

## **Instruções Gerais**

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. O título do arquivo deverá seguir a formatação: “ ‘Nº aluno’ - AD”. Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título “19 - AD”;
3. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
4. No canto superior esquerdo de TODAS as páginas informe: “Nº aluno - Q(Nº questão)”. Por exemplo, “19 - Q1”, e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, “p.1”;
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 250 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 100 pontos e Questão 2 com 150 pontos;
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a prova está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

## **Instruções Específicas**

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom;
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova;
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções;
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656,3 \text{ nm}$	

Tabela de Propagação de Erros

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para $\sigma_w$
$w = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$w = x^m$	$\sigma_w =  m x^{m-1}  \sigma_x$ ou $ \frac{\sigma_w}{w}  =  m \frac{\sigma_x}{x} $
$w = a x$	$\sigma_w =  a  \sigma_x$ ou $ \frac{\sigma_w}{w}  =  \frac{\sigma_x}{x} $
$w = a x + b$	$\sigma_w =  a  \sigma_x$
$w = a x y$	$\sigma_w^2 = (a y)^2 \sigma_x^2 + (a x)^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a \frac{x}{y}$	$\sigma_w^2 = (\frac{a}{y})^2 \sigma_x^2 + (\frac{a x}{y^2})^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a x^p y^q$	$\sigma_w^2 = (a p x^{p-1} y^q)^2 \sigma_x^2 + (a x^p q y^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (p \frac{\sigma_x}{x})^2 + (q \frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a \operatorname{sen} b x$	$\sigma_w =  a b \cos b x  \sigma_x$ ( $\sigma_x$ em radianos)
$w = b \log_a x$	$\sigma_w =  \frac{b}{\ln a}  \frac{\sigma_x}{x}$

Para o resultado  $w$  da seguinte função  $f$  de  $n$  variáveis, a fórmula geral é:

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta  $y = A + Bx$  são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$
$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2$$

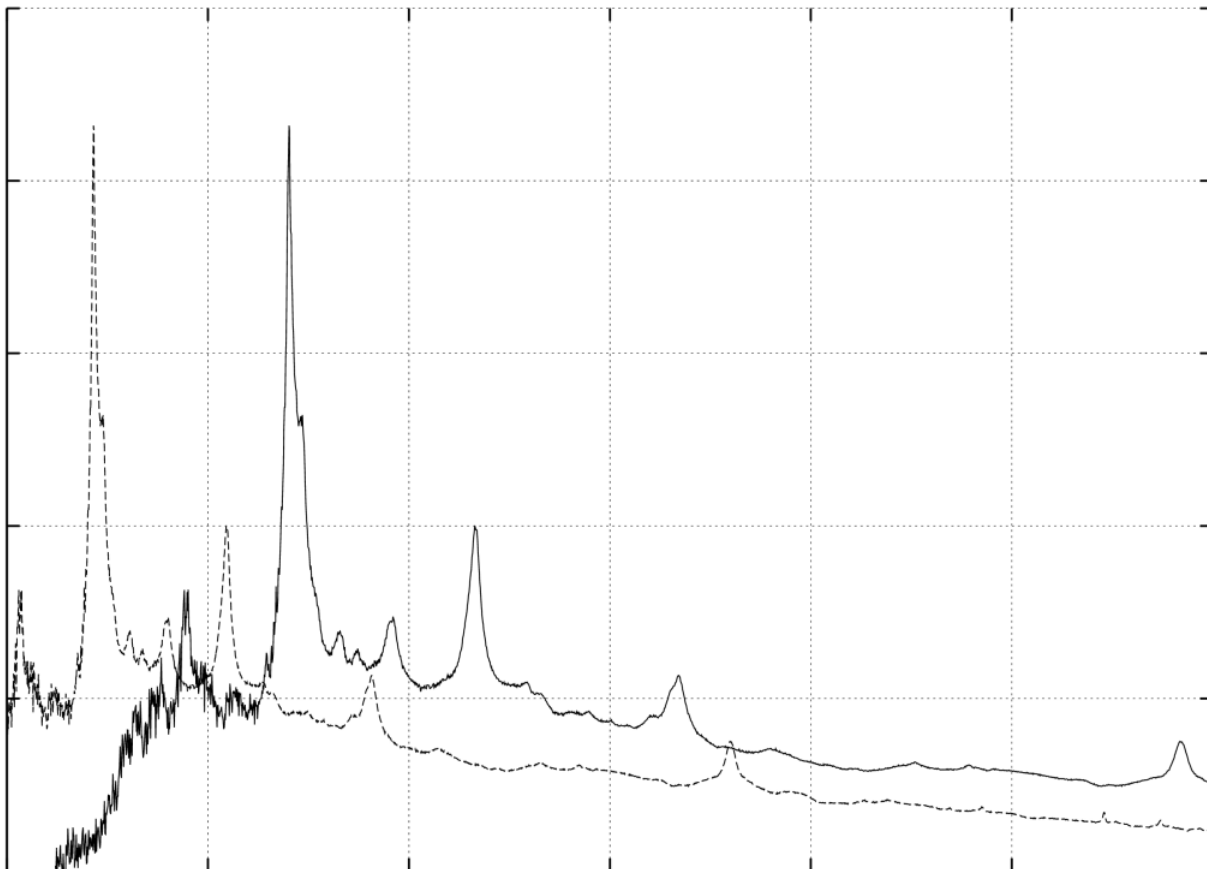
- As incertezas dos coeficiente são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$
$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Onde:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

1. **(Quasar - 100 pontos)** No gráfico abaixo, temos o espectro observado de um determinado quasar e também seu espectro “verdadeiro”, isto é, caso estivesse a uma pequena distância de nossa galáxia. Juvelino, por um engano no momento de fazer esse problema, infelizmente se esqueceu de colocar as escalas no gráfico. Mesmo assim, ele acredita no seu potencial e pede que você responda os itens abaixo



Sabe-se que a abcissa representa o comprimento de onda e cresce para a direita do gráfico. O quasar possui uma distância própria superior a  $100 \text{ Mpc}$  de nossa galáxia.

- (a) **(5 pontos)** Qual das curvas - tracejada ou padrão - representa o espectro observado do quasar?
- (b) **(20 pontos)** Calcule o redshift do quasar. Não é necessário estimar uma incerteza.

**Dica:** a origem das abcissas não é nula

Juvelino, curioso, quer também uma estimativa para a distância até o quasar. **Como seu redshift é alto, não podemos utilizar diretamente a lei de Hubble**, já que esta é uma útil aproximação apenas para objetos com redshift  $z \ll 1$ . Sendo assim, a distância própria até o quasar é melhor expressa pela expressão:

$$d_p = \frac{c}{H_0} z \left( 1 - \frac{1 + q_0}{2} z \right)$$

Onde  $H_0$  é a constante de Hubble e  $q_0$  é o parâmetro de desaceleração na idade atual do universo.

Juvelino, portanto, ainda precisa da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração para sua estimativa da distância. Para isso, ele possui os dados das distâncias própria e redshifts de 10 galáxias, como mostra a tabela abaixo:

Galáxia	Redshift ( $z$ )	Distância (Gpc)
1	0,156	0,640
2	0,360	1,41
3	0,440	1,61
4	0,526	1,98
5	0,582	2,18
6	0,615	2,18
7	0,679	2,49
8	0,740	2,59
9	0,868	2,91
10	1,05	3,46

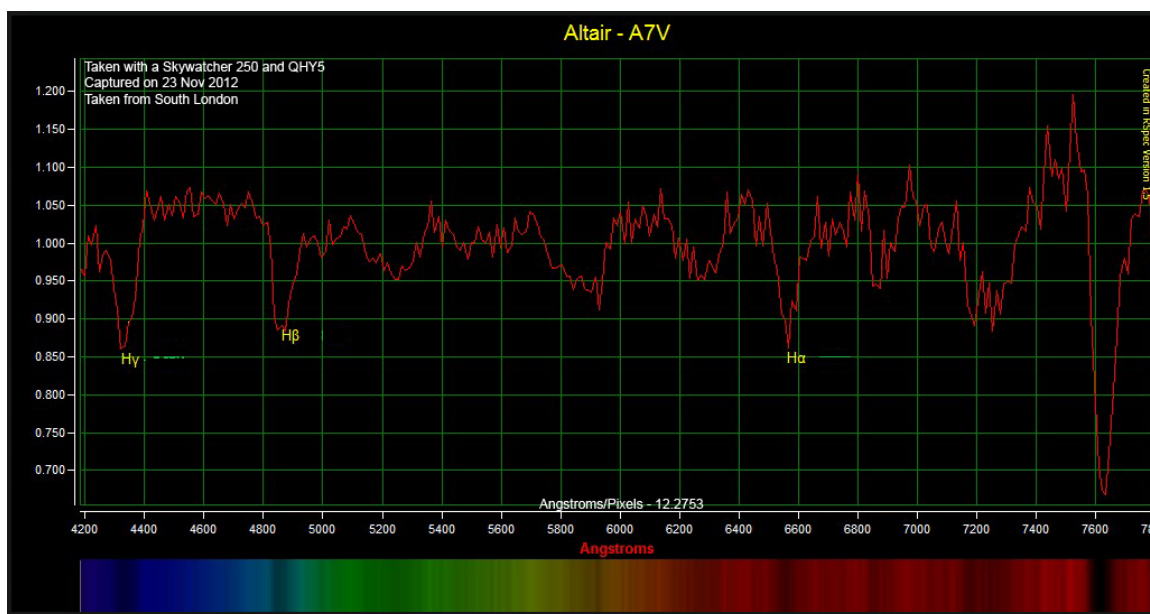
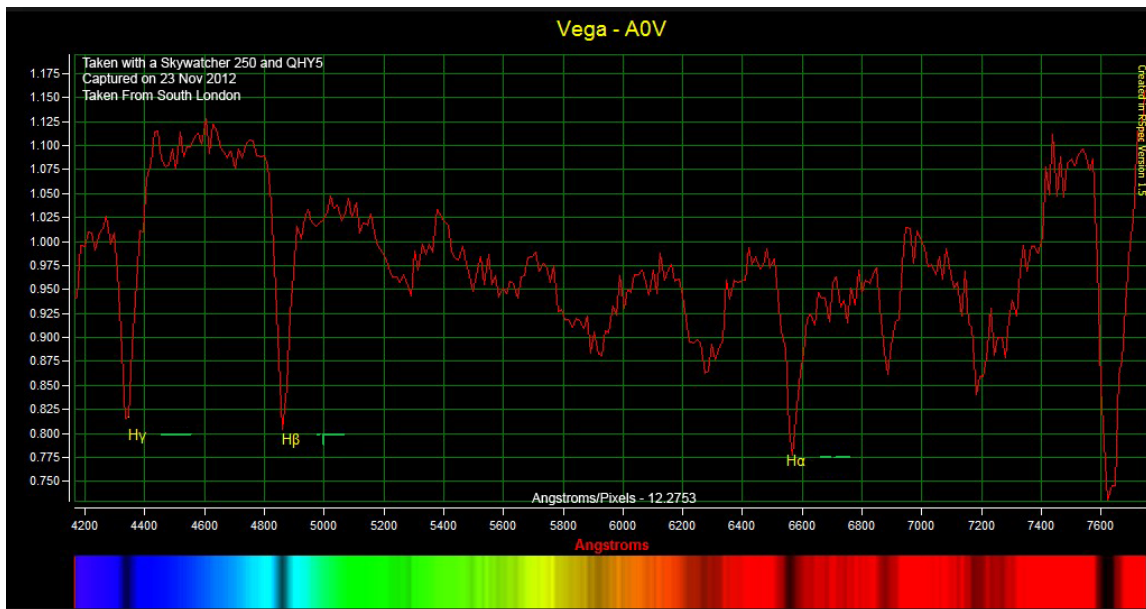
Ajude Juvelino fazendo os itens a seguir:

- (c) **(25 pontos)** Plote um gráfico (Distância)/ $z$  versus  $z$ . Faça, também, uma tabela indicando cada ponto utilizado para tal. Utilize as distância em *Gpc*.
- (d) **(15 pontos)** Dê a equação da reta que melhor se aproxima dos dados do seu gráfico utilizando o método dos mínimos quadrados e, após isso, indique as incertezas do coeficiente angular e do linear.
- (e) **(10 pontos)** Calcule o valor da constante de Hubble  $H_0$ , em *km/s/Mpc*, utilizando a reta do item anterior, assim como sua incerteza.
- (f) **(10 pontos)** Calcule o valor do parâmetro de desaceleração  $q_0$ , assim como sua incerteza.
- (g) **(15 pontos)** Determine a distância própria até o quasar, bem como sua incerteza.
2. **(Vega e Altair 2.0 - 150 pontos)** Poucas estrelas são tão traumatizantes quanto Vega e Altair. Desde uma questão na IOAA 2018, a equipe brasileira teme estes 2 corpos celestes que fizeram um estrago tão grande. Mas a equipe de 2021 é diferente! Muito corajosos, os alunos das competições de 2021 resolvem revisitar o problema de Vega e Altair para entendê-lo melhor. Agora, é sua vez de resolver aquela temida questão.

Estrela	Vega	Altair
Ascensão reta	18h 36m 56,51 s	19h 50m 47,79 s
Declinação	38° 47' 08,6"	8° 52' 14,3"
Paralaxe	130,23 mas	194,95 mas

- (a) **(5 pontos)** Qual a distância angular entre as duas estrelas?
- (b) **(5 pontos)** Qual a distância atual entre as 2 estrelas?

Como estas estrelas estão muito distantes de nós, o melhor método para descobrir suas velocidades radiais é por meio da espectroscopia. Abaixo, temos fotos dos espectros das 2 estrelas, tiradas a partir de South London ( $\phi = 51,5^\circ$  N e  $\lambda = 0,1^\circ$  O).



Os comprimentos de onda na linha  $H_{\alpha}$  das estrelas foram medidos por um mecanismo preciso, valendo  $6567\text{\AA}$  para Vega e  $6565\text{\AA}$  para Altair.

- (c) (6 pontos) Quais as velocidades radiais das estrelas?
- (d) (22 pontos) Abaixo temos uma tabela com as coordenadas de Vega e Altair para até 50 anos atrás. Usando esses dados, encontre o movimento próprio dessas estrelas.
- (e) (10 pontos) Calcule a velocidade total de cada uma das estrelas.
- (f) (30 pontos) Calcule a velocidade radial de Altair quando vista de Vega.
- (g) (20 pontos) Faça um esboço do gráfico da distância entre Vega e Altair ao quadrado ( $d^2$ ) em função do tempo ( $t$ ) considerando hoje como  $t = 0$ . Somente o formato da curva é importante, e não é necessário indicar valores específicos.

Coordenadas de Vega			Coordenadas de Altair		
Ano	Ascensão Reta	Declinação	Ano	Ascensão Reta	Declinação
2011	18h36m56,43s	38°47'5,0"	2011	19h50m47,41s	8°52'10,3"
2001	18h36m56,35s	38°47'1,6"	2001	19h50m47,04s	8°52'6,4"
1991	18h36m56,27s	38°46'58,2"	1991	19h50m46,67s	8°52'02,5"
1981	18h36m56,19s	38°46'54,8"	1981	19h50m46,30s	8°51'58,6"
1971	18h36m56,11s	38°46'51,4"	1971	19h50m45,93s	8°51'54,7"

- (h) **(35 pontos)** Calcule a magnitude de Vega vista de Altair e a magnitude de Altair vista de Vega. Um humano em cada estrela poderia enxergar a outra?

Despreze as atmosferas das 2 estrelas.

A tabela abaixo, com a magnitude de Altair em South London em função de sua altura pode ser útil para responder a pergunta. Para visualizar melhor a situação faça um gráfico relacionando as 2 colunas da tabela (ainda que você não use tais dados para encontrar sua resposta).

**Dica:** Nem sempre a melhor forma de relacionar dois conjuntos de valores é ver sua correlação direta. Como podemos simplificar nosso gráfico?

Altura	Magnitude
2° 31'	2,97
10° 33'	1,44
16° 17'	1,21
22° 41'	1,09
29° 52'	1,01
34° 41'	0,98
39° 21'	0,95
44° 29'	0,94

- (i) **(17 pontos)** Quando Altair ficará indetectável a olho nu para uma pessoa em Vega, e quando Vega ficará indetectável a olho nu para uma pessoa em Altair? Despreze as atmosferas das 2 estrelas e considere as velocidades das estrelas constantes.

**Note:** Não é necessário análise de erros nessa questão.