

## Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos (3h 30min) para resolução mais o tempo de 20 (vinte) minutos para *scan*, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 65 pontos e Questão 2 com 85 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas. Informações relevantes para a Prova de Análise de Dados estão disponibilizadas nas páginas 2 e 3.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre organize seus dados em tabelas. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

## Instruções Específicas

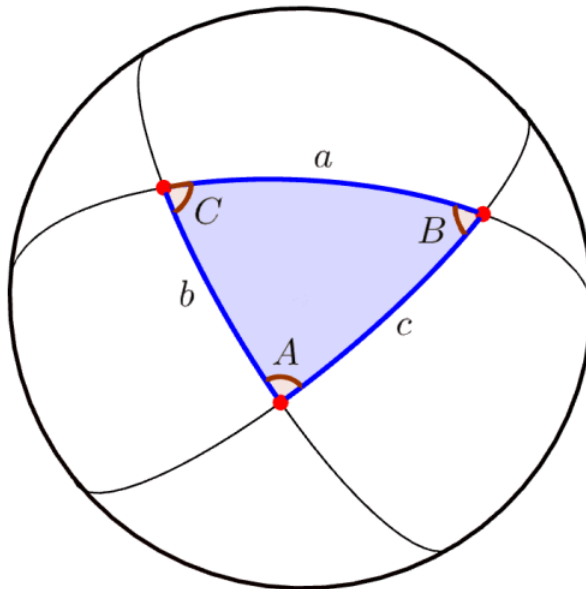
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça *upload* de uma folha escrito apenas “Esta questão foi pulada”.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8$ m/s <sup>2</sup>	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	4,80 mag	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220$ km s <sup>-1</sup>	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> · kg <sup>-2</sup>	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314$ N · m · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K <sup>-1</sup>	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-4</sup>	
Constante de Deslocamento de Wien ( $b$ )	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8$ km · s <sup>-1</sup> · Mpc <sup>-1</sup>	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton ( $m_p$ )	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar ( $e$ )	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

## Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = \epsilon \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

em que a emissividade vale  $\epsilon = 1$  para um emissor perfeito.

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

## Formulário

Para encontrar a incerteza  $\sigma_\omega$  de uma função genérica  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para $\sigma_\omega$
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega =  mx^{m-1}  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega =  ab \cos(bx)  \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right  \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta  $y = A + Bx$  são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que  $r$  é o coeficiente de correlação linear,  $A$  e  $B$  são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e  $N$  é o número de pontos.

### 1. Temperatura de Nuvens de Gás no Meio Interestelar (65 pontos)

Existem 3 tipos principais de gás no meio interestelar: nuvens frias ( $T \approx 100$  K), meio interestelar quente ( $T \approx 10^4$  K) e gás coronal ( $T \approx 10^6$  K). Nesta questão, iremos analisar espectros estelares para determinar qual tipo de gás é mais comum na via láctea, perto de onde a Terra está. Para isso, será necessário encontrar a temperatura de diversas nuvens.

Em **folhas separadas**, você pode encontrar os espectros de 5 diferentes estrelas; o nome de cada estrela encontra-se na parte inferior esquerda do gráfico. Em cada espectro, é possível notar facilmente a presença de duas linhas de absorção de sódio, próximas aos comprimentos de onda  $\lambda_{0_1} = 5890$  Å e  $\lambda_{0_2} = 5896$  Å, respectivamente. Medindo-se a largura espectral de cada uma dessas linhas, é possível então estimar a velocidade típica dos átomos de sódio, e por conseguinte a temperatura. Nos espectros, você também pode visualizar dois segmentos horizontais sobre cada linha de absorção, que devem ser utilizados como um auxílio sobre os quais as medições de larguras espectrais devem ser feitas.

#### Dados:

- Massa do átomo de sódio:  $m = 3,82 \cdot 10^{-26}$  kg
  - Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s
  - Constante de Boltzmann:  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J · K<sup>-1</sup>
- (a) **(7 pontos)** A largura espectral  $\Delta\lambda$  pode ser simplificada interpretada como a diferença entre os comprimentos de onda máximo e mínimo observados ao devido ao efeito Doppler associado ao movimento das moléculas. Utilizando a teoria cinética dos gases, mostre que a temperatura  $T$  é da ordem de

$$T \sim \frac{mc^2}{k_B} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^2$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda central da linha de absorção,  $m$  a massa da molécula,  $c$  a velocidade da luz e  $k_B$  a constante de Boltzmann.

Agora, utilizando os espectros fornecidos, meça as larguras das linhas de absorção de sódio citadas ( $\Delta\lambda_1$  e  $\Delta\lambda_2$ ), bem como seus comprimentos de ondas centrais ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ). Em seguida calcule a razão  $\Delta\lambda/\lambda$ , definida por

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \right)$$

A partir disso, obtenha as temperaturas correspondentes utilizando a relação do item anterior. A **Tabela 1** contém dados espectrais de 14 estrelas adicionais, além das 5 que você trabalhou nos itens anteriores.

- (b) **(15 pontos)** Preencha a Tabela 1 completamente, de forma adequada. Atente para as unidades utilizadas.
- (c) **(20 pontos)** Em papel milimetrado, plote um gráfico de temperatura ( $T$ ) *versus* distância ( $d$ ).
- (d) **(10 pontos)** Utilizando o método dos mínimos quadrados, encontre a reta de melhor ajuste aos pontos  $y = Ax + B$ , e trace-a no gráfico. Determine os seus coeficientes  $A$  e  $B$ .  
**Obs:** não é necessário estimar suas incertezas.
- (e) **(8 pontos)** O que a distribuição obtida no gráfico feito indica? Isso faz sentido dada a posição da Terra em nossa galáxia? Justifique.

Pense no que aconteceria se houvesse 2 nuvens de temperaturas bem diferentes entre nós e uma estrela. De acordo com a fórmula do item (a), nuvens mais quentes apresentam linhas de absorção mais largas, o que indica que apenas a nuvem mais quente seria detectável no espectro da estrela, visto que a nuvem mais fria geraria uma absorção mais estreita, a qual seria encoberta pela absorção da nuvem mais quente.

- (f) **(5 pontos)** Baseado na discussão acima, qual é o tipo de nuvem predominante no meio interestelar?

## 2. Microlentes Gravitacionais (85 pontos)

O OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment) é considerado uma das maiores contribuições da astronomia polonesa para a comunidade científica. Seu objetivo principal é o estudo de microlentes gravitacionais, que são eventos astronômicos nos quais a luz de uma fonte de fundo é desviada e amplificada pela gravidade de um objeto massivo à frente dela. Nessa questão, faremos uma análise simplificada de um dos ramos de pesquisa do projeto: a detecção, a partir do efeito de microlente, de objetos cuja emissão é insuficiente para observação direta. Sua tarefa é encontrar a massa do objeto.

**Fórmulas:** Durante um evento de microlente, o fluxo da fonte mostra um aumento transitório dado por:

$$\frac{F'_f}{F_f} = A = \frac{u^2 + 2}{u \cdot \sqrt{u^2 + 4}}$$

Em que  $F'_f$  é o fluxo da fonte de fundo amplificado pela microlente,  $F_f$  é o fluxo original da mesma fonte,  $A$  é chamada magnificação, e  $u$  é definido como:

$$u = \frac{\theta}{\theta_E}$$

Sendo  $\theta$  a distância angular entre os corpos e  $\theta_E$  o raio de Einstein, que, por sua vez, é definido como:

$$\theta_E = \frac{4GM}{a \cdot c^2} \cdot \pi_E$$

Sendo  $M$  a massa do corpo que provocará a microlente,  $a$  o semi-eixo maior da órbita terrestre, e  $\pi_E$  um parâmetro adimensional característico do sistema observador-lente-fonte, fornecido abaixo. Ao usar essa equação,  $\theta_E$  é encontrado em radianos.

### Dados:

- Movimento próprio relativo entre os corpos:  $\mu = 4,250$  mas/ano
- $\pi_E = 0,0894$
- Constante gravitacional universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>
- Massa do Sol:  $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg
- Semi-eixo maior da órbita terrestre:  $a = 1,50 \cdot 10^{11}$  m
- Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s
- Tabela com as medições fotométricas de um objeto de fundo, que se encontra ao fim da questão

- (a) **(9 pontos)** Seja  $u_0$  o valor de  $u$  na maior aproximação, mostre que, para  $u \ll 1$ :

$$\frac{1}{A^2} \approx \frac{\mu^2}{\theta_E^2} \cdot \Delta t^2 + u_0^2$$

- (b) **(10 pontos)** Faça uma tabela de  $1/A^2$  versus  $\Delta t^2$ .
- (c) **(20 pontos)** Plote o gráfico  $1/A^2$  versus  $\Delta t^2$  com os valores da tabela. Trace a reta que melhor se ajusta aos pontos.
- (d) **(16 pontos)** Determine os coeficientes de ajuste linear, bem como suas incertezas.
- (e) **(8 pontos)** A partir dos coeficientes de ajuste linear, determine a massa do objeto massivo, bem como sua incerteza.

- (f) **(2 pontos)** Nenhuma emissão de luz detectável foi observada proveniente do objeto massivo. Considerando esse fato e a sua resposta do item anterior, conclua qual o tipo de corpo celeste que provocou a microlente gravitacional.
- (g) **(20 pontos)** Ainda é necessário estudar a incerteza vinda da nossa aproximação. Estime o valor máximo de  $u$  para que  $1/A^2$  carregue um erro menor que 1 % quando calculado segundo a aproximação do primeiro item. A partir disso, estime o valor máximo de  $|\Delta t|$  para a mesma condição.

**Dica:** Considere que o erro venha majoritariamente da aproximação de  $1/A^2$  em função de  $u$ , ou seja, despreze o erro ao encontrar  $u$  em função de outros parâmetros.

Magnificação	$\Delta t$ (dias)
362,4	0,168
361,1	0,171
358,8	0,184
358,1	0,194
357,4	0,199
355,5	0,205
355,5	0,213
350,3	0,222
345,8	0,229
348,3	0,236
343,9	0,243
342,3	0,256
341,7	0,262
342,0	0,270
342,3	0,278
333,3	0,284
335,7	0,308
335,4	0,318
331,4	0,341
329,0	0,347
325,4	0,358
325,1	0,370
323,0	0,383
321,2	0,398
312,8	0,418

Tabela 1: Relação entre o intervalo de tempo  $\Delta t$  decorrido desde a máxima aproximação entre os corpos e a magnificação  $A$ . Dados adaptados do projeto OGLE.