PROVA DE ANÁLISE DE DADOS

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2021

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único no formato PDF pelo Classroom da seletiva;
2. O título do arquivo deverá seguir a formatação: " 'Nº aluno' - AD". Por exemplo, se seu número é 19, envie o arquivo com título "19 - AD";
3. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
4. No canto superior esquerdo de TODAS as páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "19 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1";
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo extra para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 250 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 100 pontos e Questão 2 com 150 pontos;
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a prova está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom;
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova;
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções;
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente "Pulei a questão anterior".

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656,3\ nm$	

Tabela de Propagação de Erros

$w = w(x, y, \cdots)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y \pm \cdots$	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \cdots$
$w = x^m$	$\sigma_w = \mid m x^{m-1} \mid \sigma_x$ ou $\mid \frac{\sigma_w}{w} \mid = \mid m \frac{\sigma_x}{x} \mid$
$w = a\,x$	$\sigma_w = \mid a \mid \sigma_x$ ou $\mid \frac{\sigma_w}{w} \mid = \mid \frac{\sigma_x}{x} \mid$
$w = a\,x + b$	$\sigma_w = \mid a \mid \sigma_x$
$w = a\,x\,y$	$\sigma_w^2 = (ay)^2\,\sigma_x^2 + (ax)^2\,\sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a\,\frac{x}{y}$	$\sigma_w^2 = (\frac{a}{y})^2\,\sigma_x^2 + (\frac{ax}{y^2})^2\,\sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (\frac{\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a\,x^p\,y^q$	$\sigma_w^2 = (a\,p\,x^{p-1}\,y^q)^2\,\sigma_x^2 + (a\,x^p\,q\,y^{q-1})^2\,\sigma_y^2$ ou $(\frac{\sigma_w}{w})^2 = (p\,\frac{\sigma_x}{x})^2 + (q\,\frac{\sigma_y}{y})^2$
$w = a\ \mathrm{sen}\ b\,x$	$\sigma_w = \mid ab \cos bx \mid \sigma_x$ (σ_x em radianos)
$w = b\,\log_a x$	$\sigma_w = \mid \frac{b}{\ln a} \mid \frac{\sigma_x}{x}$

Para o resultado w da seguinte função f de n variáveis, a fórmula geral é:

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A+Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$
$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2$$

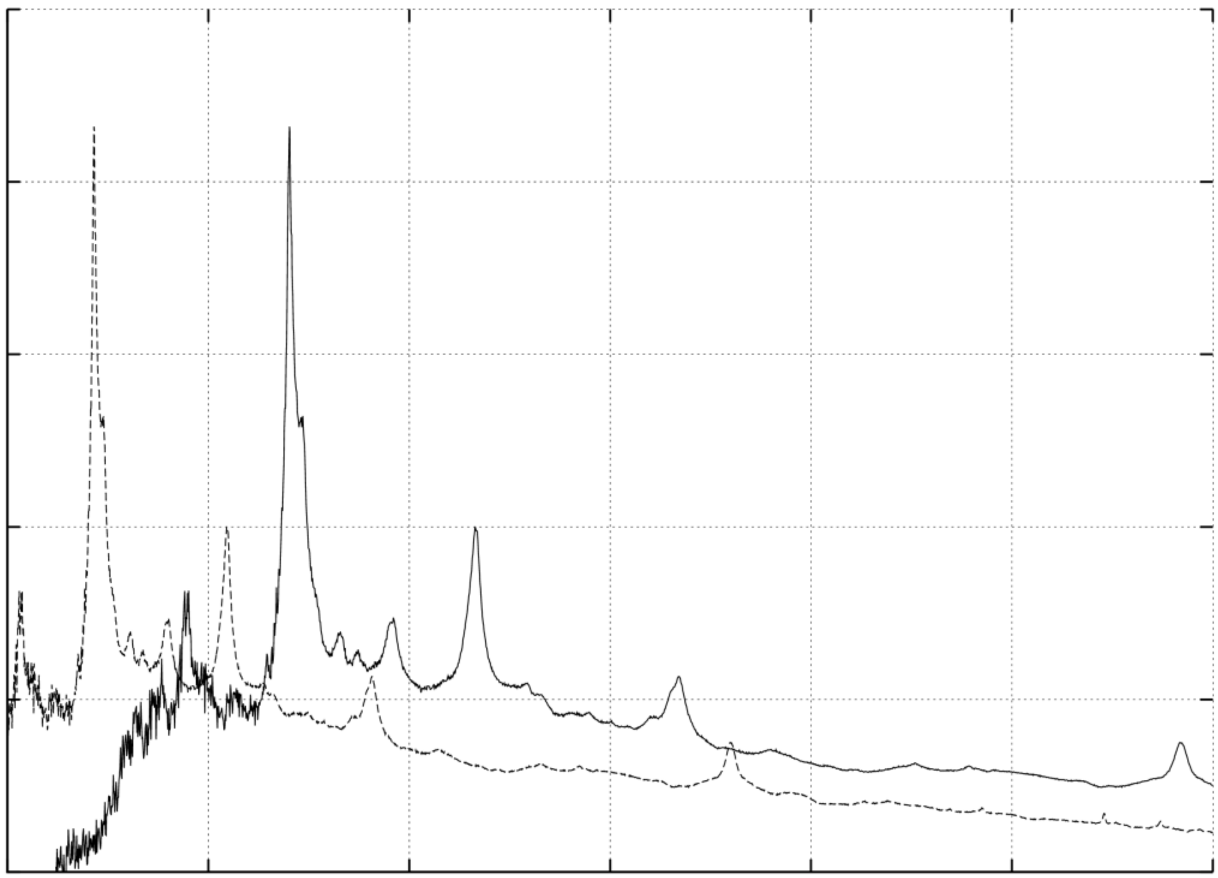
- As incertezas dos coeficientes sãos dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$
$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Onde:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}$$

1. **(Quasar - 100 pontos)** No gráfico abaixo, temos o espectro observado de um determinado quasar e também seu espectro "verdadeiro", isto é, caso estivesse a uma pequena distância de nossa galáxia. Juvelino, por um engano no momento de fazer esse problema, infelizmente se esqueceu de colocar as escalas no gráfico. Mesmo assim, ele acredita no seu potencial e pede que você responda os itens abaixo



Sabe-se que a abcissa representa o comprimento de onda e cresce para a direita do gráfico. O quasar possui uma distância própria superior a 100 Mpc de nossa galáxia.

(a) **(5 pontos)** Qual das curvas - tracejada ou padrão - representa o espectro observado do quasar?

(b) **(20 pontos)** Calcule o redshift do quasar. Não é necessário estimar uma incerteza.
Dica: a origem das abcissas não é nula

Juvelino, curioso, quer também uma estimativa para a distância até o quasar. **Como seu redshift é alto, não podemos utilizar diretamente a lei de Hubble**, já que esta é uma útil aproximação apenas para objetos com redshift $z \ll 1$. Sendo assim, a distância própria até o quasar é melhor expressa pela expressão:

$$d_p = \frac{c}{H_0} z \left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right)$$

Onde H_0 é a constante de Hubble e q_0 é o parâmetro de desaceleração na idade atual do universo.

Juvelino, portanto, ainda precisa da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração para sua estimativa da distância. Para isso, ele possui os dados das distâncias própria e redshifts de 10 galáxias, como mostra a tabela abaixo:

Galáxia	**Redshift (z)**	**Distância (Gpc)**
1	0,156	0,640
2	0,360	1,41
3	0,440	1,61
4	0,526	1,98
5	0,582	2,18
6	0,615	2,18
7	0,679	2,49
8	0,740	2,59
9	0,868	2,91
10	1,05	3,46

Ajude Juvelino fazendo os itens a seguir:

(c) **(25 pontos)** Plote um gráfico (Distância)/z *versus* z. Faça, também, uma tabela indicando cada ponto utilizado para tal. Utilize as distância em *Gpc*.

(d) **(15 pontos)** Dê a equação da reta que melhor se aproxima dos dados do seu gráfico utilizando o método dos mínimos quadrados e, após isso, indique as incertezas do coeficiente angular e do linear.

(e) **(10 pontos)** Calcule o valor da constante de Hubble H_0, em $km/s/Mpc$, utilizando a reta do item anterior, assim como sua incerteza.

(f) **(10 pontos)** Calcule o valor do parâmetro de desaceleração q_0, assim como sua incerteza.

(g) **(15 pontos)** Determine a distância própria até o quasar, bem como sua incerteza.

Solução:

(a) Como o quasar deve apresentar um redshift cosmológico, a curva mais adiantada deve apresentar o espectro observado. Portanto: $\boxed{\text{curva padrão}}$

(b) Primeiro, vamos escrever a expressão para o redshift para duas linhas de emissão genéricas:

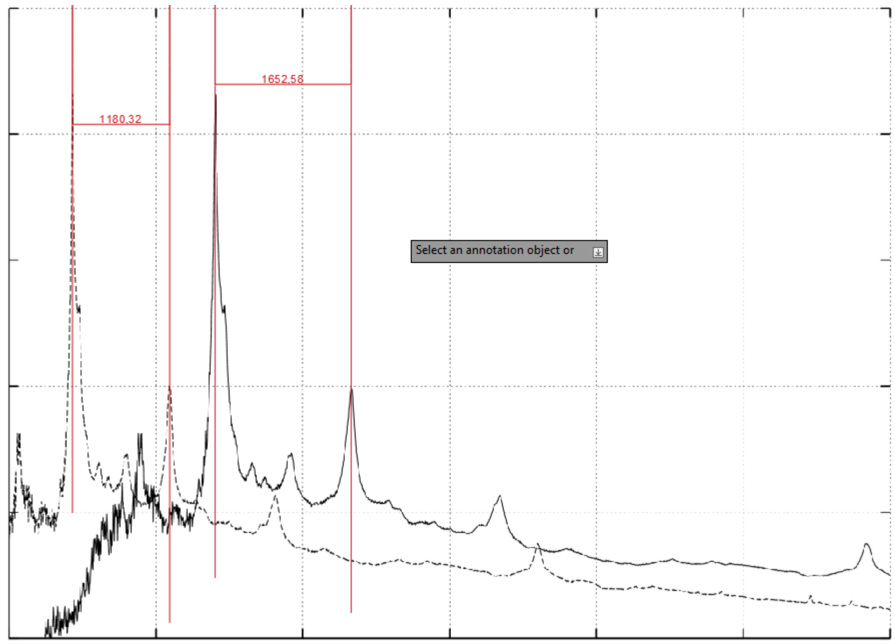
$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_{1,0}}{\lambda_{1,0}} \rightarrow \lambda_1 = (1+z)\lambda_{1,0}$$

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_{2,0}}{\lambda_{2,0}} \rightarrow \lambda_2 = (1+z)\lambda_{2,0}$$

Subtraindo ambas as equações:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = (z+1)(\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}) \rightarrow z = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0}} - 1$$

Vamos, então, efetuar a medida da distância entre duas linhas distintas para cada um dos espectros:

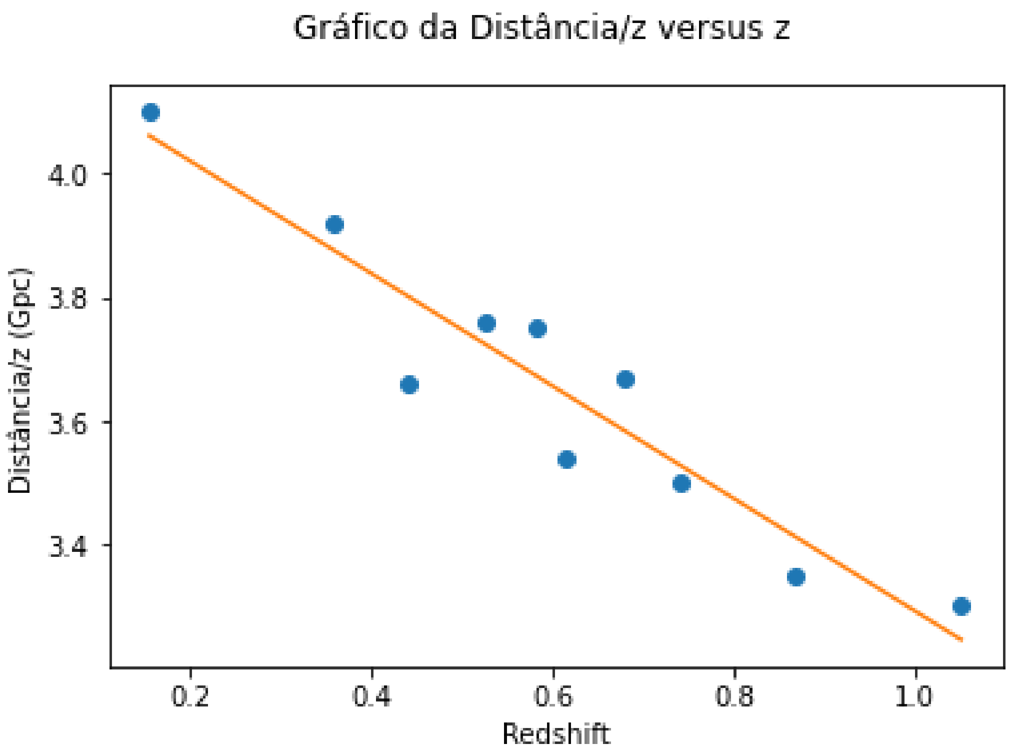


$$z = \frac{1652,58}{1180,32} - 1 = \boxed{0,40}$$

(c) Primeiramente, vamos construir a tabela:

Galáxia	**Redshift (z)**	**Distância/z**
1	0,156	4,10
2	0,360	3,92
3	0,440	3,66
4	0,526	3,76
5	0,582	3,75
6	0,615	3,54
7	0,679	3,67
8	0,740	3,50
9	0,868	3,35
10	1,05	3,30

Agora, basta plotar o gráfico representado por esses pontos:



(d) Pelo método dos mínimos quadrados:

$$a = \frac{N\sum x_i\ y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i\ y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Assim, encontramos:

$$\boxed{y = -0,913x + 4,20}$$

Agora, vamos encontrar a incerteza dos coeficientes, dada as seguintes fórmulas no formulário:

$$\delta a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Assim, encontramos $\delta b = 0,05$ e $\delta a = 0,03$, de modo que tenhamos:

Coeficiente angular: $\boxed{b = -0,9 \pm 0,1}$

Coeficiente angular: $\boxed{a = 4,20 \pm 0,07}$

(e) Para calcularmos a constante de Hubble H_0, basta percebermos que:

$$\frac{c}{H_0} = a \rightarrow H_0 = 71,4\ km/s/Mpc$$

Propagando a incerteza para H_0:

$$\delta H_0 = \sqrt{\left(\frac{c}{a^2}\right)^2 \cdot \delta a^2} \rightarrow \delta H_0 = 1,2 km/s/Mpc$$

Logo, teremos a seguinte resposta final:

$$\boxed{H_0 = (71,4 \pm 1,2)\ km/s/Mpc}$$

(f) Para o parâmetro de desaceleração, basta percebermos que:

$$-b = \frac{1+q_0}{2}\frac{c}{H_0} \rightarrow q = -(\frac{2bH_0}{c} + 1)$$

Efetuando as contas: $q_0 = -0,566$

Para a incerteza em q_0:

$$\delta q_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial q_0}{\partial H_0}\delta H_0\right)^2 + \left(\frac{\partial q_0}{\partial b}\delta b\right)^2}$$

$$\delta q_0 = \sqrt{\left(\frac{2b}{c}\delta H_0\right)^2 + \left(\frac{2H_0}{c}\delta b\right)^2}$$

Realizando as contas, encontramos o seguinte resultado final:

$$\boxed{q_0 = -0,57 \pm 0,05}$$

(g) Nesse item, basta substituir todos os valores encontrados nos itens anteriores para se encontrar a distância própria;

$$d_p = \frac{cz}{H_0} - \frac{cz^2}{2H_0} + \frac{cq_0z^2}{2H_0} \approx 1,54\ Gpc$$

Para a incerteza, basta usarmos a fórmula geral. Consideraremos a incerteza no redshift desprezível em relação as outras

$$\delta d_p = \sqrt{\left(\frac{\partial d_p}{\partial H_0}\delta H_0\right)^2 + \left(\frac{\partial d_p}{\partial q_0}\delta q_0\right)^2}$$

$$\delta d_p = \sqrt{\left(\frac{cz - cz^2 + cq_0z^2}{H_0^2}\delta H_0\right)^2 + \left(\frac{cz^2}{2H_0}\delta q_0\right)^2} \rightarrow \delta d_p \approx 31\ Mpc$$

Logo, a expressão final pode ser expressa por:

$$\boxed{d_p = (1,54 \pm 0,03)\ Gpc}$$

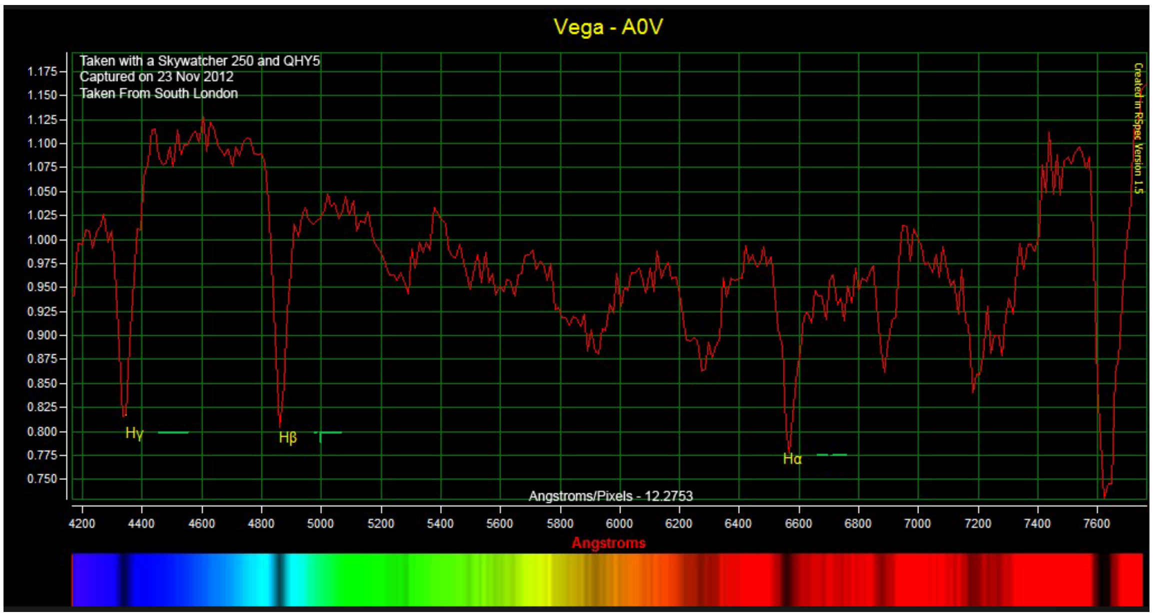
2. **(Vega e Altair 2.0 - 150 pontos)** Poucas estrelas são tão traumatizantes quanto Vega e Altair. Desde uma questão na IOAA 2018, a equipe brasileira teme estes 2 corpos celestes que fizeram um estrago tão grande. Mas a equipe de 2021 é diferente! Muito corajosos, os alunos das competições de 2021 resolvem revisitar o problema de Vega e Altair para entendê-lo melhor. Agora, é sua vez de resolver aquela temida questão.

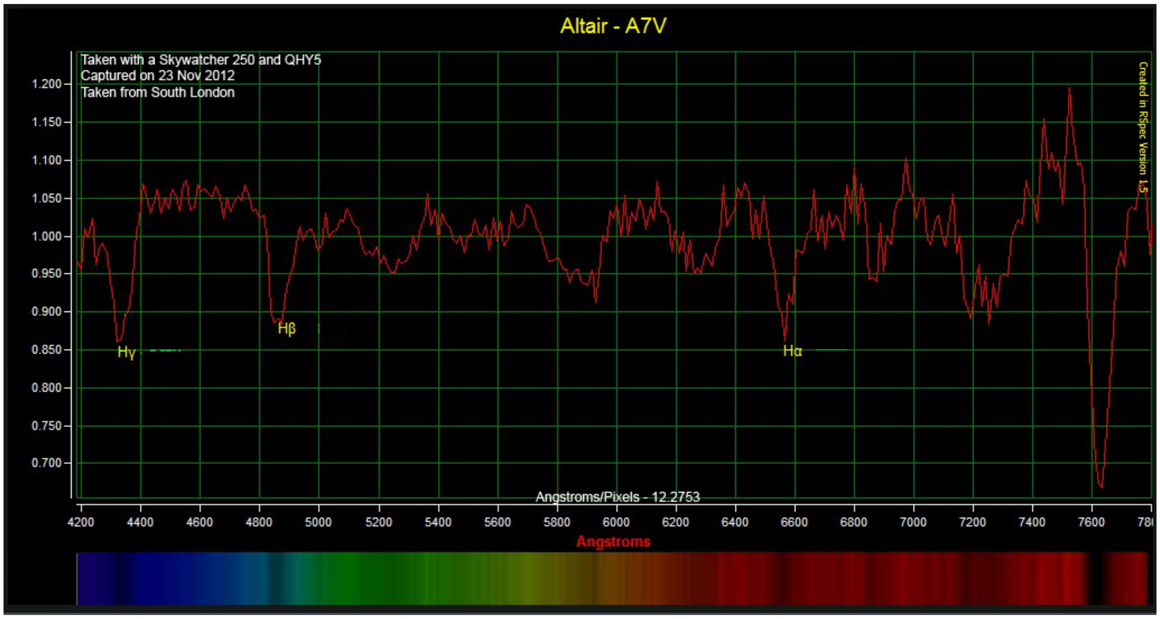
Estrela	Vega	Altair
Ascensão reta	18h 36m $56,51$ s	19h 50m $47,79$ s
Declinação	$38°$ 47' 08, 6"	$8°$ 52' 14, 3"
Paralaxe	$130,23$ mas	$194,95$ mas

(a) **(5 pontos)** Qual a distância angular entre as duas estrelas?

(b) **(5 pontos)** Qual a distância atual entre as 2 estrelas?

Como estas estrelas estão muito distantes de nós, o melhor método para descobrir suas velocidades radiais é por meio da espectroscopia. Abaixo, temos fotos dos espectros das 2 estrelas, tiradas a partir de South London ($\phi = 51,5°$ N e $\lambda = 0,1°$ O).





Os comprimentos de onda na linha H_α das estrelas foram medidos por um mecanismo preciso, valendo 6567 para Vega e 6565 para Altair.

(c) **(6 pontos)** Quais as velocidades radiais das estrelas?

(d) **(22 pontos)** Abaixo temos uma tabela com as coordenadas de Vega e Altair para até 50 anos atrás. Usando esses dados, encontre o movimento próprio dessas estrelas.

Coordenadas de Vega			Coordenadas de Altair		
Ano	Ascenção Reta	Declinação	Ano	Ascenção Reta	Declinação
2011	18h36m56,43s	38°47'5,0"	2011	19h50m47,41s	8°52'10,3"
2001	18h36m56,35s	38°47'1,6"	2001	19h50m47,04s	8°52'6,4"
1991	18h36m56,27s	38°46'58,2"	1991	19h50m46,67s	8°52'02,5"
1981	18h36m56,19s	38°46'54,8"	1981	19h50m46,30s	8°51'58,6"
1971	18h36m56,11s	38°46'51,4"	1971	19h50m45,93s	8°51'54,7"

(e) **(10 pontos)** Calcule a velocidade total de cada uma das estrelas.

(f) **(30 pontos)** Calcule a velocidade radial de Altair quando vista de Vega.

(g) **(20 pontos)** Faça um esboço do gráfico da distância entre Vega e Altair ao quadrado (d^2) em função do tempo (t) considerando hoje como $t = 0$. Somente o formato da curva é importante, e não é necessário indicar valores específicos.

(h) **(35 pontos)** Calcule a magnitude de Vega vista de Altair e a magnitude de Altair vista de Vega. Um humano em cada estrela poderia enxergar a outra?
Despreze as atmosferas das 2 estrelas.
A tabela abaixo, com a magnitude de Altair em South London em função de sua altura pode ser útil para responder a pergunta. Para visualizar melhor a situação faça um gráfico relacionando as 2 colunas da tabela (ainda que você não use tais dados para encontrar sua resposta).
Dica: Nem sempre a melhor forma de relacionar dois conjuntos de valores é ver sua correlação direta. Como podemos simplificar nosso gráfico?

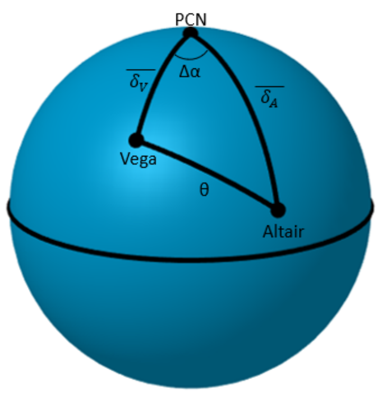
Altura	Magnitude
2° 31'	2,97
10° 33'	1,44
16° 17'	1,21
22° 41'	1,09
29° 52'	1,01
34° 41'	0,98
39° 21'	0,95
44° 29'	0,94

(i) **(17 pontos)** Quando Altair ficará indetectável a olho nu para uma pessoa em Vega, e quando Vega ficará indetectável a olho nu para uma pessoa em Altair? Despreze as atmosferas das 2 estrelas e considere as velocidades das estrelas constantes.

Note: Não é necessário análise de erros nessa questão.

Solução:

(a) Para descobrir a distância angular entre as estrelas precisamos primeiramente esquematizar a situação.



Assim, utilizando a lei dos cossenos temos o seguinte:

$$\cos\theta = \sin\delta_V \sin\delta_A + \cos\delta_V \cos\delta_A \cos\Delta\alpha$$

Logo:

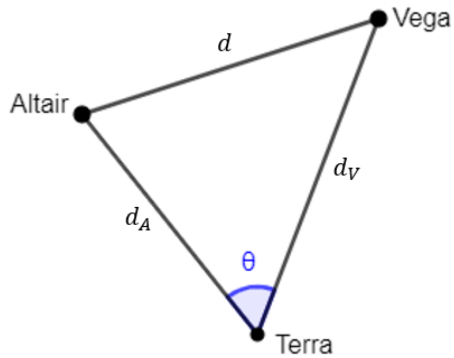
$$\boxed{\theta = 34°11'44,62"}$$

(b) Utilizando as paralaxes podemos encontrar as distâncias de ambas as estrelas à Terra:

$$d_V = \frac{1}{\pi_V} = 7,68 \text{ pc}$$

$$d_A = \frac{1}{\pi_A} = 5,13 \text{ pc}$$

Esquematizando:



Assim, a distância d é simplesmente:

$$d^2 = d_V^2 + d_A^2 - 2\ d_A\ d_V \cos\theta$$

$$\boxed{d = 4,49\text{pc}}$$

(c) Primeiro precisamos medir o comprimento de onda da linha $H\alpha$ nos 2 espectros, do que se obtém:

$$\lambda_V = 6567 \quad \text{e} \quad \lambda_A = 6565$$

Basta então utilizar o Efeito Doppler não-relativístico para se obter as velocidades radiais:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

$$\boxed{v_{rV} = 182,8 \text{ km/s} \quad \text{e} \quad v_{rA} = 91,42 \text{ km/s}}$$

(d) Existem diversas formas de resolver este item, então abordaremos o mais clássico: o método de regressão linear. Em síntese, para achar a equação linear que se adequa ao conjunto de dados calculamos:

$$a = \frac{N \sum x_i\ y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i\ y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Onde N é o número de pares de dados, neste caso 6, a é o coeficiente angular da reta e b seu coeficiente linear.

Para encontrar tais retas vamos utilizar os dados das variações de coordenadas (diferença entre uma coordenada de uma data qualquer e das coordenadas de 1971).

Para Vega obtemos:

$$\Delta\delta_V = 0,34\text{"}\,\Delta t - 0,04\text{"}$$

$$\Delta\alpha_V = 0,12\text{"}\,\Delta t$$

E para Altair:

$$\Delta\delta_A = 0,39\text{"}\,\Delta t - 0,02\text{"}$$

$$\Delta\alpha_A = 0,56\text{"}\Delta t$$

A partir disso podemos achar os movimentos próprios em ascensão reta e declinação das duas estrelas. Para a declinação, basta usar o coeficiente angular das retas. Deste modo:

$$\mu_{\delta V} = 0,34\text{"}/\text{ano} \quad \text{e} \quad \mu_{\delta A} = 0,39\text{"}/\text{ano}$$

Para as ascensões retas não basta utilizar apenas os coeficientes angulares! Como as estrelas não se movem em círculos máximos utilizamos o fator $\cos\delta$ para corrigir tais valores. Como neste caso a variação de declinação é muito pequena podemos utilizar qualquer valor das tabelas. Para esta resolução usaremos os valores de 1991 por serem intermediários. Assim:

$$\mu_\alpha = a\cos\delta_{1991}$$

O que nos leva aos seguintes resultados:

$$\mu_{\alpha V} = 0,09\text{"}/\text{ano} \quad \text{e} \quad \mu_{\alpha A} = 0,55\text{"}/\text{ano}$$

Por fim, para descobrir o movimento próprio total de cada estrela basta executar uma composição dos valores nas 2 coordenadas:

$$\mu^2 = \mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2$$

Desta forma:

$$\boxed{\mu_V = 0,35\text{"}/\text{ano} \quad \text{e} \quad \mu_A = 0,67\text{"}/\text{ano}}$$

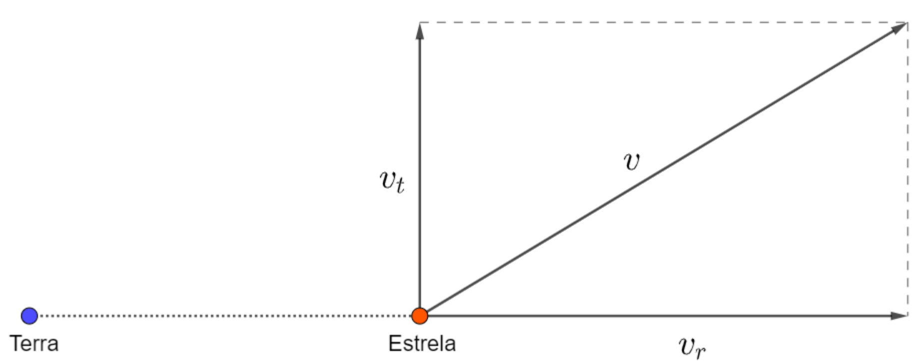
(e) Com os movimentos próprios das estrelas, podemos obter as velocidades tangenciais delas pela equação $v = \omega r$. Adaptando para a nossa situação:

$$\mu d = v_t$$

Assim, substituindo para as duas estrelas, conseguimos

$$v_{tV} = 13\text{km/s} \quad \text{e} \quad v_{tA} = 16\text{km/s}$$

para Vega e Altair, respectivamente.
Com as componentes radial e tangencial das velocidades das estrelas, podemos obter a velocidade total v pelo teorema de Pitágoras (Veja a figura abaixo):



$$v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2}$$

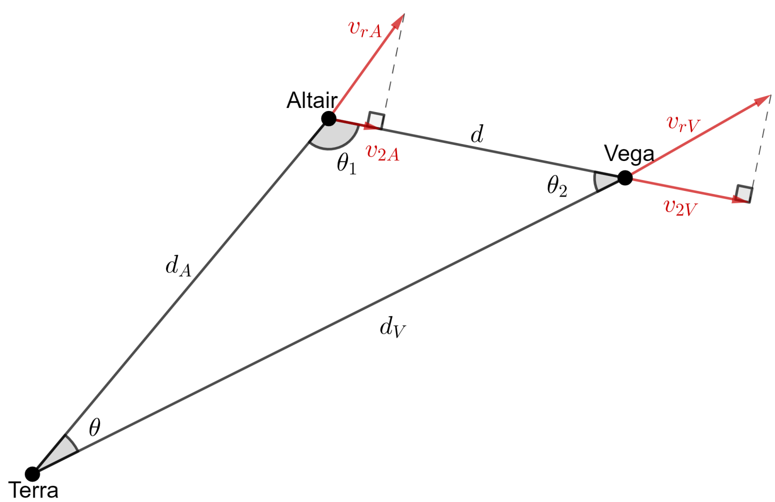
Aplicando a equação para Vega e Altair, temos o resultado final:

$$\boxed{v_V = 180\text{km/s} \quad \text{e} \quad v_A = 93\text{km/s}}$$

(f) O item pede a velocidade relativa radial entre Vega e Altair, isso é, a componente da velocidade relativa na direção da reta que liga as duas estrelas.

Vamos resolver em etapas. Primeiro, dividiremos a velocidade em duas componentes: uma tangencial (1) e outra radial (2) em relação à Terra.

Podemos calcular a parte da velocidade relativa radial entre Vega e Altair de cada uma das componentes, e depois adicionar todas elas para obtermos o total. Começaremos pelo eixo mais simples, o radial. Esquematizando:



Podemos calcular os ângulos θ_1 com a lei dos senos:

$$\frac{d_V}{\sin\theta_1} = \frac{d}{\sin\theta}$$

Assim, $\theta_1 = 105°45'$. Com isso, podemos calcular θ_2 por:

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 = 180°$$

Portanto, $\theta_2 = 40°03'$.

Com isso, podemos descobrir v_{2V} e v_{2A} decompondo v_{rA} e v_{rV}:

$$v_{2A} = v_{rA}\cos(180° - \theta_1) = 24{,}8\text{km/s}$$

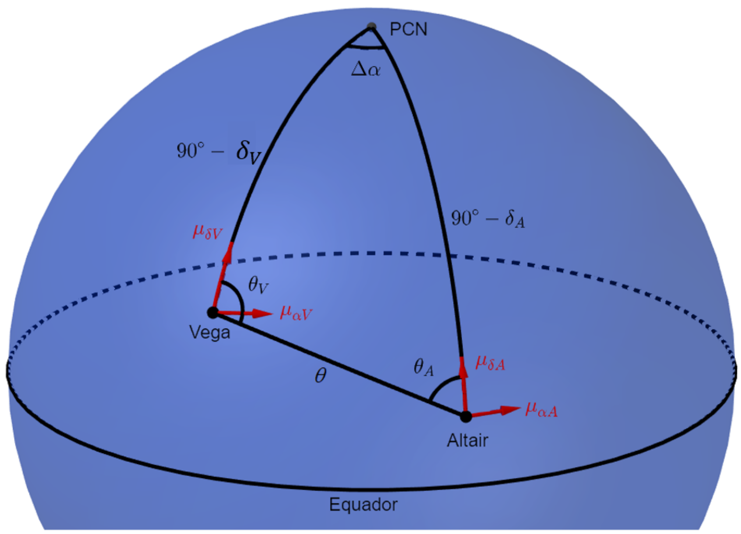
$$v_{2V} = v_{rV}\cos\theta_2 = 70{,}0\text{km/s}$$

Combinando isso, descobrimos a parte da velocidade relativa radial entre as estrelas causada pelas velocidades radiais em relação à Terra:

$$v_2 = v_{2V} - v_{2A}$$

Com isso, $v_2 = 45,2$km/s no sentido de afastamento.

Agora, calcularemos a partes causada pela velocidade tangencial, nas direções da ascensão reta e da declinação. Esquematizando as direções envolvidas na figura:



Primeiro calcularemos a componente da velocidade tangencial na direção da linha entre Altair e Vega no triângulo esférico para cada estrela, para depois decompormos na direção adequada, contando a diferença entre as distâncias até Vega e Altair. Para isso, temos que descobrir os ângulos θ_A e θ_V. Usando a lei dos cossenos:

$$\sin\delta_V = \sin\delta_A \cos\theta + \cos\delta_A \sin\theta \cos\theta_A$$

$$\sin\delta_A = \sin\delta_V \cos\theta + \cos\delta_V \sin\theta \cos\theta_V$$

Com essas equações, conseguimos $\theta_A = 26°03'$ e $\theta_V = 146°10'$.

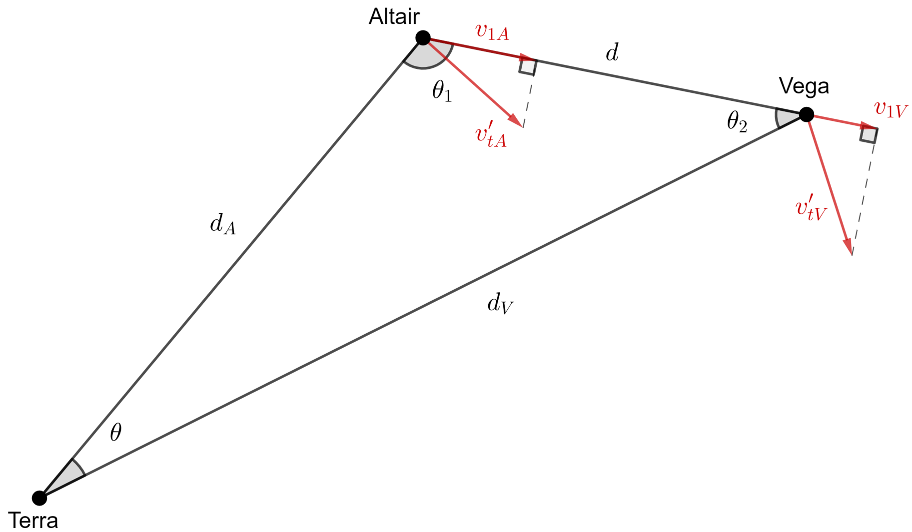
Chamaremos de v'_{tV} e v'_{tA} as velocidades na direção do arco Altair-Vega, mas não convertidas usando as distâncias diferentes. Calculando essas componentes:

$$v'_{tV} = -v_{\alpha V}\cos(\theta_V - 90°) - v_{\delta V}\cos\theta_V$$

$$v'_{tA} = -v_{\alpha A}\cos(90° - \theta_A) + v_{\delta A}\cos\theta_A$$

onde $v_\alpha = \mu_\alpha d$ e $v_\delta = \mu_\delta d$. Substituindo, $v'_{tV} = 8,5$km/s e $v'_{tA} = 2,6$km/s.

Teremos também que levar em conta a diferença entre as distâncias até as estrelas. Fazendo uma figura:



$$v_{1V} = v'_{tV} \sin\theta_2$$

$$v_{1A} = v'_{tA} \cos\theta_1$$

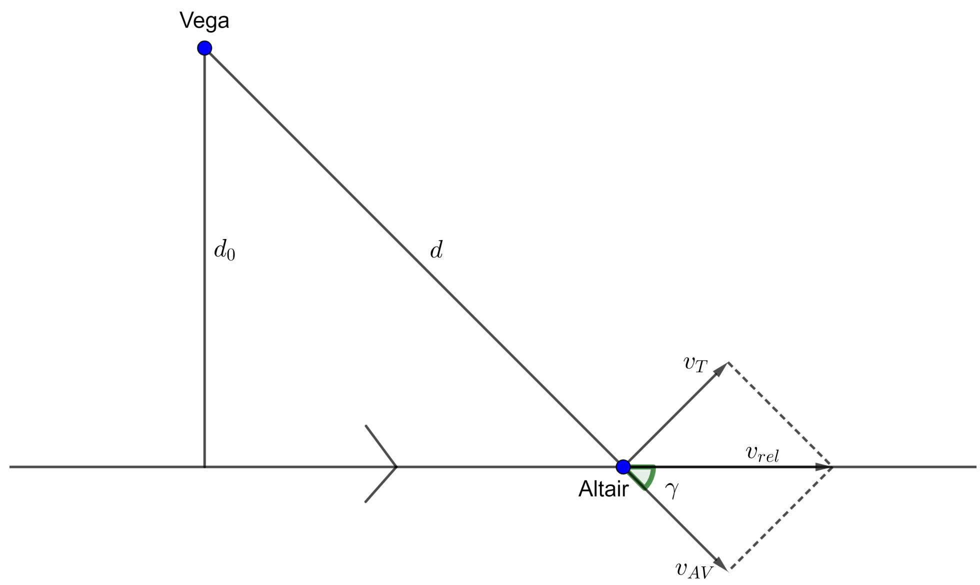
Portanto, $v_{1V} = 5,5\text{km/s}$ e $v_{1A} = -0,71\text{km/s}$. Combinando,

$$v_1 = v_{1V} - v_{1A} \Rightarrow v_1 = 6,2\text{km/s}$$

Finalmente, combinando com a parte da velocidade radial:

$$v_{AV} = v_1 + v_2 = \boxed{51\text{km/s}}$$

(g) Vamos revisar a situação das velocidades relativas de Vega e Altair, no referencial de Vega:



Assumiremos trajetórias retilíneas. Altair tem uma velocidade relativa total v_{rel} em relação a Vega, com componente radial v_{AV} e a componente tangencial v_T. A estrela passou em algum momento por uma distância mínima de Vega (d_0) e agora está no sentido de afastamento por um longo tempo. v_T pode ser calculado pelo mesmo método de v_{AV} no item anterior, dessa vez somando as componentes perpendiculares à linha entre as estrelas em vez das paralelas. Isso resulta em $v_T = 92$ km/s. Com esse valor, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para descobrir v_{rel}:

$$v_{rel} = \sqrt{v_{AV}^2 + v_T^2} = 105 \text{ km/s}$$

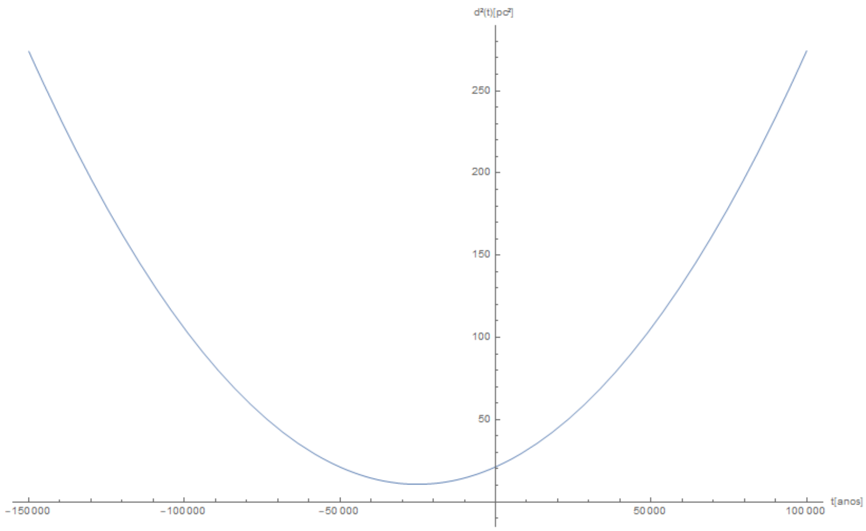
Pelo ângulo comum γ, conseguimos d_0:

$$\sin\gamma = \frac{d_0}{d} = \frac{v_T}{v_{rel}} \Rightarrow d_0 = 3,92 \text{ pc}$$

Juntando esses dois resultados e fazendo um novo Pitágoras, conseguimos uma expressão da distância ao quadrado em função do tempo:

$$d^2(t) = d_0^2 + (d(0)\cos\gamma + v_{rel}t)^2$$

Onde renomeamos $d(0)$ como a distância atual entre Vega e Altair e $\cos\gamma = v_{AV}/v_{rel}$. Note que a equação é uma parábola. Fazendo o plot:



Os valores dos coeficientes não foram cobrados nesse item, e serão usados somente nos itens posteriores.

(h) Primeiramente precisamos descobrir a magnitude de Altair sem a influência da atmosfera terrestre, afinal os observadores em Vega e Altair enxergarão as estrelas sem a influência de uma atmosfera. Manipulando a fórmula das magnitudes utilizando a extinção atmosférica temos:

$$m_A - m = -2,5\log(e^{-\tau\sec z})$$

$$m_A - m = 2,5\ \tau\sec z\log e$$

Disso:

$$m_A = m + 2,5\ \tau\sec z\log e$$

Como m_A é da forma ax+b, podemos descobrir o valor de m a partir de uma regressão linear que relaciona m_a e $\sec z$. Utilizando os 8 pontos da tabela e fazendo uma regressão linear na calculadora científica, achamos que m = 0,81 (lembre-se que m é o coeficiente linear da reta achada na calculadora).
Essa é também a relação a ser plotada no gráfico, que deve se parecer com o seguinte:

Podemos então calcular o pedido pela questão:
A magnitude de Vega foi usada como base para o sistema de magnitudes, sendo ela 0. Assim, sabendo que a distância entre Altair e Vega é $d = 4,49$ pc, podemos calcular as magnitudes $m_{V/A}$ e $m_{A/V}$ vistas de Altair e Vega, respectivamente:

$$m_{V/A} - 0 = -2,5\log\frac{L_V/d^2}{L_V/d_V^2} \Rightarrow \boxed{m_{V/A} = -1,17}$$

$$m_{A/V} - 0,81 = -2,5\log\frac{L_A/d^2}{L_A/d_A^2} \Rightarrow \boxed{m_{A/V} = 0,52}$$

Como as duas magnitudes são menores que 6, um humano em uma estrela poderia enxergar a outra.

(i) A magnitude de Vega vista de Altair em função do tempo é:

$$\begin{aligned} m_{V/A}(t) - m_{V/A}(0) &= -2,5\log\left(\frac{d^2(0)}{d^2(t)}\right) \\ &= 2,5\log\left(\frac{d_0^2 + (d(0)\cos\gamma + v_{rel}t)^2}{d^2(0)}\right) \end{aligned}$$

A estrela deixará de ser visível quando $m_{V/A} = 6$. Logo:

$$6 - m_{V/A}(0) = 2,5\log\left(\frac{d_0^2 + (d(0)\cos\gamma + v_{rel}t)^2}{d^2(0)}\right)$$

Substituindo valores, $t = 3,02 \times 10^{13}$s. Portanto, Vega será invisível de Altair após 960 mil anos.

Analogamente para Altair, podemos substituir $m_{V/A}$ por $m_{A/V}$. Assim, conseguimos que Altair será invisível de Vega após 410 mil anos.