \sin(|\varphi|)\cdot\cos(H)}\right) - ET - \Delta\lambda$$

d)



Latitude de 10° Sul - Erro em graus em função do angulo horário em horas



Latitude de 40° Sul - Erro em graus em função do angulo horário em horas

e) Vemos pelo item anterior que quando o ângulo horário do sol é negativo (pela manhã), o erro é positivo, portanto está para a direita da direção Norte pela definição de azimute positivo.

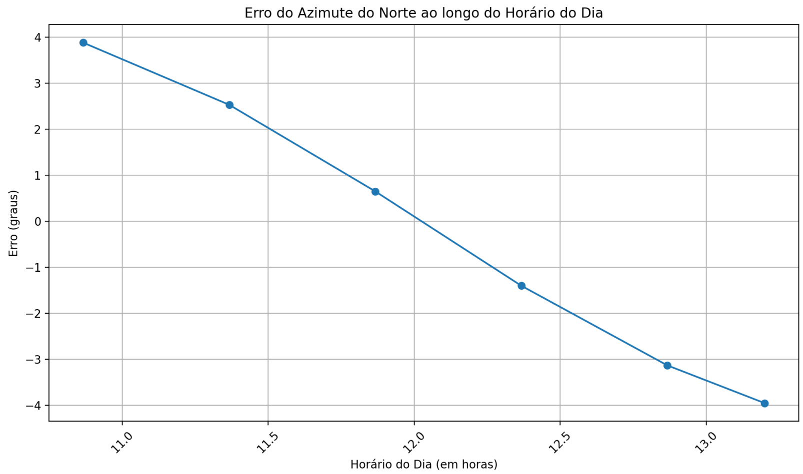
f)

i	Azimute	Azimute do Norte
1	21°23'	3.88°
2	12°32'	2.53°
3	3°09'	0.65°
4	353°36'	-1.4°
5	344°22'	-3.13°
6	338°33'	-3.95°

Tabela 2: Azimutes observados em diferentes horários

O Modelo pra calcular o azimute do norte é transformar o horário (antes subtrair 2 minutos de ET) em ângulo horário, e achar a diferença dele para o azimute do Sol.

g)



h)

Erro (°)	Ângulo Horário (°)	Erro (rad)	Ângulo Horário (rad)
3,88	-17,50	+0,0677	-0,306
2,53	-10,00	+0,0442	-0,175
0,65	-2,50	+0,0113	-0,0436
-1,40	5,00	-0,0244	+0,0873
-3,13	12,50	-0,0546	+0,218
-3,95	17,50	-0,0689	+0,306

Tabela 3: Conversão de erros e ângulos horários de graus para radianos (3 algarismos significativos)

Calculando a regressão linear, chegamos em:

$$y = a + bx$$

$$a = -7{,}533 \times 10^{-4}$$

$$b = -0{,}2327$$

$$r = -0{,}998$$

Agora vamos encontrar o coeficiente de acordo com nosso modelo, derivando em H = 0 nossa função para o erro:

$$1 - \frac{1}{\sin(|\phi|) + \tan(\delta)\cos(|\phi|)}$$

Sendo $\delta = 23.5°$, e iterando:

$$b = -0.2327 = 1 - \frac{1}{\sin(|\phi|) + \tan(23.5°)\cos(|\phi|)}$$

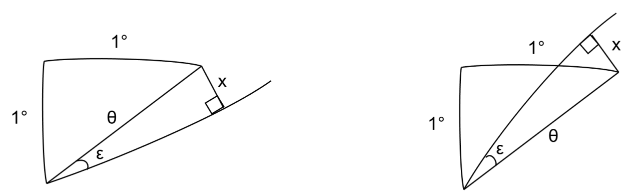
$$\phi = 24.57° S$$

j)

Distância angular entre os pontos (φ, λ) e $(\varphi + 1^\circ, \lambda + 1^\circ)$:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\sin|\varphi| \cdot \sin(|\varphi| + 1^\circ) + \cos|\varphi| \cdot \cos(|\varphi| + 1^\circ) \cdot \cos(1^\circ)\right)$$

Pelo triângulo esférico a seguir, temos:



$$x = R\sin^{-1}\left(\sin(\theta)\sin(|\varepsilon|)\right)$$

$$x = R\sin^{-1}\left(\sin(\cos^{-1}\left(\sin|\varphi| \cdot \sin(|\varphi| + 1^\circ) + \cos|\varphi| \cdot \cos(|\varphi| + 1^\circ) \cdot \cos(1^\circ)\right)) \sin(|H + \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(H)}{\tan(\delta) \cdot \cos(|\varphi|) + \sin(|\varphi|) \cdot \cos(H)}\right)|)\right)$$

j) Um método alternativo é apontar o ponteiro das horas para o Sol, e a bissetriz do ângulo formado pelo ponteiro das horas até o meio dia é aproximadamente a direção Sul. Para corrigir a fórmula, basta inverter nossa suposição inicial de que H = - A, para H = A e lembrar de que consideramos o módulo da latitude, portanto devemos inverter o sinal. Além disso, agora a equação do tempo e o deslocamento do fuso vão ter um efeito contrário. Portanto:

$$\varepsilon = -H + \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(H)}{\tan(\delta) \cdot \cos(-\varphi) + \sin(-\varphi) \cdot \cos(H)}\right) + ET + \Delta\lambda$$

$$\varepsilon = -H + \tan^{-1}\left(\frac{\sin(H)}{\sin(\varphi) \cdot \cos(H) - \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi)}\right) + ET + \Delta\lambda$$

k)

Para o pôr do sol solar, o horário do pôr do sol é a diferença entre o meio-dia civil e o pôr do sol verdadeiro. O horário solar do pôr do sol atinge seu mínimo no solstício de inverno. No entanto, o meio-dia civil é uma função decrescente** nesse período, como mostra a tabela.

Como queremos a diferença, estamos somando uma reta crescente com uma função que possui um mínimo. Isso faz com que o mínimo seja deslocado para a esquerda.