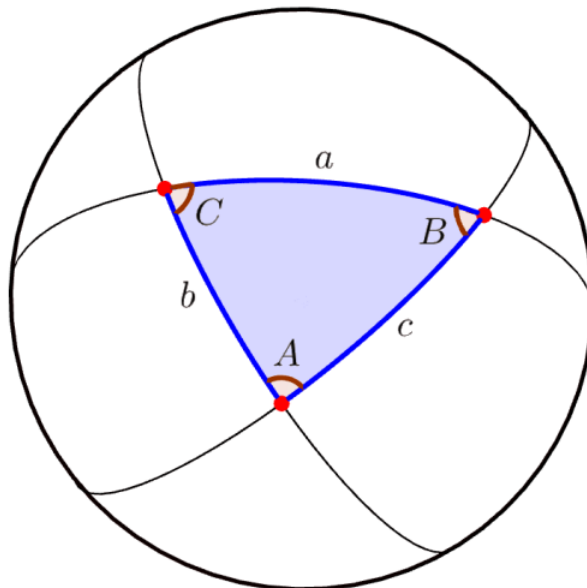


## Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 1 hora e 30 minutos;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Quando necessário, responda e justifique nas folhas em branco ou faça marcações nas cartas. Ao final da prova, devolva as folhas de resposta e as cartas utilizadas.
12. As marcações na carta podem ser feitas a grafite. Para evitar rasuras, prefira o grafite à tinta.
13. Quando solicitada a identificação de um elemento, escreva o nome dele em letra de tamanho legível, próximo à marcação, deixando claro qual nome se refere a qual elemento
14. Se não for explicitado o contrário assuma que as cartas estão em projeção azimutal equi-distante, na qual a borda da carta representa o horizonte, e a distância zenital de um ponto é diretamente proporcional à distância entre sua representação e o centro da carta.

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Coordenadas de algumas estrelas importantes:

Estrela	Declinação	Ascensão Reta
$\alpha$ -Aql	+ 08° 52' 12,1"	19h 50m 47,48s
$\alpha$ -Aqr	- 0° 11' 36,7"	22h 07m 07,42s
$\beta$ -And	+ 35° 45' 41,1"	1h 11m 12,39s
$\delta$ -Cap	-16° 00' 29,5"	1h 48m 28,68s
$\delta$ -Cas	+ 60° 22' 04,9"	1h 27m 30,82s
$\alpha$ -Cep	+ 62° 41' 35,7"	21h 19m 13,16s
$\beta$ -Cet	- 17° 50' 40,2"	0h 44m 54,37s
$\alpha$ -Cru	- 63° 05' 56,73"	12h 26m 35,90s
$\alpha$ -Eri	- 57° 06' 26,7"	1h 38m 43,25s
$\alpha$ -Lyr	+ 38° 47' 01,3"	18h 36m 56,34s
$\beta$ -Ori	- 08° 10' 12,5"	5h 15m 48,62s
$\epsilon$ -Peg	+ 09° 59' 38,8"	21h 45m 28,07s

## Questões

### 1. F Dudu (80 pontos)

Após alguns anos elevando o nível das provas de carta celeste nas seletivas, Dudu, neste ano, deixou a prova a cargo de outros ex-olímpicos. No entanto, isso não significa que a prova esteja mais fácil.

A seguir, apresenta-se uma projeção estereográfica, denominada **Carta 1**, de um determinado céu. Nesse tipo de projeção, a distância zenital de um ponto é dada pela equação:  $z = 2 \arctan\left(\frac{r}{R}\right)$ , em que  $R$  representa a distância da borda da carta ao centro, e  $r$  é a distância de um ponto qualquer até o centro da carta.

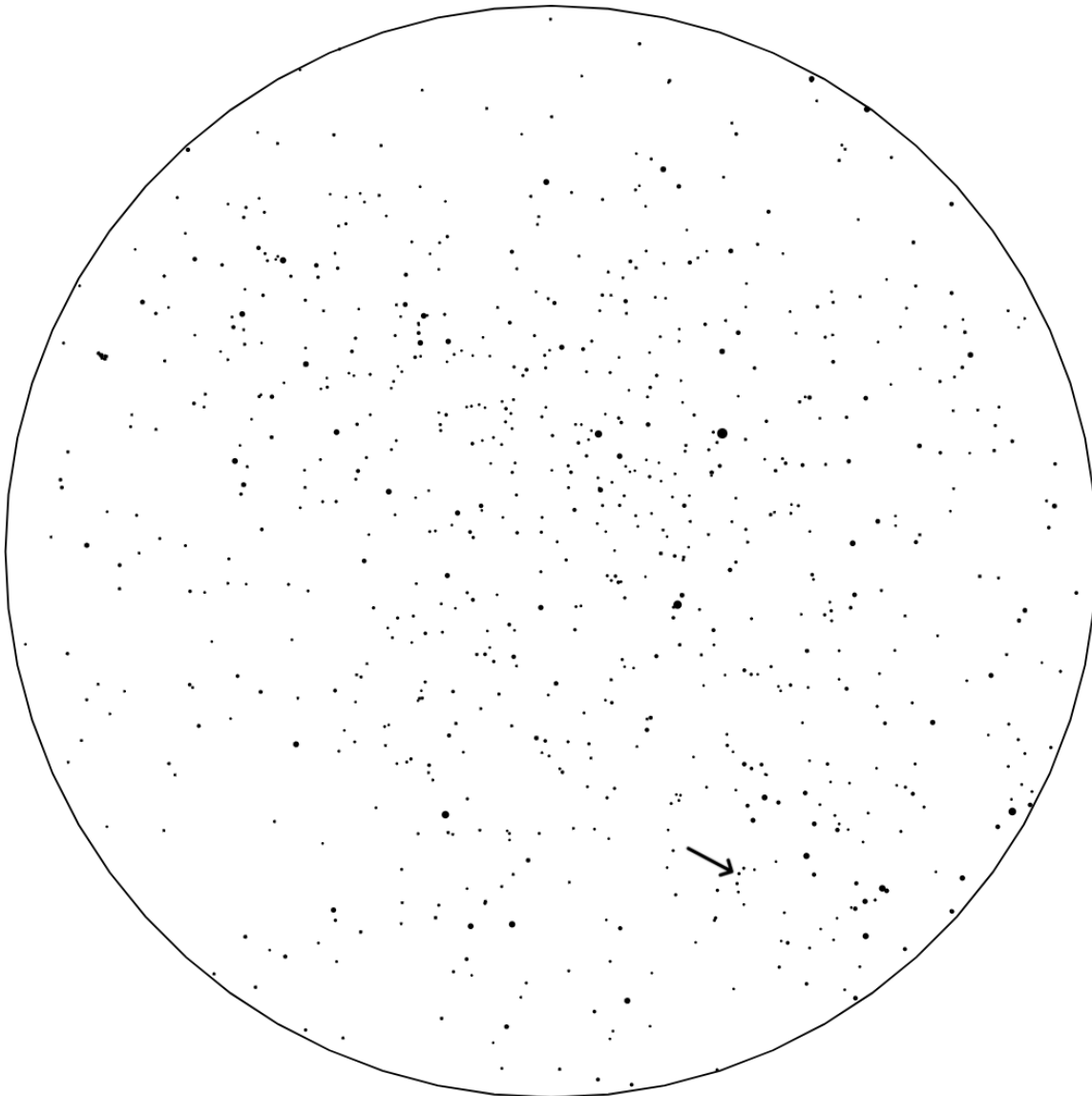


Figura 1: Carta 1: Carta celeste em projeção estereográfica. Feito com *Armchair Astronautics*

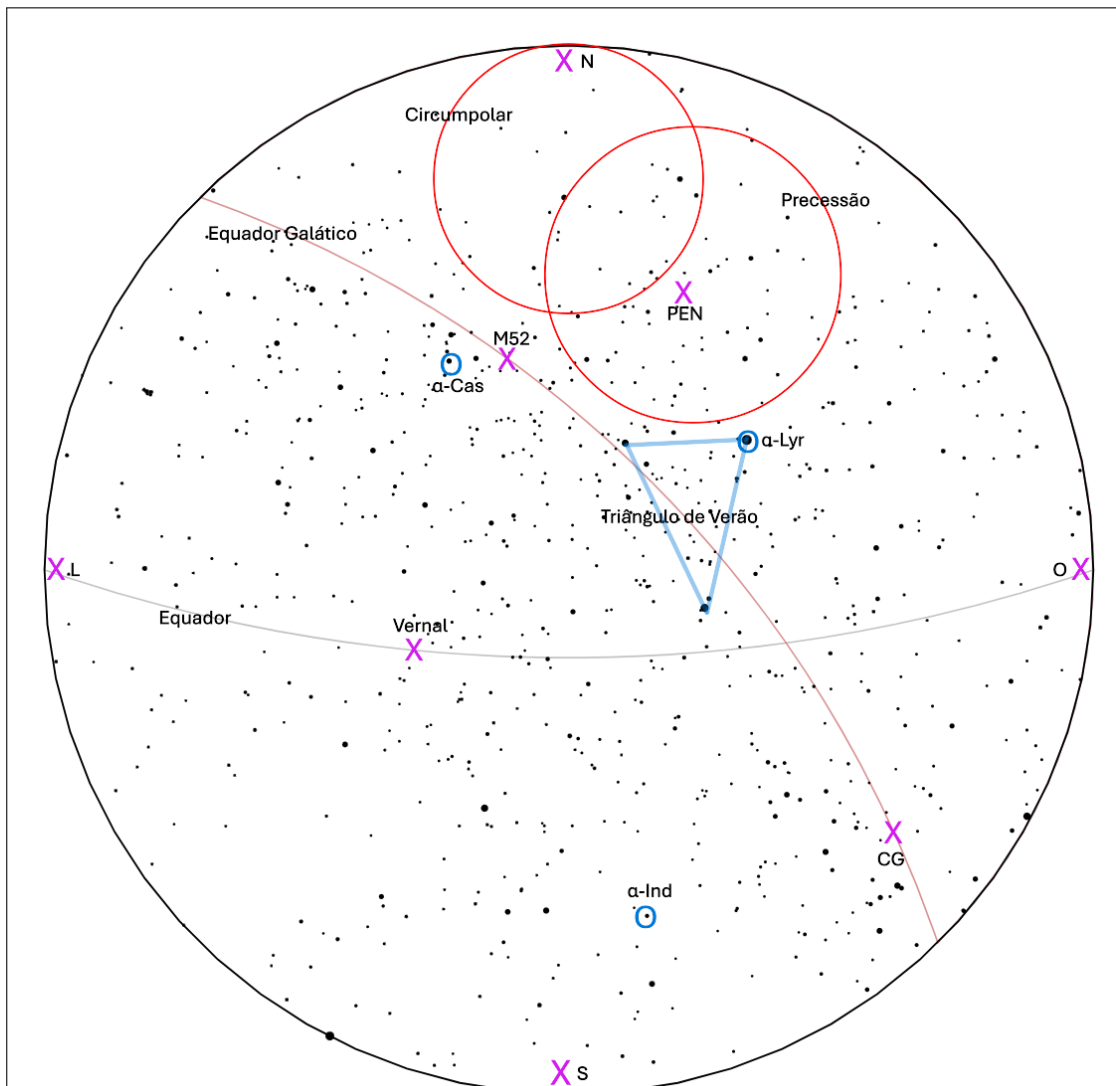
A projeção estereográfica tem uma característica muito interessante: todo círculo menor é representado como uma circunferência de fato. Um círculo menor é uma região equidistante de um determinado polo. Por exemplo, os trópicos de câncer e de capricórnio são círculos menores dos polos celestes, pois têm uma distância constante de  $90^\circ \pm \varepsilon$ . Logo, esses trópicos seriam representados como circunferências. Todavia, tome cuidado: faz sentido que o centro da circunferência seja o próprio polo? E qual seria seu raio? Essas perguntas são retóricas e não precisam constar na sua resolução.

Com base nas informações fornecidas, resolva os itens a seguir:

- (a) **(8 pontos)** Marque com um X o objeto Messier 52 (identifique-o por M52), e desenhe o asterismo do Triângulo de Verão do respectivo hemisfério representado.
- (b) Circule e identifique com a nomenclatura Bayer as estrelas **(1 ponto)** Vega ( $\alpha$ -Lyr), **(2 ponto)** Schedar ( $\alpha$ -Cas), **(3 pontos)** Persian ( $\alpha$ -Ind).
- (c) Trace as seguintes linhas e identifique-as: **(4 pontos)** o Equador Celeste, **(4 pontos)** o Círculo Circumpolar, **(4 pontos)** o Círculo de Precessão e **(4 pontos)** o Equador Galáctico.
- (d) Utilizando marcações em X, encontre os seguintes pontos, nomeando-os com a forma correspondente que está entre parênteses:
  - **(4 pontos)** Pontos cardeais (**N, S, L, O**)
  - **(4 pontos)** Polo eclíptico visível (**PEN, PES**)
  - **(6 pontos)** Centro galáctico ou anticentro galáctico (**CG, ACG**)
  - **(6 pontos)** Ponto equinocial visível (**Vernal, Anti-Vernal**)
- (e) **(3 pontos)** Indique o sentido de rotação do céu (**horário, anti-horário**).
- (f) **(7 pontos)** Estime a latitude da carta (tolerância de 2 graus para pontuação cheia e de 5 graus para metade da pontuação). **Coloque uma breve explicação do raciocínio utilizado.**
- (g) **(10 pontos)** Estime o tempo sideral da carta (tolerância de 15 minutos para pontuação completa e 30 minutos para metade da pontuação). **Coloque uma breve explicação do raciocínio utilizado.**
- (h) **(10 pontos)** Encontre o ângulo horário da estrela em destaque, **marcada por uma seta. Coloque uma breve explicação do raciocínio utilizado.**

**Solução:**

A seguir está uma representação da carta com as marcações que são resposta para os itens **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)** e **(e)**.



- (e) O movimento aparente diário do céu segue a rotação de um sistema levógiro (segue a regra da mão esquerda), quando visto a partir do polo celeste norte. Portanto, o seu sentido de rotação na carta é **anti-horário**.
- (f) Existem diversas formas de encontrar a latitude da carta, por exemplo, medir a distância zenital do polo, com o uso da fórmula fornecida, e subtrair de  $90^\circ$ , pois a latitude geográfica é igual à altura do polo celeste elevado:

$$\phi = 90^\circ - 2 \arctan \left( \frac{r}{R} \right) \approx +21,6^\circ$$

A latitude da carta é  $\phi = +21,6^\circ$ .

- (g) Também existem várias formas para encontrar o Tempo Sideral Local, por exemplo, pode-se traçar o meridiano local, percebendo que a estrela Enif ( $\epsilon$  Peg) está passando muito próxima dele. Portanto, como  $TSL = H + \alpha$ , por estar cruzando o meridiano,  $H \approx 0h$ . Então, o tempo sideral local será:

$$TSL \approx \alpha_{Enif} \approx 21h45min$$

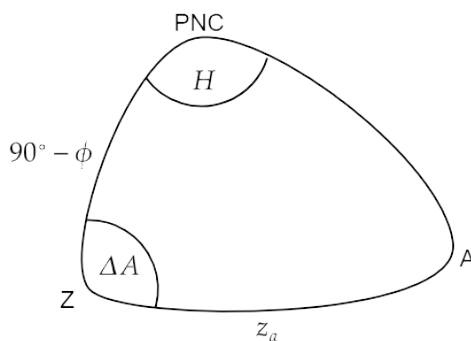
Mais precisamente, o tempo sideral da carta é  $TSL = 21h48min$ .

- (h) Para encontrar o ângulo horário da estrela apontada, é preciso encontrar sua distância zenital e diferença de azimute em relação ao polo. Isso pode ser encontrado a partir da expressão fornecida para a distância zenital e uma medida com transferidor ou régua. Os valores encontrados são:

$$z = 67,6^\circ$$

$$\Delta A = 210^\circ$$

Com esses valores, pode-se utilizar trigonometria esférica a partir do triângulo esférico:



Com a lei dos quatro elementos, tem-se:

$$\cot(z_a) \cdot \sin(90^\circ - \phi) = \cot(H) \cdot \sin(\Delta A) + \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(\Delta A)$$

$$\tan(H) = \frac{\sin(\Delta A)}{\cot(z_a) \cdot \cos(\phi) - \sin(\phi) \cdot \cos(\Delta A)}$$

$$H \approx 2h23min$$

## Grade de Correção

**Item a) (8 pontos):**

+ 4 Marcação e identificação M52 + 4 Marcação e identificação Triângulo de Verão

**Item b) (6 pontos):**

+ 1 Marcação e identificação Vega + 2 Marcação e identificação Schedar + 3 Marcação e identificação Persian

**Item c) (16 pontos):**

+ 4 Equador com concavidade correta e passando pelo ponto cardeal leste e ponto cardeal oeste, passando por 4 ou mais constelações corretas e identificação. + 4 Marcação e identificação do círculo circumpolar, tolerância até encostar no polo eclíptico, e deve encostar o horizonte + 4 Marcação e identificação do círculo de precessão, deve passar pelo polo celeste norte, tolerância até encostar no Equador galático + 4 Equador galático com concavidade correta e passando por pontos simétricos no horizonte, passando por 4 ou mais constelações corretas e identificação.

**Item d) (20 pontos):**

+ 4 Marcação e identificação dos pontos cardeais (1 ponto cada)

+ 4 Marcação e identificação do polo eclíptico norte

+ 6 Marcação e identificação do centro galático

+ 6 Marcação e identificação do ponto vernal

**Item e) (3 pontos):**

+3 Indicar que o sentido de rotação é anti-horário

**Item f) (7 pontos):**

+2 Medição da distância zenital do polo

+2 Expressão da latitude

+3 Valor numérico correto para a latitude (Erro de até 10% para pontuação completa e até 25% para metade dos pontos)

**Item g) (10 pontos):**

+1 Expressão para o TSL

+3 Desenho do triângulo de Posição. Também pontua se aplicar corretamente as leis da trigonometria esférica no triângulo de posição, mesmo que não haja representação gráfica

+3 Aplicação correta das leis da trigonometria esférica no triângulo de posição

+1 Valor numérico correto do ângulo horário

+2 Valor numérico correto do TSL (Erro de até 15min para pontuação completa e até 30min para metade dos pontos)

**Item h) (10 pontos):**

+3 Medição correta da distância zenital e da diferença de azimute da estrela.

+4 Expressão para o ângulo horário

+3 Valor numérico correto do ângulo horário (Erro de até 15min para pontuação completa e até 30min para metade dos pontos)