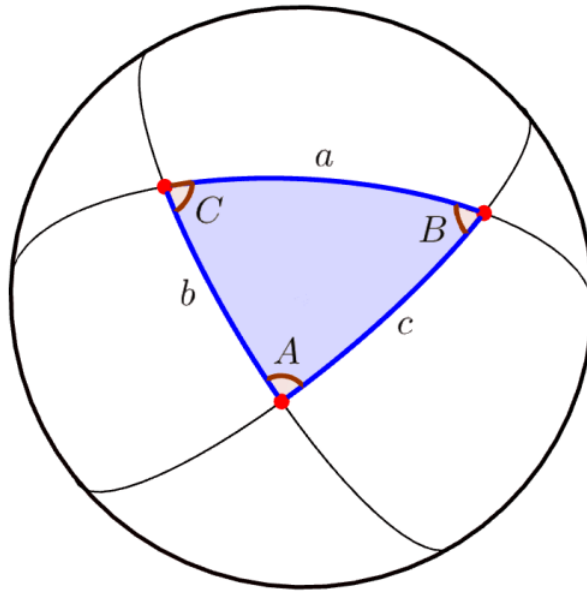


Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 1 hora e 30 minutos;
6. A prova é composta por 1 questão (totalizando 150 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
12. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
13. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento
14. Se não for explicitado o contrário assuma que as cartas estão em projeção azimutal equi-distante, na qual a borda da carta representa o horizonte, e a distância zenital de um ponto é diretamente proporcional à distância entre sua representação e o centro da carta.

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Coordenadas de algumas estrelas importantes:

1. Satélites que protegem o país (150 pontos)

Para proteger o espaço aéreo brasileiro, Larissinha e Gustavinho projetaram um satélite de órbita baixa para monitorar movimentações em território nacional e estrangeiro. Enquanto comemoravam o lançamento bem sucedido do satélite, o Comandante Dudu os parabeniza e questiona sobre os parâmetros orbitais do satélite, visando sincronizá-lo com o Comando da Aeronáutica Brasileira. Nesse momento, Larissinha e Gustavinho perceberam estar com um pequeno problema...

Para descobrirem os elementos orbitais do satélite, Gustavinho e Larissinha coletaram manualmente um conjunto de coordenadas equatoriais do satélite em sua órbita, dispostas na Tabela 2. Por recomendações do Comandante Dudu, que também é um grande astrônomo, Larissinha e Gustavinho coletaram esses dados em locais distintos empunhando, cada um, uma carta celeste estereográfica de seu respectivo local no dia de observação, um relógio sidereal calibrado para Greenwich e um estupendo telescópio newtoniano de montagem equatorial capaz de fazer medidas de (δ, α) com incerteza desprezível quando o objeto é identificado no centro do campo de visão. Por recomendações do Comandante Dudu, ambas as cartas são do mesmo dia quando os relógios de Larissinha e Gustavinho indicavam 14 : 02. Antes de iniciarem o reconhecimento do céu das cartas, Gustavinho recordou os velhos tempos nas seletivas de astronomia e disse a escreveu as coordenadas equatoriais de algumas estrelas que gostava, dispostas na Tabela 1.

- (a) Trace e identifique em ambas as cartas:
 - i. Equador Celeste (**1 ponto**)
 - ii. Eclíptica (**1 ponto**)
 - iii. Meridiano Local (**1 ponto**)
 - iv. Primeira Vertical (**1 ponto**)
- (b) Indique e identifique em ambas as cartas:
 - i. Pontos Cardeais (**1 ponto**)
 - ii. Polo Celeste Visível (**1 ponto**)
 - iii. Polo Eclíptico Visível (**1 ponto**)
 - iv. Ponto Equinocial Visível (**1 ponto**)
 - v. Ponto Solsticial Visível (**1 ponto**)
- (c) (**5 pontos**) Determine o Tempo Sidereal Local (hh:mm) da carta de Larissinha (TSL_L) e Gustavinho (TSL_G).
- (d) (**5 pontos**) Determine as coordenadas geográficas de Larissinha (ϕ_L, λ_L) e Gustavinho (ϕ_G, λ_G) .
- (e) (**6 pontos**) Qual o intervalo de declinações visíveis para Larissinha $(\delta_{inf}, \delta_{sup})_L$ e Gustavinho $(\delta_{inf}, \delta_{sup})_G$? Considerando apenas esse efeito, encontre o percentual do céu visível para Larissinha Θ_L e Gustavinho Θ_G .

Após esse breve reconhecimento do céu e coleta de informações sobre os locais de observação, estamos prontos para começar a analisar os dados coletados por Larissinha e Gustavinho e, então, determinar os elementos orbitais do satélite, orgulhando o Comandante Dudu. Para isso, vamos tratar os dados brutos, ou seja, manipulá-los de modo que facilite a obtenção dos dados que desejamos com as artimanhas que temos em mãos.

- (f) (**10 pontos**) Escreva as funções f_h e f_A que transformam coordenadas equatoriais celestes em coordenadas altazimutais $T : (\delta, \alpha) \rightarrow (h, A)$, onde $f_h(\delta, \alpha) = h$ e $f_A(\delta, \alpha) = A$, ambas em função das coordenadas geográficas locais (ϕ, λ) e do tempo sidereal em Greenwich (TSG). Para esse e os próximos itens, considere o azimute com sentido N-O-L-S e definido no intervalo $0 \leq A < 360^\circ$.
- (g) (**22 pontos**) Para tratarmos nossos dados, faça duas tabelas, uma para Gustavinho e outra para Larissinha, ambas contendo o TSG de cada observação e as coordenadas altazimutais do satélite para Larissinha e Gustavinho como se a rotação da Terra estivesse parada no TSG inicial das cartas, ou seja, os pontos vão se localizar na grade equatorial onde de fato o satélite esteve em relação as estrelas de cada carta.

- (h) **(23 pontos)** Com a tabela do item anterior, podemos facilmente plotar os pontos da órbita do satélite correspondentes aos dados brutos coletados. Sendo assim, identifique com um triângulo ▲ os pontos da órbita do satélite nas cartas de Larissinha e Gustavinho.
- (i) **(10 pontos)** Trace a trajetória do satélite nas cartas e, então, faça uma tabela para cada observador, com uma coluna de identificação numérica das constelações na ordem em que o satélite as cruza e outra com o nome da constelação. Se existente e visível, indique com uma seta → a estrela α de cada constelação da tabela e identifique-a com o número da constelação correspondente.
- (j) **(18 pontos)** Indique e identifique nas cartas os nodos ascendente Ω , descendente Υ e os polos da órbita do satélite (PNO ou PSO). Após isso, estime a longitude do nodo ascendente da órbita do satélite Ω e sua inclinação orbital em relação ao equador celeste i .
- (k) **(5 pontos)** Um parâmetro orbital muito importante para compreendermos a órbita do satélite além da projeção na esfera celeste é o seu semi-eixo maior. Sendo assim, determine o semi-eixo maior a da órbita do satélite.

Para compreenderem um pouco mais a dinâmica orbital do satélite, Larissinha e Gustavinho adicionaram à tabela 2 sua velocidade angular média w em minutos de arco por segundo:

Estrela	α (°)	δ (°)
Kuma	263.063	55.183
δ Scp	357.300	-28.117
Pherkad	230.179	71.834
CU Vir	186.735	2.137
Kornephoros	247.555	21.490
Sarin	258.754	24.839
Mimosa	191.929	-59.689
Markeb	140.525	-55.011
Alsephina	131.175	-54.708
l Car	146.308	-62.508
Avior	160.988	-59.552
Praecipua	82.688	12.258
Al Kaff al Jidhmah III	21.225	-9.130
α Lyn	140.263	34.393
Acrux	186.646	-63.099
Suhail	136.996	-43.433
Algieba	155.733	19.858

Tabela 1: Estrelas que Gustavinho recordava com a incrível precisão disponibilizada por sua incrível memória.

TSG	δ ($^{\circ}$)	α ($^{\circ}$)	w ($^{\circ}/s$)
14:01:50	13.620	33.206	4.775
14:03:43	18.428	41.125	4.745
14:05:37	22.889	49.483	4.686
14:07:32	26.886	58.377	4.599
14:09:30	30.288	67.871	4.490
14:11:30	32.960	77.970	4.359
14:13:34	34.776	88.592	4.211
14:15:42	35.636	99.562	4.052
14:17:55	35.490	110.630	3.886
14:20:14	34.345	121.522	3.717
14:22:39	32.270	132.007	3.549
14:25:12	29.374	141.935	3.388
14:27:51	25.786	151.252	3.236
14:30:38	21.643	159.983	3.097
14:33:32	17.070	168.203	2.973
14:36:34	12.182	176.016	2.867
14:39:42	7.084	183.542	2.780
14:42:57	1.867	190.900	2.714
14:46:16	-3.381	198.216	2.670
14:49:38	-8.573	205.610	2.647
14:53:02	-13.620	213.206	2.647
14:56:26	-18.428	221.125	2.670
14:59:48	-22.889	229.483	2.714
15:03:07	-26.886	238.377	2.780
15:06:21	-30.288	247.871	2.867
15:09:30	-32.960	257.970	2.973
15:12:31	-34.776	268.592	3.096
15:15:26	-35.636	279.562	3.236
15:18:13	-35.490	290.630	3.388
15:20:52	-34.345	301.522	3.550
15:23:24	-32.270	312.007	3.717
15:25:49	-29.374	321.935	3.886
15:28:08	-25.786	331.252	4.052
15:30:22	-21.643	339.983	4.212
15:32:30	-17.070	348.203	4.359
15:34:34	-12.182	356.016	4.490
15:36:34	-7.084	363.542	4.599
15:38:31	-1.867	370.900	4.686
15:40:27	3.381	378.216	4.744
15:42:21	8.573	385.610	4.774
15:44:14	13.620	33.206	4.775

Tabela 2: Dados coletados por Larissinha e Gustavinho, além das velocidades angulares médias em cada ponto (δ, α) da órbita do satélite.

- (l) **(17 pontos)** Larissinha estava muito empolgada com os dados coletados e decide fazer uma tabela com as velocidades angulares médias do satélite a partir dos dados brutos. Descreva algebricamente o método usado por Larissinha para encontrar as velocidades.
- (m) **(20 pontos)** Agora, Larissinha e Gustavinho suspeitam que a órbita do satélite é elíptica, por mais que tenham planejado uma órbita circular. Então, para visualizarem melhor a disposição da órbita no espaço, encontre o argumento do perigeu ω da órbita do satélite.

Solução:

Nas cartas abaixo, estão as marcações pedidas nos itens (a), (b), (h) e (k), com os devido intervalos de tolerância para pontuação.

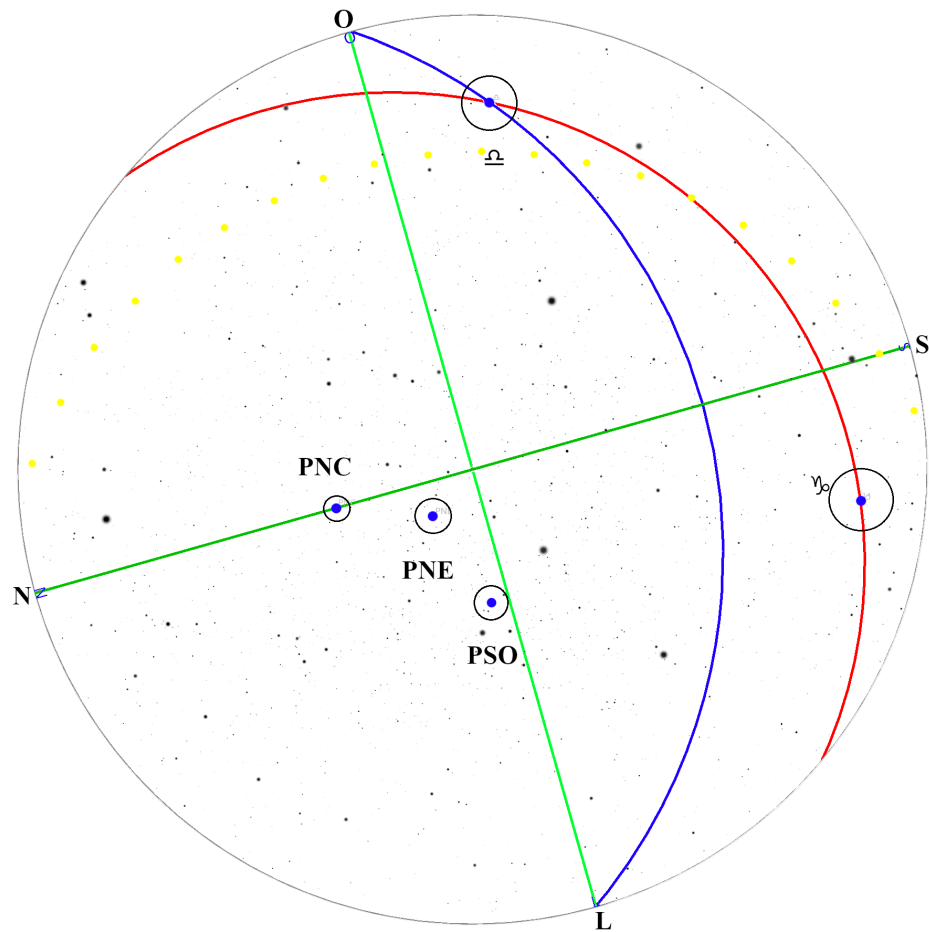


Figura 1: Marcações esperadas na carta de Larissinha (Carta 1.1)

- (c) Note que na carta de Gustavinho, a estrela Markeb (κ Vel) está exatamente em cima do meridiano local. Analogamente, Kornephoros (β Her) está cruzando o meridiano local na carta de Larissinha.

Com o auxílio da tabela de estrelas que Gustavinho recordava, podemos calcular o tempo sideral local de ambas as cartas.

$$TSL_i = H + \alpha \quad (1)$$

Ao cruzar o meriano local, $H = 0$ e com os dados da tabela $\alpha_{\beta Her} = 247.555^\circ$ e $\alpha_{\kappa Vel} = 140.525^\circ$.

$$\boxed{\therefore TSL_L = 16^h 30^m}$$

$$\boxed{\therefore TSL_G = 9^h 22^m}$$

- (d) Para determinar as coordenadas geográficas de Larissinha e Gustavinho, começamos tomando as medidas de raio e distância do polo celeste visível ao centro das cartas. Temos então, os raios das cartas R_L , R_G e as distâncias do polo r_L e r_G .

$$\begin{aligned} R_G &= 867.5 \text{ pixels} & ; & & r_G &= 345.2 \text{ pixels} \\ R_L &= 867.5 \text{ pixels} & ; & & r_L &= 270.3 \text{ pixels} \end{aligned} \quad (2)$$

Sabemos que as cartas são de projeção estereográfica, logo é possível calcular as latitudes.

$$\begin{aligned} \phi_i &= 90^\circ - 2 \arctan \left(\frac{r_i}{R_i} \right) \\ \therefore \phi_G &= 46^\circ 36' \text{ S} \\ \therefore \phi_L &= 55^\circ 23' \text{ N} \end{aligned} \quad (3)$$

Para determinar a longitude dos locais relativos as cartas, vamos usar o tempo sideral de Greenwich $TSG = 14^h 2^m$ e o tempo sideral local de ambas as cartas.

$$\begin{aligned} TSL_i - TSG &= \lambda \\ \therefore \lambda_L &= 37^\circ \text{ E} \\ \therefore \lambda_G &= 70^\circ \text{ W} \end{aligned} \quad (4)$$

Sintetizando as informações, temos:

$$\begin{aligned} \boxed{(\phi, \lambda)_L = (55^\circ 23' \text{ N}, 37^\circ \text{ E})} \\ \boxed{(\phi, \lambda)_G = (46^\circ 36' \text{ S}, 70^\circ \text{ W})} \end{aligned} \quad (5)$$

- (e) Para o caso de Larissinha, o ínfimo das declinações visíveis pode ser encontrado pelo caso limite de circumpolaridade invisível, enquanto o supremo é o próprio polo celeste norte. Um raciocínio análogo se aplica a Gustavinho, mas em seu caso o supremo é definido pelo limite de circumpolaridade invisível, enquanto o ínfimo é o próprio polo celeste visível.

$$\begin{aligned} \delta_{inf,L} &= -(90^\circ - \phi_L) \\ \delta_{sup,G} &= (90^\circ - \phi_G) \end{aligned} \quad (6)$$

Então,

$$\begin{aligned} \therefore (\delta_{inf}, \delta_{sup})_L &= (-34^\circ 37', 90^\circ) \\ \therefore (\delta_{inf}, \delta_{sup})_G &= (-90^\circ, 43^\circ 24') \end{aligned} \quad (7)$$

Vamos usar o ângulo sólido do céu visível para calcular o percentual visível por cada um deles.

$$\Theta_i = \frac{\Omega_{visivel}}{4\pi} = 1 - \frac{\Omega_{invisivel}}{4\pi} \quad (8)$$

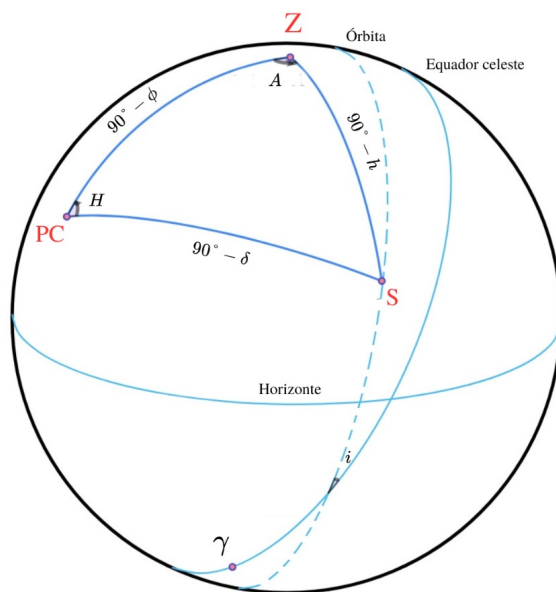
Como a região invisível é delimitada por um cone de abertura ϕ_i , temos:

$$\Theta_i = 1 - \frac{2\pi(1 - \cos(\phi_i))}{4\pi} = \frac{1 + \cos(\phi_i)}{2} \quad (9)$$

Usando os valores encontrados no item anterior, finalizamos.

$$\begin{aligned} \Theta_L &= 78.6\% \\ \Theta_G &= 84.3\% \end{aligned} \quad (10)$$

(f) De modo genérico, temos o seguinte triângulo esférico:



Observe que a generalização da nossa função exige que consideremos os casos de declinações positivas e negativas. Então, relacionando os lados e ângulos de maneira apropriada podemos determinar a altura e azimute a partir das coordenadas equatoriais e em função da variáveis solicitadas. Pela lei dos cossenos:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos(H) \quad (11)$$

$$\sin(h) = \sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(H) \quad (12)$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cot(A) \sin(H) + \cos(90^\circ - \phi) \cos(H) = \cot(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \phi) \quad (13)$$

$$\cot(A) \sin(H) + \sin(\phi) \cos(H) = \tan(\delta) \cos(\phi) \quad (14)$$

$$\tan(A) = \frac{\sin(H)}{\tan(\delta) \cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(H)} \quad (15)$$

Por fim, pela lei dos senos,

$$\frac{\sin(A)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin(H)}{\sin(90^\circ - h)}$$

$$\sin(A) = \frac{\sin(H) \cos(\delta)}{\cos(h)}$$

Além disso, como a altura está definida no intervalo $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$, a função arco-seno contém toda informação necessária, pois sua imagem é igual ao intervalo onde a altura está definida. Por outro lado, a função arco-tangente nos retorna valores no intervalo $-90^\circ \leq \arctan(x) \leq 90^\circ$, enquanto o azimute utilizado na questão está definido no intervalo $0 \leq A < 360^\circ$ com sentido N-L-S-O, o que exige que sejam feitas as devidas correções de quadrante.

Sabemos que $\sin(A) \geq 0 \Rightarrow A \in Q_1 \cup Q_2$ e $\sin(A) < 0 \Rightarrow A \in Q_3 \cup Q_4$. Como $\frac{\cos(\delta)}{\cos(h)} \geq 0$, $\sin(H) \geq 0 \Rightarrow A \in Q_1 \cup Q_2$ e $\sin(H) < 0 \Rightarrow A \in Q_3 \cup Q_4$. Dessa forma, tomando a função auxiliar

$$\Delta(\delta, H) = \arctan \left\{ \frac{\sin(H)}{\tan(\delta) \cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(H)} \right\}$$

concluimos que

$$f_A(\delta, H) = \begin{cases} \Delta(\delta, H) & \sin H \geq 0 \wedge \Delta(\delta, H) \geq 0 \\ \Delta(\delta, H) + 180^\circ & \sin H \geq 0 \wedge \Delta(\delta, H) < 0 \\ \Delta(\delta, H) + 180^\circ & \sin H < 0 \wedge \Delta(\delta, H) \geq 0 \\ \Delta(\delta, H) + 360^\circ & \sin H < 0 \wedge \Delta(\delta, H) < 0 \end{cases}$$

Por fim, simplificando os casos e substituindo H de acordo com o seguinte raciocínio, obtemos,

$$\begin{cases} TSL = H + \alpha \\ TSL = TSG + \lambda \end{cases} \rightarrow H = TSG + \lambda - \alpha$$

$$f_h(\delta, \alpha) = \arcsin[\sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(TSG + \lambda - \alpha)]$$

$$f_A(\delta, \alpha) = \begin{cases} \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) & \sin(TSG + \lambda - \alpha) \geq 0 \wedge \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) \geq 0 \\ \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) + 180^\circ & \sin(TSG + \lambda - \alpha) \cdot \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) < 0 \\ \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) + 360^\circ & \sin(TSG + \lambda - \alpha) < 0 \wedge \Delta(\delta, TSG + \lambda - \alpha) < 0 \end{cases}$$

(g) Com as equações do item anterior e o conjunto de dados fornecidos, construímos as seguintes tabelas.

TSG (hh:mm:ss)	h (°)	A (°)
14:13:34	1.839	16.586
14:15:42	4.888	25.069
14:17:55	7.830	33.629
14:20:14	10.597	42.306
14:22:39	13.123	51.134
14:25:12	15.343	60.133
14:27:51	17.196	69.309
14:30:38	18.626	78.648
14:33:32	19.590	88.120
14:36:34	20.055	97.675
14:39:42	20.005	107.256
14:42:57	19.443	116.799
14:46:16	18.388	126.249
14:49:38	16.873	135.559
14:53:02	14.946	144.702
14:56:26	12.663	153.667
14:59:48	10.086	162.464
15:03:07	7.280	171.116
15:06:21	4.312	179.658
15:09:30	1.250	188.132

Tabela 3: Coordenadas altazimutais do satélite na localização de Larissinha.

TSG (hh:mm:ss)	A (°)	h (°)
14:17:55	24.156	3.537
14:20:14	15.896	7.198
14:22:39	7.506	10.709
14:25:12	358.925	13.990
14:27:51	350.109	16.962
14:30:38	341.028	19.545
14:33:32	331.681	21.661
14:36:34	322.092	23.241
14:39:42	312.317	24.227
14:42:57	302.440	24.583
14:46:16	292.557	24.295
14:49:38	282.768	23.373
14:53:02	273.156	21.853
14:56:26	263.782	19.790
14:59:48	254.673	17.253
15:03:07	245.830	14.318
15:06:21	237.226	11.065
15:09:30	228.818	7.574
15:12:31	220.548	3.926
15:15:26	212.350	0.196

Tabela 4: Coordenadas altazimutais do satélite na localização de Gustavinho.

(h) Os pontos da órbita do satélite estão indicados por pontos amarelos nas cartas apresentadas no início da solução.

(i) Para facilitar a visualização, os pontos da órbita do satélite e as indicações pedidas foram plotados em cartas separadas em sobreposição com os limites das constelações.

Devido a dificuldade em identificar alguns limites de constelações diretamente, devido aos pontos da órbita que cruzam regiões de difícil identificação unívoca da constelação, serão consideradas todas igualmente na solução.

Gustavinho		Larissinha	
N ^o	Constelação	N ^o	Constelação
1	Aur / Gem	1	Aur
2	Lyn / Cnc	2	Lyn / Gem
3	Leo	3	Cnc
4	Vir	4	Leo
5	Lib	5	Vir
6	Sco	6	Lib
7	Sgr / CrA	7	Sco

Tabela 5: Comparação entre as constelações nas cartas de Gustavinho e Larissinha.

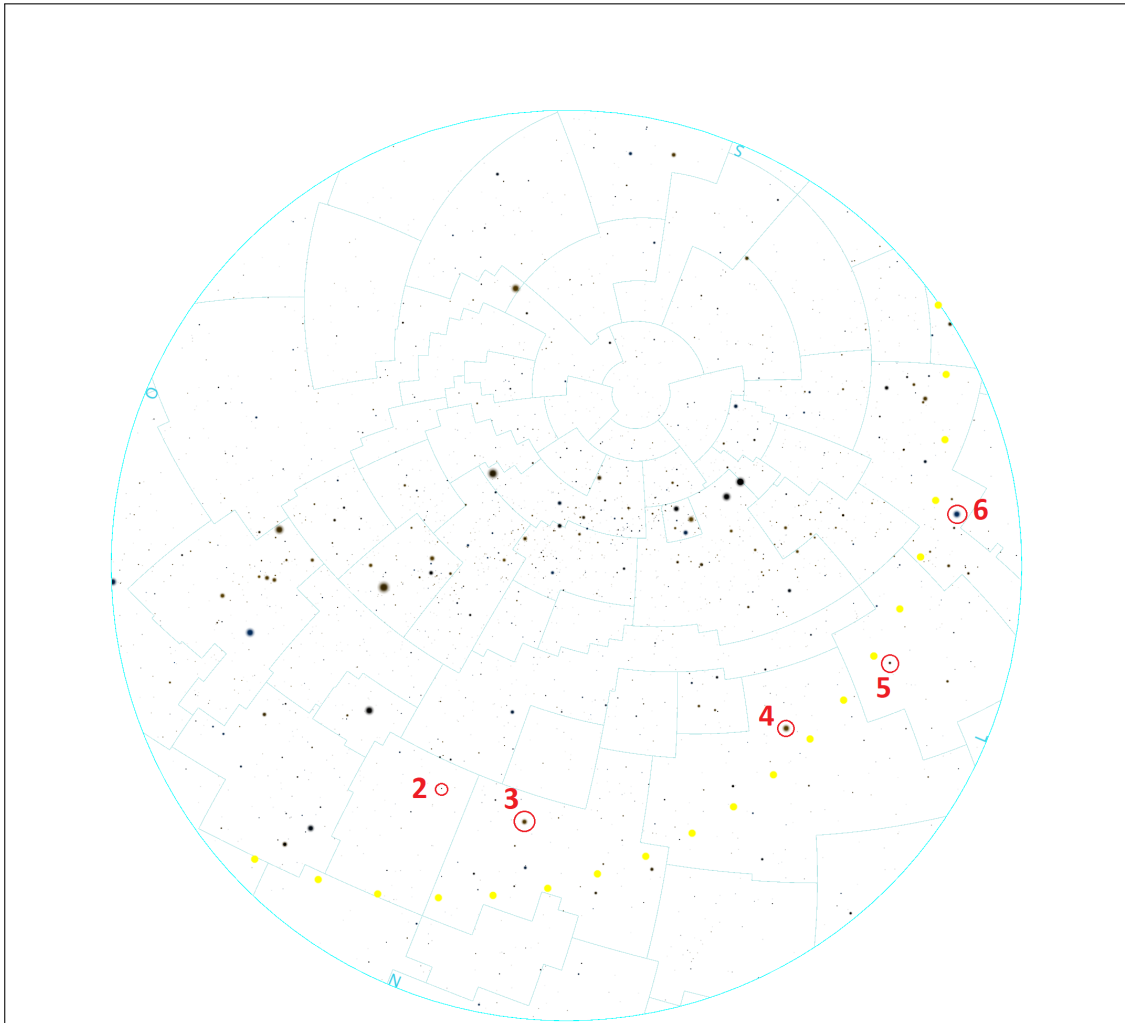


Figura 3: Sobreposição dos pontos da órbita do satélite e os limites de constelações na carta celeste de Gustavinho.

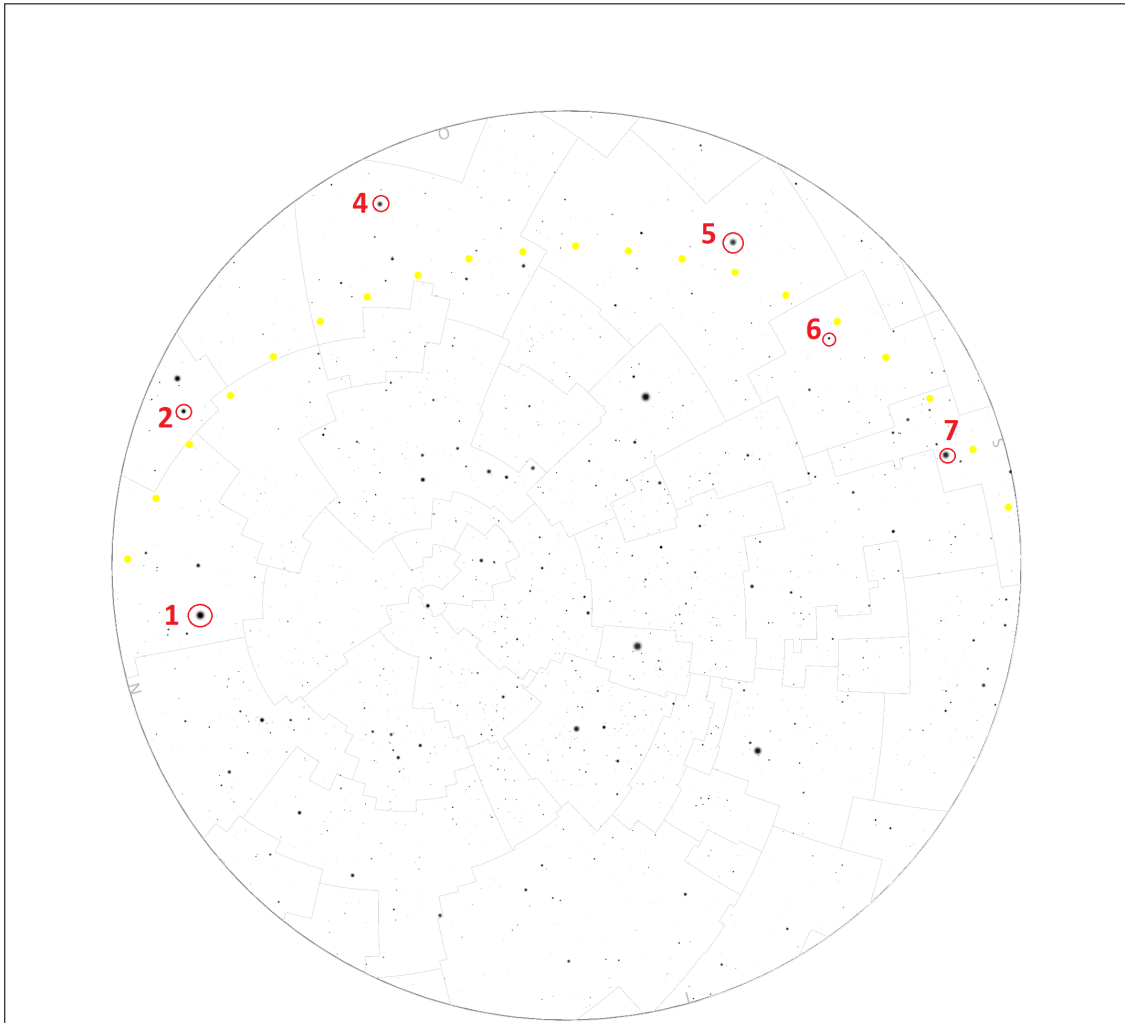
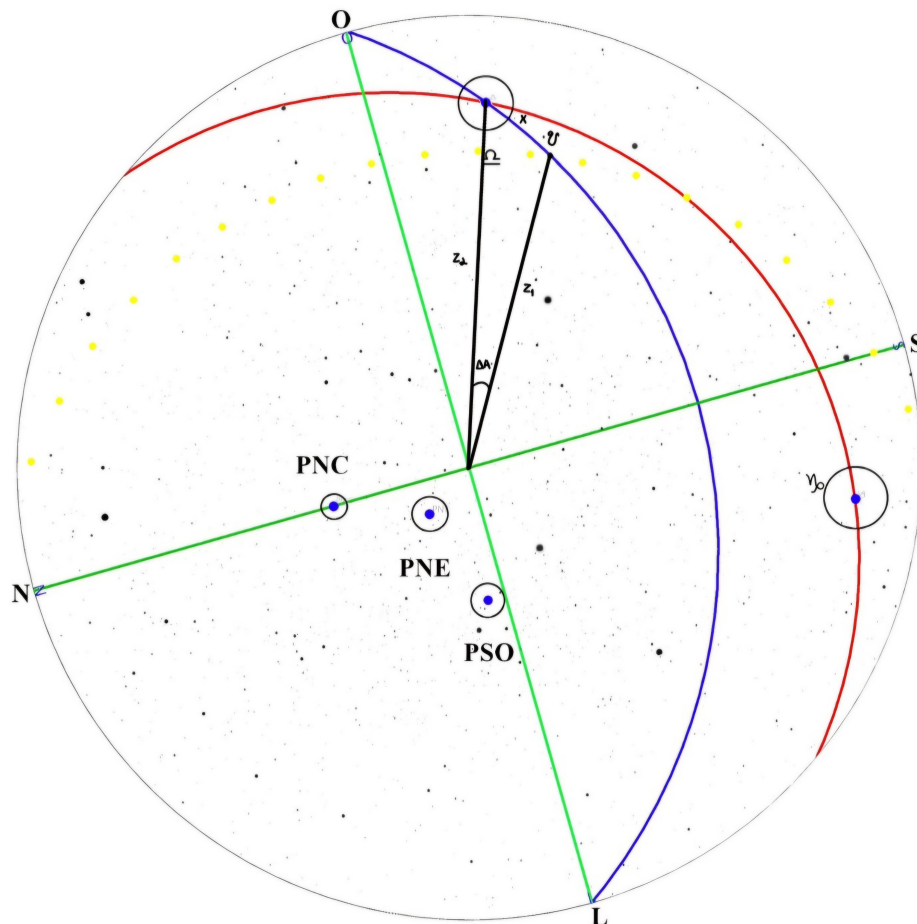


Figura 4: Sobreposição dos pontos da órbita do satélite e os limites de constelações na carta celeste de Larissinha.

- (j) As marcações pedidas, que são feitas a partir do esboço da órbita do satélite, estão nas cartas do início da solução. Para determinar a longitude do nodo ascendente, podemos utilizar a figura abaixo, onde é identificado o nodo descendente:



Aplicando a lei dos cossenos para o triângulo esférico Zênite—Ponto de Libra—Nodo descendente, temos

$$\cos x = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos \Delta A$$

$$x = \arccos(\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos \Delta A)$$

A longitude do nodo descendente será

$$\bar{\Omega} = 180^\circ + x = 180^\circ + \arccos(\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 \cos \Delta A)$$

Tomando as medidas de distância de cada ponto (nodo descendente e ponto de Libra) ao centro da carta, temos

$$z_1 = 2 \arctan\left(\frac{r_1}{R}\right) \Rightarrow z_1 = 71^\circ$$

$$z_2 = 2 \arctan \left(\frac{r_2}{R} \right) \Rightarrow z_2 = 77,7^\circ$$

E, com $\Delta A = 12,2^\circ$ medido diretamente da carta celeste, a longitude do nodo descendente, será, $\tilde{\Omega} = 193,5^\circ$, e portando a longitude do nodo ascendente será

$$\Omega = 13,5^\circ$$

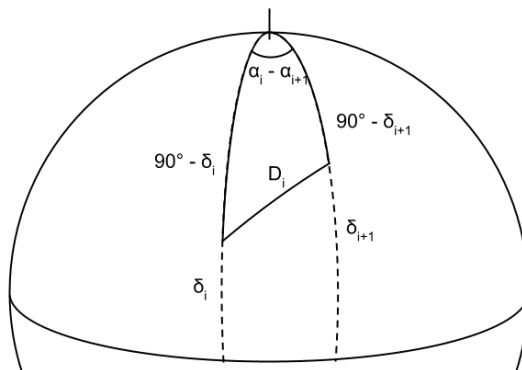
Pelos dados brutos fornecidos, vemos que o módulo da declinação atinge seu valor máximo em $i \approx 35.636^\circ$, que pode ser aproximado para o valor da inclinação, já que os valores locais em torno dele indicam que se trata de um ponto crítico. A rigor, o valor nominal da inclinação da órbita desse satélite é $i = 35.7^\circ$.

- (k) Pelos dados brutos coletados, podemos notar que o satélite tem período $T \approx 6144$ s. Portanto, aplicando a Terceira Lei de Kepler, trivialmente obtemos o semi-eixo maior da órbita do satélite.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{16}$$

$$a \approx 7250 \text{ km}$$

- (l) Para calcularmos a velocidade média, é eficiente considerar o uso de uma tabela de apoio, onde seria anotado os valores de separação angular (S) e intervalo de tempo (Δt) entre cada ponto na órbita. Pela geometria do problema, para a velocidade angular média no ponto indexado por i , usaremos a aproximação da velocidade média no arco de circunferência entre os dois pontos consecutivos.



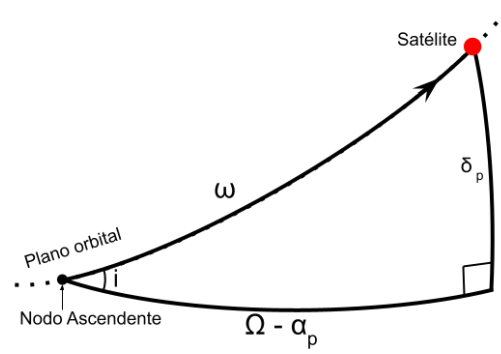
A separação angular entre os pontos de índices i e $i + 1$ é dada por

$$\cos S_i = \sin(\delta_i) \sin(\delta_{i+1}) + \cos(\delta_i) \cos(\delta_{i+1}) \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i),$$

assim, a velocidade angular entre esses dois pontos será

$$w_i = \frac{\arccos[\sin(\delta_i) \sin(\delta_{i+1}) + \cos(\delta_i) \cos(\delta_{i+1}) \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i)]}{\Delta t_i} \tag{17}$$

- (m) Pelos dados da tabela, podemos perceber que a velocidade angular média máxima ocorre no ponto $(\delta, \alpha)_p = (13.620^\circ, 33.206^\circ)$, o que nos motiva a assumir que o perigeu é próximo desse ponto. A rigor, para essa órbita em particular esse ponto é, de fato, o perigeu. Agora, se observarmos a órbita pela grade equatorial, temos o seguinte triângulo esférico. Atente-se ao fato de que a ascensão reta está aumentando conforme o tempo passa, então o perigeu está a leste do nodo ascendente e, portanto, é positivo.



$$\omega = \arccos[\cos(\Omega - \alpha_p) \cos(\delta_p) + \sin(\alpha_p - \Omega) \sin(\delta_p) \cos(90^\circ)] \quad (18)$$

$$\omega = \arccos[\cos(\Omega - \alpha_p) \cos(\delta_p)]$$

$$\therefore \omega \approx 23.8^\circ$$

Grade de Correção (150 pontos)

Item (a) (4 pontos) +0.5 traçou o Equador celeste na carta de Larissinha de forma correta

- +0.5 traçou o Equador celeste na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 traçou a Eclíptica na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 traçou a Eclíptica celeste na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 traçou o Meridiano Local na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 traçou o Meridiano Local na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 traçou a Primeira vertical na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 traçou a Primeira vertical na carta de Gustavinho de forma correta

Item (b) (5 pontos)

- +0.5 Indicou os pontos cardeais na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 Indicou os pontos cardeais na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 Indicou o polo celeste visível na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 Indicou o polo celeste visível na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 Indicou o polo eclíptico visível na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 Indicou o polo eclíptico visível na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 Indicou o ponto equinocial visível na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 Indicou o ponto equinocial visível na carta de Larissinha de forma correta
- +0.5 Indicou o ponto solsticial visível na carta de Gustavinho de forma correta
- +0.5 Indicou o ponto solsticial visível na carta de Larissinha de forma correta

Item (c) (5 pontos)

- + 1 apresentou a fórmula $TSL = H + \alpha$
- + 1 identificou a estrela Kornephoros cruzando o meridiano local da carta de Larissinha
- + 1 identificou a estrela Markeb cruzando o meridiano local da carta de Gustavinho
- + 1 valor final correto $TSL_L = 16^h30^m \pm 15^m$
- + 1 valor final correto $TSL_G = 9^h22^m \pm 15^m$

Item (d) (5 pontos)

- + 1.5 usar equação $\phi = 90^\circ - 2 \arctan\left(\frac{r}{R}\right)$ para calcular latitude das cartas
- + 1.5 usar relação $TSL - TSG = \lambda$ para calcular a longitude das cartas
- + 0.5 valor final correto para latitude de Larissinha $\phi_L = 55^\circ 23' N \pm 3^\circ 30'$
- + 0.5 valor final correto para latitude de Gustavinho $\phi_G = 46^\circ 36' N \pm 3^\circ 30'$
- + 0.5 valor final correto para longitude de Larissinha $\lambda_L = 37^\circ E \pm 3^\circ 30'$
- + 0.5 valor final correto para longitude de Gustavinho $\lambda_G = 70^\circ W \pm 3^\circ 30'$

Item (e) (6 pontos)

- + 2 Perceber que a limitação se refere ao caso de circumpolaridade
- + 2 Fórmula para o ângulo sólido
- + 1 $\Theta_L = 78.6 \pm 2\%$
- + 1 $\Theta_G = 84.3 \pm 2\%$

Item (f) (10 pontos)

- + 2 utilizar Lei dos senos (ou similar) para chegar na seguinte equação para h
- + 2 Utilizar Lei das cotangentes (ou similar) para chegar na seguinte equação para A

$$\tan(A) = \frac{\sin(H)}{\sin(\phi) \cos(H) - \tan(\delta) \cos(\phi)}$$

- + 1 substituir $H = TSG + \lambda - \alpha$
- + 1 raciocinar que a imagem de $\arcsin(x)$ é todo o intervalo de alturas possível

- + 2 explicar que o valor real de A depende do resultado da função $\arctan x$ e do valor de $\sin H = \sin(TSG + \lambda - \alpha)$
- + 2 correção do valor de $\arctan x$ em função do quadrante:

$$A = \begin{cases} \arctan x & Q_1 \\ \arctan x + 180^\circ & Q_2 \cup Q_3 \\ \arctan x + 360^\circ & Q_4 \end{cases}$$

Item (g) (22 pontos)

- 2 tabela 1 não possui título
- 2 tabela 1 não possui cabeçalho
- 2 tabela 2 não possui título
- 2 tabela 2 não possui cabeçalho
- 4 tabela com erro de algarismo significativos
- 0.55 por linha errada em qualquer uma das cartas (40 linhas no total)

Item (h) (23 pontos)

- 0.575 por ponto errado em qualquer uma das cartas (40 pontos em ambas as cartas)

Item (i) (10 pontos)

- + 0.5 Identificou a primeira constelação de Gustavinho como Auriga/Gemini
- + 0.5 Identificou a segunda constelação de Gustavinho como Lynx/Cancer
- + 0.5 Identificou a terceira constelação de Gustavinho como Leo
- + 0.5 Identificou a quarta constelação de Gustavinho como Virgo
- + 0.5 Identificou a quinta constelação de Gustavinho como Libra
- + 0.5 Identificou a sexta constelação de Gustavinho como Scorpius
- + 0.5 Identificou a sétima constelação de Gustavinho como Sagittarius/Corona Australis
- + 0.5 Identificou a primeira constelação de Larissinha como Auriga
- + 0.5 Identificou a segunda constelação de Larissinha como Lynx/Gemini
- + 0.5 Identificou a terceira constelação de Larissinha como Cancer
- + 0.5 Identificou a quarta constelação de Larissinha como Leo
- + 0.5 Identificou a quinta constelação de Larissinha como Virgo
- + 0.5 Identificou a sexta constelação de Larissinha como Libra
- + 0.5 Identificou a sétima constelação de Larissinha como Scorpius
- + 0.3 Indicou a estrela α da segunda constelação de Gustavinho
- + 0.3 Indicou a estrela α da terceira constelação de Gustavinho
- + 0.3 Indicou a estrela α da quarta constelação de Gustavinho
- + 0.3 Indicou a estrela α da quinta constelação de Gustavinho
- + 0.3 Indicou a estrela α da sexta constelação de Gustavinho
- + 0.25 Indicou a estrela α da primeira constelação de Larissinha
- + 0.25 Indicou a estrela α da segunda constelação de Larissinha
- + 0.25 Indicou a estrela α da quarta constelação de Larissinha
- + 0.25 Indicou a estrela α da quinta constelação de Larissinha
- + 0.25 Indicou a estrela α da sexta constelação de Larissinha
- + 0.25 Indicou a estrela α da sétima constelação de Larissinha

Item (j) (18 pontos)

- + 1 Indicou corretamente o nodo descendente na carta de Larissinha
- + 1 Indicou corretamente o polo sul orbital na carta de Larissinha
- + 1 Indicou corretamente o nodo descendente na carta de Gustavinho
- + 1 Indicou corretamente o polo norte orbital na carta de Gustavinho
- + 2 Traçou o triângulo Zênite-Ponto de Libra-Nodo descendente na carta celeste

- + 0.5 Mediu, na carta celeste, as distâncias do nodo descendente e do ponto de libra ao centro da carta
- + 1 Calculou as distâncias zenitais a partir das distâncias medidas
- + 0.5 Mediu o ângulo ΔA
- + 4 Aplicou a lei dos cossenos no triângulo esférico para calcular x
- + 3 Calculou corretamente a longitude do nodo ascendente como $180 + (x - 180) = x$
- + 3 Estimou a inclinação da órbita do satélite como o maior valor do módulo da declinação

Item (k) (5 pontos)

- + 4 Perceber, a partir da tabela, que o satélite tem período $T \approx 6144$ s
- + 1 Calcular o semieixo maior do satélite pela 3ª Lei de Kepler

Item (l) (17 pontos)

- + 7 indicar que $w_i = d_i/\Delta t_i$
- + 10 Lei dos cossenos para determinar d_i

$$d_i = \arccos[\cos(\delta_i) \cos(\delta_{i+1}) + \sin(\delta_i) \sin(\delta_{i+1}) \cos(\alpha_{i+1} - \alpha_i)]$$

- Item (m) (20 pontos)** +7 Notar o ponto de maior velocidade angular como sendo o periélio +2 Atentar-se ao fato de que a ascensão reta aumenta, com declinação positiva, portanto o argumento do periélio é positivo também. +3 Desenhar o triângulo esférico correto +3 Usar uma lei que resolve o triângulo para ω +5 Valor correto de $\omega = 23.8 \pm 2^\circ$