**ANÁLISE DE DADOS**

**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS**

**OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2024**

# Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco"e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 2 horas;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

# Formulário

- Para uma função real $y(x)$ cuja taxa de variação é diretamente proporcional ao valor da função, é válido que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \cdot y \rightarrow y = y(0) \cdot e^{\alpha x}$$

- Podemos reescrever $(1+x)^n$ como um polinômio de grau tendendo ao infinito:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \cdots$$

Se desprezarmos os termos de ordem superior em $x$, obtemos:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

- Podemos reescrever $e^x$ como um polinômio de grau tendendo ao infinito:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Se desprezarmos os termos de ordem superior em $x$, obtemos:

$$e^x \approx 1 + x$$

- O desvio padrão de uma amostra de dados $x_i$ é calculado da seguinte forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Em que $\bar{x}$ é o valor médio (média aritmética simples) da amostra, e $N$ o tamanho do conjunto amostral.

- As seguintes constantes físicas podem vir a serem úteis:

Constante da gravitação universal: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

Velocidade da luz no vácuo: $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Massa solar: $M_{\odot} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$

Parsec: $1\,\mathrm{pc} = 3{,}09 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$

1. **LIGO (60 pontos)** Praticamente todos os modelos de evolução estelar preveem que a densidade numérica de buracos negros (e, por conseguinte, também de binários formados por buracos negros) por unidade de volume diminui drasticamente com o aumento da massa dos buracos negros. As observações feitas pelo Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser (LIGO) confirmam essa hipótese. Quando plotamos os dados inferidos pelo LIGO sobre a frequência de colisões de sistemas binários de buracos negros por Gpc$^3$ por ano, percebemos que conforme a massa aumenta, o número de colisões diminui drasticamente.

   Porém, quando olhamos a lista de colisões encontradas pelo LIGO em maio, percebemos que a grande maioria delas está relacionada a buracos negros massivos. Aparentemente, a lista corresponde ao que esperamos que não ocorra. Nessa questão, mostraremos com alguns cálculos simples que o nosso detector tende a detectar eventos de colisão entre buracos negros mais massivos, ou seja, ele é naturalmente enviesado. Para esse propósito, consideramos três tipos de buracos negros. Suas informações são dadas na tabela abaixo.

| $m_1$, $m_2$ ($M_\odot$) | $f_{max}$ (Hz) | Número de colisões por unidade de volume por ano (Gpc$^{-3}$ano$^{-1}$) |
|---|---|---|
| 5 | 1000 | 20 |
| 25 | 200 | 0,4 |
| 75 | 60 | 0,006 |

   Nesta tabela, estão apresentados a massa dos dois membros do binário (supostas iguais), a **frequência orbital** máxima perto do momento de colisão e a densidade numérica de colisões por unidade de volume por ano. Assuma que essa densidade não se altera ao longo do tempo, isto é, ignore a expansão cosmológica. Além disso, por simplicidade, assuma que o plano orbital de todos os buracos negros é perpendicular à nossa linha de visada. Abaixo encontra-se a relação entre o tamanho da onda gravitacional (deformação ou "strain") e o tempo de observação em termos da **frequência da onda** $f_{gw}$, das massas $m_1$ e $m_2$, e da distância $r$ do observador até o binário:

$$h(f_{gw}, M_c, r) = \frac{4}{r}\left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}}{c}\right)^{2/3}\cos\left(2\pi f_{gw} t + \varphi\right)$$

   Onde

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

   A tabela a seguir também mostra a sensibilidade do detector LIGO correspondente às três frequências orbitais $f_{max}$ da tabela anterior (note que $f_{max}$ não é necessariamente igual à frequência da onda gravitacional):

| $f_{max}$ (Hz) | Sensibilidade do LIGO |
|---|---|
| 1000 | $10^{-23}$ |
| 200 | $10^{-23,8}$ |
| 60 | $10^{-23,6}$ |

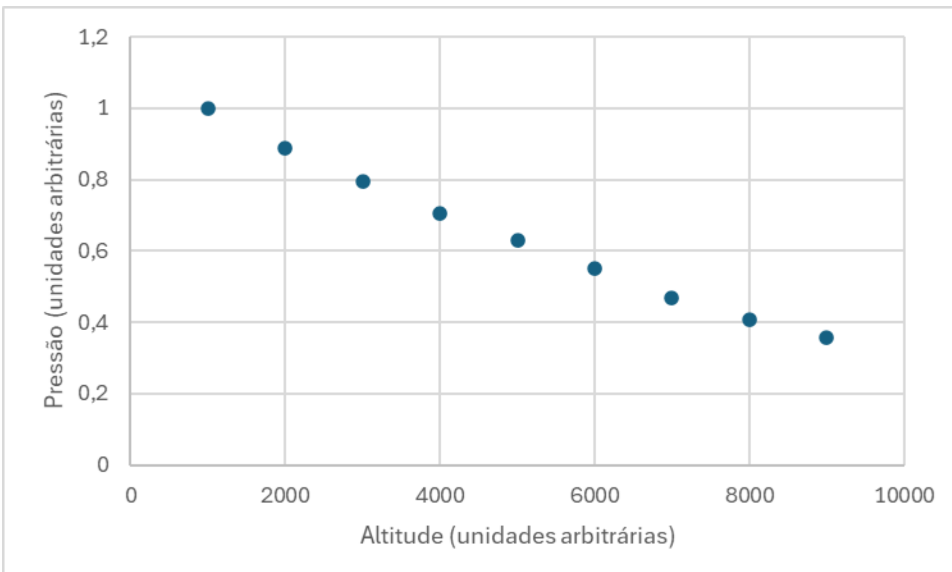
   Sabemos que o detector só registra ondas cuja amplitude excede a sensibilidade do aparelho nessa frequência.

   (a) **(50 pontos)** Calcule quantas colisões o detector LIGO registra de cada um dos tipos de buracos negros por ano.

   (b) **(10 pontos)** Argumente por que o detector tende a detectar colisões de buracos negros mais massivos, mas somente até um certo limite.

2. **Atmosfera planetária (90 pontos)** Em um planeta muito, muito distante, um grupo de estudantes de engenharia executou a missão FiboSat, que consistiu no lançamento de um minissatélite por balão, a fim de estudar as propriedades atmosféricas de seu planeta. Seguem alguns dos dados coletados, em unidades arbitrárias:

| **i** | **r** | **P** | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | $P_1$ | 1 |
| 2 | 2000 | $P_2$ | 0,889 |
| 3 | 3000 | $P_3$ | 0,796 |
| 4 | 4000 | $P_4$ | 0,704 |
| 5 | 5000 | $P_5$ | 0,629 |
| 6 | 6000 | $P_6$ | 0,553 |
| 7 | 7000 | $P_7$ | 0,469 |
| 8 | 8000 | $P_8$ | 0,409 |
| 9 | 9000 | $P_9$ | 0,357 |




Considere os dois modelos de atmosfera a seguir. Em ambos, o núcleo é considerado grande o suficiente para criar uma gravidade constante na atmosfera.

(i) A atmosfera é isotérmica.

(ii) A atmosfera segue um perfil politrópico do tipo:

$$P \cdot \rho^{-n} = P_0 \cdot \rho_0^{-n}$$

Seja $P_0$ e $\rho_0$ a Pressão e a densidade atmosférica na superfície, o perfil de pressão, em função da altitude $r$, seria dado por:

$$P_{poli}(r) = P_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g\rho_0}{P_0} \cdot r\right)^{n/(n-1)}$$

A partir das informações fornecidas, responda ao que se pede.

(a) **(10 pontos)** Prove que o perfil de pressão do planeta para o modelo (i) é dado por:

$$P_{iso}(r) = P_0 \cdot e^{-g\rho_0 r/P_0}$$

(b) **(10 pontos)** Para os valores de $P_i$ fornecidos no enunciado, crie uma tabela com as seguintes colunas:

$$f(P_i, P_{i+1}) = \frac{P_i}{P_{i+1}}$$

$$g(P_i, P_{i+1}) = P_i^{(n-1)/n} - P_{i+1}^{(n-1)/n}$$

Para $n = 1{,}8$.

Ao fim, calcule o erro relativo para cada uma dessas colunas. Considere o erro absoluto como o desvio padrão amostral.

(c) **(23 pontos)** Suponha que os dados $P_i$ e $P_{i+1}$ estejam sujeitos a perturbações aleatórias $\delta P_i, \delta P_{i+1} \ll P_i, P_{i+1}$:

$$P_{i+1} = P_{i+1,ideal} + \delta P_{i+1}$$

$$P_i = P_{i,ideal} + \delta P_i$$

Para o modelo politrópico, calcule $f(P_i, P_{i+1})$ e $g(P_i, P_{i+1})$, desprezando os termos em $r$ de ordem superior a um, a fim de deixar suas respostas na forma:

$$A + B \cdot \delta P_i + C \cdot \delta P_{i+1}$$

Com $A$ em função de parâmetros constantes no problema, $B$ em função de constantes e de $P_i$ (ou $P_{i,ideal}$), e $C$ em função de constantes e de $P_{i+1}$ (ou $P_{i+1,ideal}$).

(d) **(8 pontos)** Uma estimativa do erro relativo para cada uma das funções, $f$ e $g$, é:

$$\xi = \sqrt{\frac{B^2 + C^2}{2}} \cdot \frac{1}{A} \cdot O(\delta P)$$

Em que $O(\delta P)$ é a ordem de grandeza típica de $\delta P$. Com base nisso, responda: o modelo politrópico está em desacordo com o resultado do item (b)?

(e) **(12 pontos)** Para o modelo politrópico, prove que $f_{poli}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal})$ é crescente com $i$.

(f) **(12 pontos)** Para o modelo isotérmico, prove que $g_{iso}(P_{i,ideal}, P_{i+1,ideal})$ é decrescente com $i$.

(g) **(15 pontos)** Qual dos modelos melhor corresponde aos dados apresentados? Justifique sua resposta analisando a tabela construída no item (b).