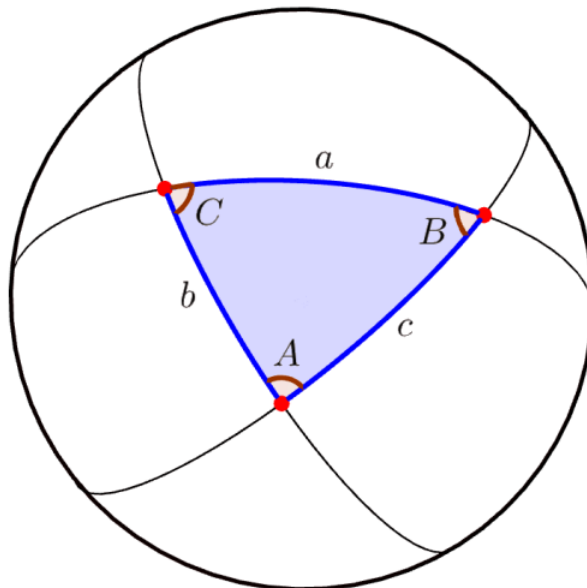


## Instruções Gerais

1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
11. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
12. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

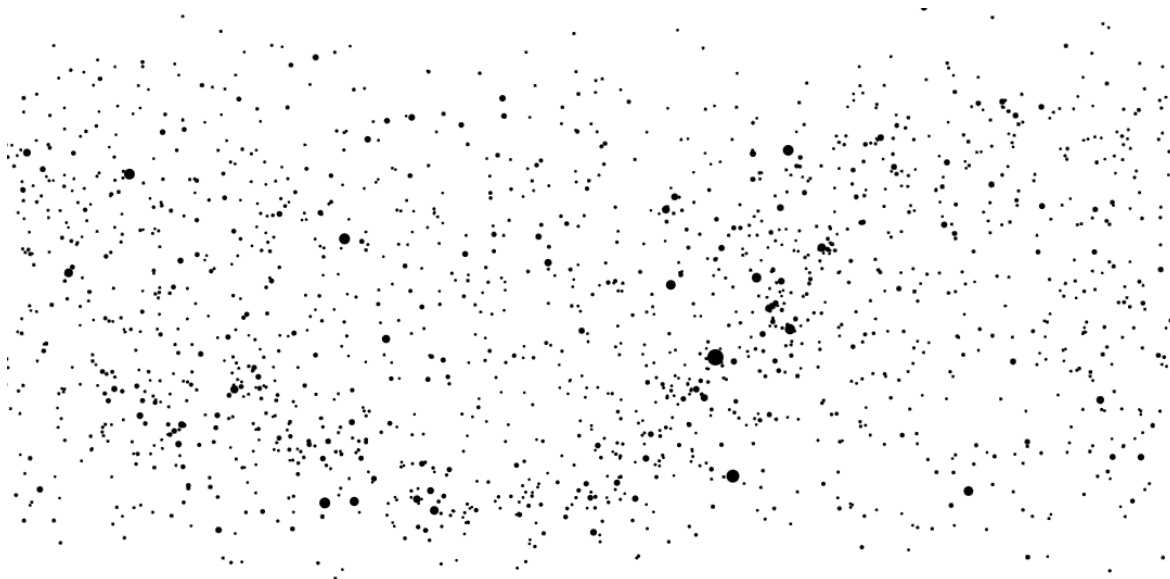
$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

Alguns valores da Equação do Tempo:

| Data           | Equação do Tempo |
|----------------|------------------|
| 01 de janeiro  | -3m 41s          |
| 21 de março    | -7m 3s           |
| 01 de maio     | 2m 56s           |
| 21 de junho    | -1m 53s          |
| 01 de julho    | -3m 57s          |
| 01 de setembro | 0m 4s            |
| 21 de setembro | 7m 0s            |
| 01 de outubro  | 10m 25s          |
| 01 de novembro | 16m 29s          |
| 21 de dezembro | 1m 48s           |

### 1. A estrela era de Hydrus, Crux ou Centaurus? (50 pontos)

Depois de perceber que uma das maiores dificuldades dos estudantes que vão para internacionais é com ângulos, tanto seu crescimento no céu quanto sua estimativa (Hydrus 2024 (x-x)), Doardue resolveu lembrar esse conteúdo (mas rocla que não arise mau tãoques tementalto plessim). A seguir está uma carta celeste em projeção equirretangular, a qual pode ser dividida em vários retângulos congruentes.



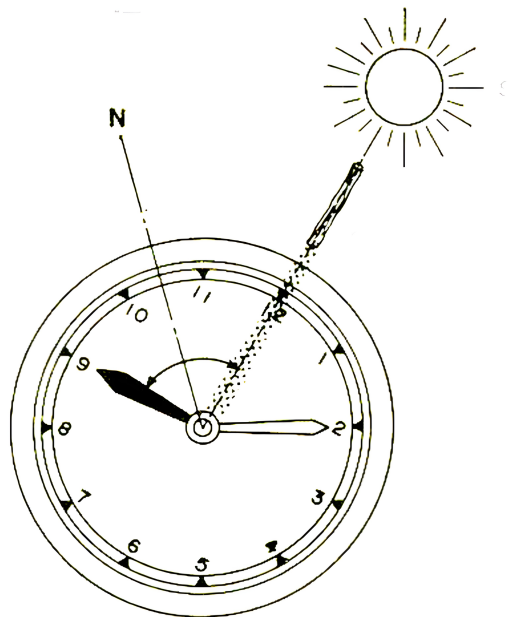
Com base nessa representação do céu, responda as questões a seguir:

- (15 pontos) Marque as linhas do equador e da eclíptica.
- (5 pontos) Indique a direção de crescimento do azimute e do ângulo horário.
- (15 pontos) Encontre a distância angular entre Altair ( $\alpha$  Aql) e Nekkar ( $\beta$  Boo).
- (15 pontos) Encontre as coordenadas equatoriais de Cih ( $\gamma$  Cas) e de Beid ( $\sigma$  Eri).

### 2. Horário Norte (110 pontos)

Mauí-mauê e seu inseparável amigo Mychelini Segrini estavam explorando uma trilha na mata quando, distraídos com a paisagem, acabaram se perdendo. Mychelini Segrini olha para o relógio e percebe que o horário do almoço se aproxima rapidamente — é hora de dar um jeito de voltar para casa. Felizmente, Mauí-mauê se lembra de um método simples, porém engenhoso, para descobrir a direção do norte usando apenas um relógio e o Sol.

Considere o seguinte método para determinar o Norte a partir de um relógio analógico de ponteiros simples, no Hemisfério Sul:



1. Coloque o relógio na horizontal.
2. Alinhe o número “12” com o azimute do Sol.
3. Observe o ângulo entre a posição do ponteiro das horas e a marcação “12”. A bissetriz desse ângulo aponta, aproximadamente, para o Norte Geográfico.

Suponha que você esteja em uma latitude fixa  $\varphi$  no hemisfério sul. Usando este método, responda aos itens a seguir:

- (a) **(10 pontos)** Descreva o princípio de funcionamento do método: o que te permite fazer essa aproximação, ou seja, quando você usa esse método, o que você está assumindo?
- (b) **(5 pontos)** Encontre uma latitude  $\varphi_0$  tal que, para  $\varphi \rightarrow \varphi_0$ , este método é cada vez mais preciso independente da data do ano.
- (c) **(15 pontos)** Deduza a expressão analítica para o erro angular  $\varepsilon$  em função das variáveis

$$\varepsilon(\varphi, \delta, H, \Delta\lambda, ET)$$

em que  $\varepsilon$  é o azimute do Norte fictício (encontrado pelo método),  $H$  é o ângulo horário solar,  $\delta$  é a declinação solar,  $\Delta\lambda$  é a diferença de longitude entre o observador ( $\lambda$ ) e o fuso de referência ( $\lambda_0$ , ou seja,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  (com  $\lambda$  positivo para Leste),  $ET$  é a Equação do Tempo (tempo solar aparente menos o médio) e  $\varphi < 0$ . A função precisa apenas ser válida para quando o Sol está ao norte do primeiro e segundo vertical ( $-90^\circ \leq A \leq +90^\circ$ ).

- (d) **(10 pontos)** Rascunhe à mão o esboço de dois gráficos de  $\varepsilon$  em função de  $H$ , para  $\delta = 0$ : Um em  $\varphi_1 = -10^\circ$  e outro em  $\varphi_2 = -40^\circ$ . Ambos no centro do fuso e com  $ET = 0$ .
- (e) **(10 pontos)** Se você usar esse método às 10h da manhã, no centro do fuso com  $ET = 0$ , e tentar seguir um caminho qualquer, você vai desviar para a direita ou para a esquerda?

Considere a seguinte carta para um observador no Solstício de Inverno do Hemisfério Sul no centro de seu fuso.

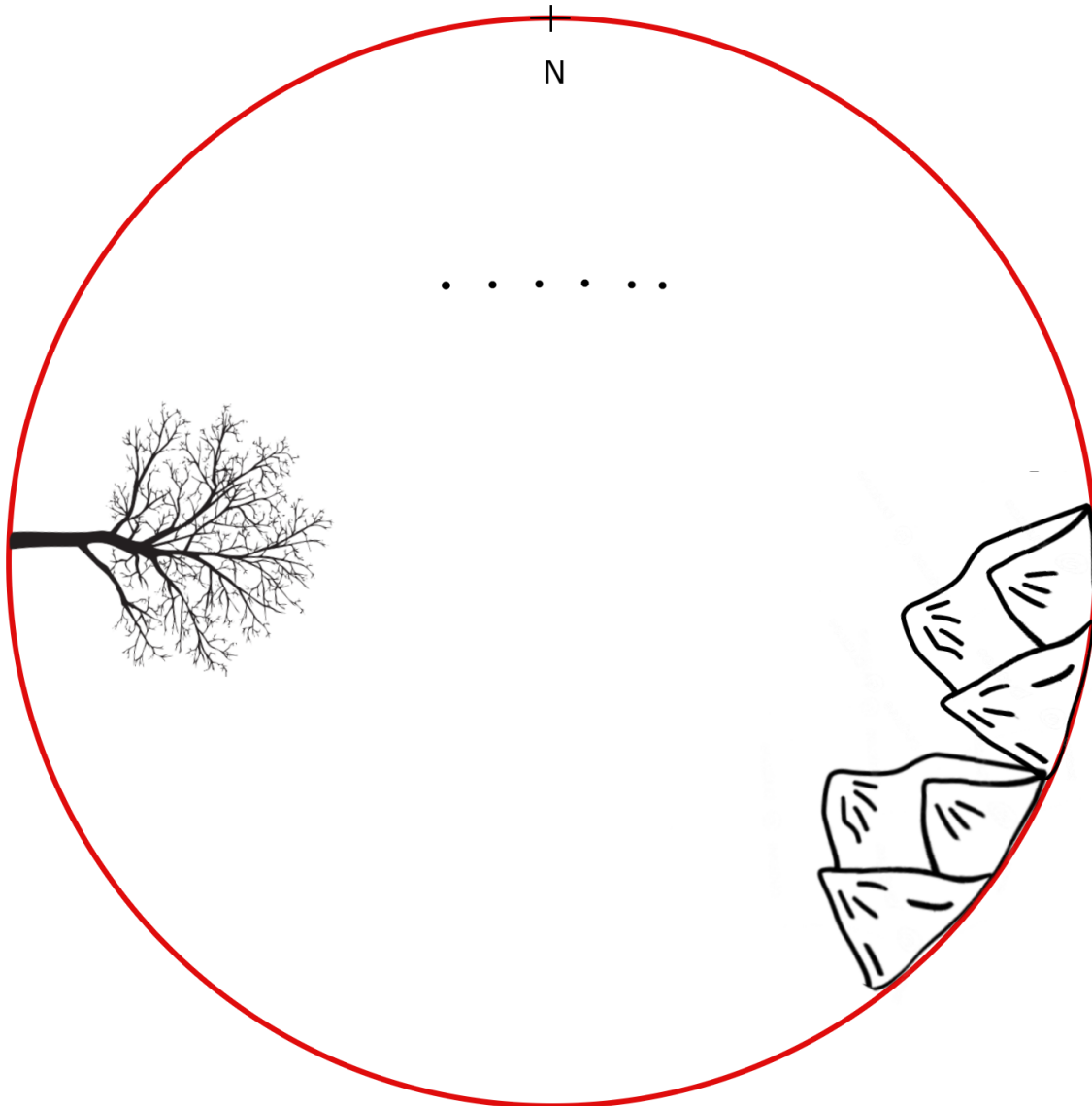


Figura 1: Nessa projeção, o azimute é conservado, e seu centro representa o zênite

Cada um dos 6 pontos representa a posição do Sol numa carta celeste de projeção indeterminada em 6 momentos diferentes, conforme a tabela abaixo.

| $i$ | Horário |
|-----|---------|
| 1   | 10:52   |
| 2   | 11:22   |
| 3   | 11:52   |
| 4   | 12:22   |
| 5   | 12:52   |
| 6   | 13:12   |

Tabela 1

(f) (10 pontos) Monte uma tabela com as colunas  $i$ , Azimute e Azimute do Polo norte encon-

trado pelo método da questão.

- (g) **(10 pontos)** Plote um gráfico dos pontos do erro (em graus) e o horário do dia.
- (h) **(10 pontos)** Faça uma regressão linear, e através do coeficiente angular, encontre a latitude do observador. Considere a aproximação  $\arctan(x) = x$ .
- (i) **(10 pontos)** Suponha que você se encontra em  $(\varphi, \lambda)$  no hemisfério sul e tal que  $\lambda$  é o centro do seu fuso, e pretende navegar até  $(\varphi + 1^\circ, \lambda + 1^\circ)$ . Se você usar o método acima para orientar seu rumo “Norte” apenas no ponto de partida, qual será a *distância mínima de desvio* do seu trajeto até o destino real. (Desconsidere a Equação do Tempo)
- (j) **(10 pontos)** Como seria o método adaptado para o hemisfério norte (e a nova fórmula para o erro angular)?
- (k) **(10 pontos)** Para alguém no Hemisfério Sul, como em Barra do Piraí, o Sol se põe progressivamente mais cedo à medida que o Solstício de Inverno se aproxima. No entanto, o dia exato em que o Sol para de se pôr mais cedo e começa a se pôr mais tarde não coincide precisamente com o Solstício de Inverno.  
Esse dia se localiza antes ou depois do Solstício de Inverno? Por que essa diferença ocorre?