



PROVA DE ANÁLISE DE DADOS
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2022

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 3 (três) horas para resolução mais o tempo de 20 (vinte) minutos para *scan*, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 75 pontos e Questão 2 com 75 pontos;
6. A prova é individual e sem consultas. Informações relevantes para a Prova de Análise de Dados estão disponibilizadas nas páginas 2, 3 e 4.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre organize seus dados em tabelas. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça *upload* de uma folha escrito apenas “Esta questão foi pulada”.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ} 27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Temperatura (T_{\odot})	5778 K	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	206.265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

Para encontrar a incerteza σ_ω de uma função genérica $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para σ_ω
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega = mx^{m-1} \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega = ab \cos(bx) \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A + Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que r é o coeficiente de correlação linear, A e B são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e N é o número de pontos.

1. (Analisando o anel da supernova 1987A - 75 pontos)

A supernova SN 1987A ocorreu na região em que originalmente havia a estrela gigante azul Sk -69 202 (AR: 5h35m28,03s, DEC: $-69^{\circ}16'11,1''$) na galáxia da Grande Nuvem de Magalhães (LMC) em 24 de fevereiro de 1987. Pudemos observar o brilhante anel de gás remanescente da explosão em torno do núcleo colapsado da estrela. No entanto, o tamanho angular do anel é muito pequeno para telescópios ópticos na Terra, ou seja, não há distinção dos detalhes (não são bem resolvíveis). Devido a isso, o telescópio espacial Hubble é usado para estudar a SN 1987A já a um longo tempo. Podemos usar os dados da imagem e o brilho da linha de emissão deslocada no espectro para encontrar o tamanho do anel, a distância até SN 1987A e, conseqüentemente, até a galáxia LMC.

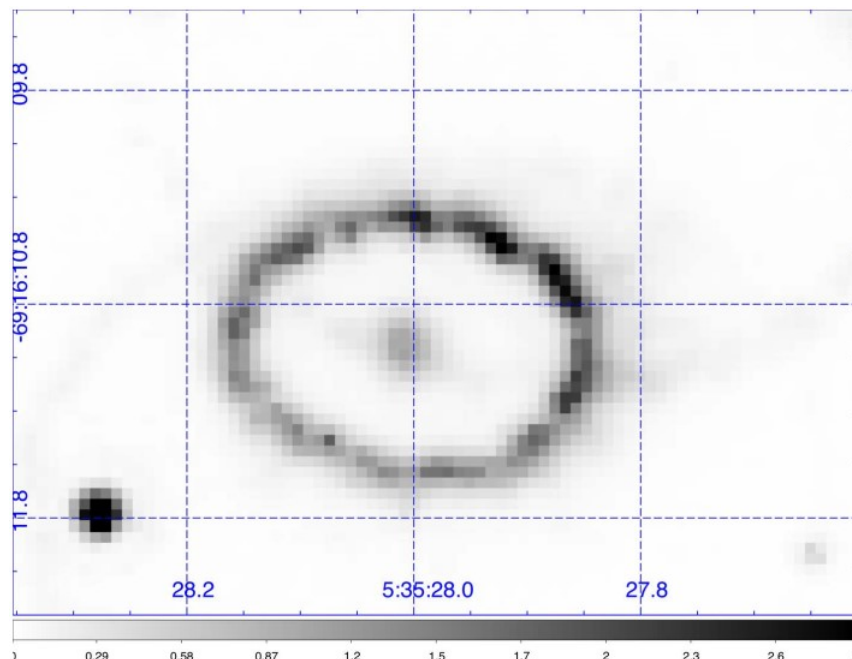


Figura 1: Imagem do anel ao redor da remanescente SN 1987A (remanescente de supernova) que foi processado pelo Wide Field and Planetary Camera 2 (WFPC2) instalado no Telescópio Hubble com um filtro estreito (Narrow-band filter) no comprimento de onda dos íons de nitrogênio [N II]: 6583 Angstrom (F658N). Os eixos x e y mostram as posições em AR e DEC, respectivamente.

Assuma que o céu é plano e podemos medir distâncias angulares linearmente.

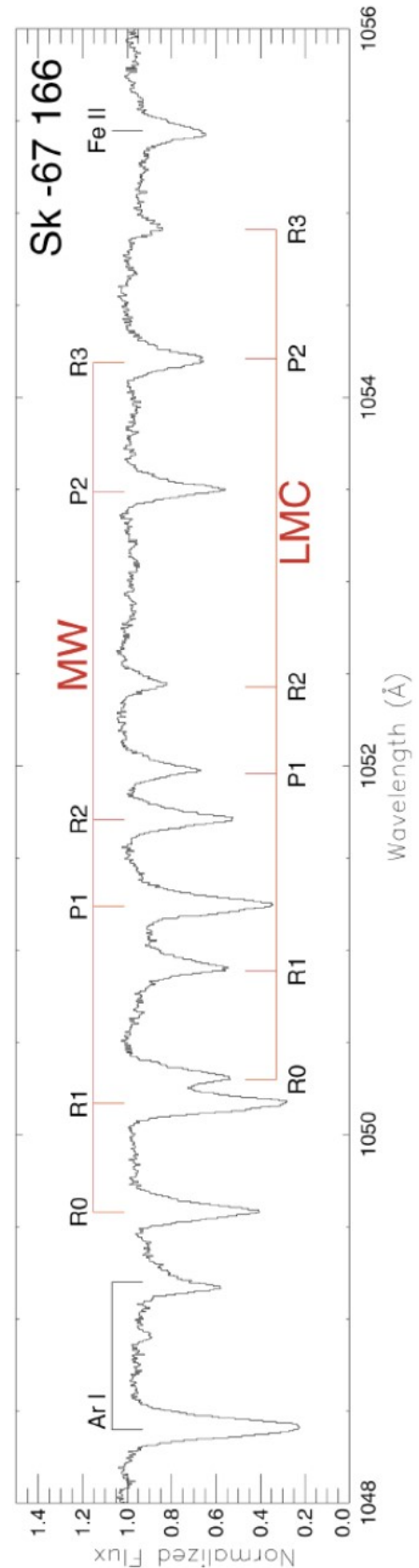
- (a) **(11 pontos)** Se, dado que o anel de gás tem uma forma circular, calcule, com auxílio da Figura 1 acima, o ângulo entre o plano do anel da SN 1987A e o plano do céu. Calcule também o erro associado ao ângulo.

No instante t_0 , a radiação na região do ultravioleta (UV) e raio-X resultante da explosão chegam ao anel de gás, ionizando suas partículas e fazendo com que o anel comece a emitir a luz que observamos (ou seja, t_0 é dado pelo momento em que a variação de fluxo aumenta drasticamente). Considere que essa radiação é emitida apenas após um tempo decorrida a explosão. Percebemos que o anel está se tornando mais brilhante à medida que o tempo passa e tem o valor máximo de brilho no instante t_{max} .

- (b) **(18 pontos)** A tabela 1 contém informações sobre a mudança do brilho das linhas de íons de nitrogênio (NIII). Use as informações fornecidas na tabela e plote um gráfico da relação entre o fluxo da remanescente SN1987A e o tempo passado desde a explosão. Encontre o valor de t_0 e de t_{max} e estime o erro para ambos. ($1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$)

A radiação UV e de raios-X da explosão de SN 1987A viaja para todos os pontos do anel simultaneamente, mas a luz que é emitida da parte do anel mais longe do observador levará mais tempo para chegar até ele (o plano do anel é inclinado em relação ao plano de observação). O anel estará mais brilhante apenas quando a luz de todas as partes do anel atingirem o observador

- (c) **(11 pontos)** Calcule a diferença de distância, para o observador, entre o ponto mais próximo e o ponto mais distante ao observador. Calcule também o raio do anel em parsecs (pc), usando os dados e gráfico do item (b), juntamente com os erros associados a essas medidas.
- (d) **(18 pontos)** De observações do Telescópio Espacial Hubble por quase 10 anos após a explosão, descobrimos que o anel expande com velocidade estimada constante. A partir da tabela 2, desenhe um gráfico do raio angular do anel pelo tempo passado desde a explosão. Também, estime a taxa de expansão do anel e encontre o raio angular do anel no instante t_{max} junto com os erros de ambas as quantidades.
- (e) **(5 pontos)** Calcule a distância até SN 1987A e o seu respectivo erro.
- (f) **(10 pontos)** Utilize os dados espectrais na figura à direita para determinar o desvio para o vermelho (z) e o seu respectivo erro. da galáxia LMC usando as linhas de absorção de luz apropriadas, que não se sobrepõem a outras linhas espectrais. Isso faria com que os cálculos de desvio para o vermelho tivessem um alto erro. Supondo que tal desvio de Doppler é causado pela expansão do universo, calcule a constante de Hubble (H_0) e o seu erro a partir da distância calculada no item e).
- (g) **(2 pontos)** O valor de H_0 encontrado no item anterior corresponde com o valor medido pelo experimento Planck CMB (2018), que equivale a $67,66 \pm 0,42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$? Se há uma grande disparidade, justifique o porquê.



Tempo após a explosão (dias)	Fluxo ($10^{-15} \frac{\text{ergs}}{\text{s cm}^2}$)	Incerteza do fluxo ($10^{-15} \frac{\text{ergs}}{\text{s cm}^2}$)
14,12	1,2	2
44,15	1,1	2
81,23	10	2
93,59	74	4
153,6	207	7
277,2	327	9
360,2	421	10
377,9	449	10
404,4	448	11
441,5	400	10
496,2	325	9
616,3	220	7

Tabela 1: Dados para o item b)

Tempo após a explosão (dias)	Tamanho do raio angular (mas)	Incerteza do raio angular (mas)
1273	824,80	2,5
1753	847,94	2,4
2180	848,71	2,6
2518	867,22	2,3
3250	874,16	2,1

Tabela 2: Dados para o item d)

Solução:

aoba

2. (Analisando um Megamaser - 75 pontos)

Astrônomos usam observações com a técnica de Interferometria de Longa Linha de Base (VLBI) para fazer diagramas de alta resolução relacionando posição e velocidade ao longo da linha de visada. O experimento *Megamaser¹ Cosmology Project* (MCP) estuda galáxias com Megamaser, selecionando aquelas que possuem um disco de gás emitindo radiação maser movendo-se em torno de um disco kepleriano de tamanho menor que 1 parsec (pc). O MCP tenta medir a constante de Hubble (H_0) de forma a estabelecer um método alternativo para verificar seu efeito. Em outros experimentos cosmológicos, observações contínuas foram feitas para medir a aceleração centrífuga do gás em regiões sistêmicas, tornando possível a obtenção da distância até a galáxia.

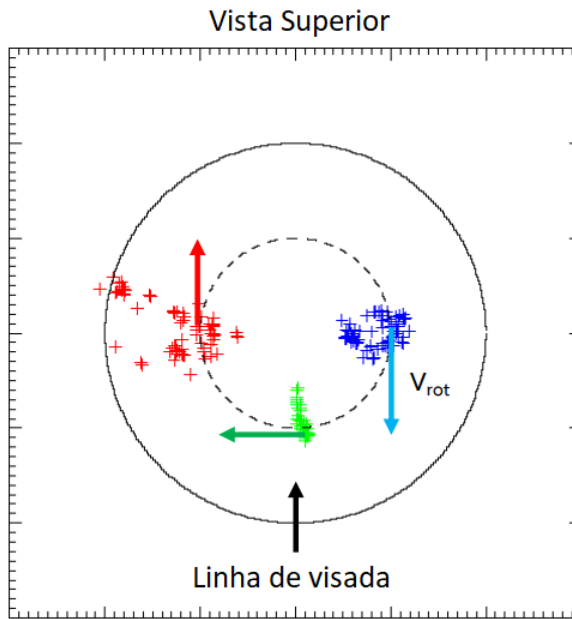


Figura 2: Vista superior do sistema Megamaser e a direção do movimento do gás no referencial estacionário da galáxia.

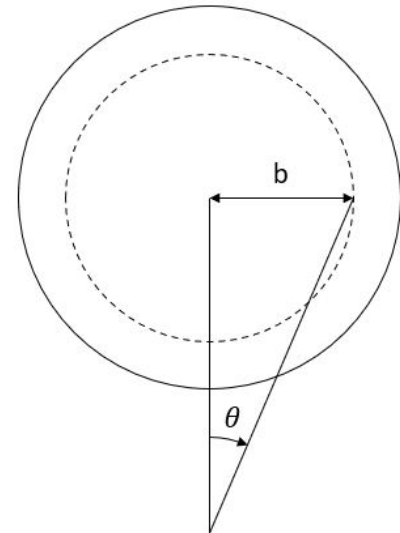


Figura 3: Definição geométrica do parâmetro de impacto θ

Observa-se duas principais regiões:

- 1) Regiões com velocidades na linha de visada próximas à velocidade de recessão da galáxia. Essas são chamadas regiões sistêmicas e correspondem ao gás entre o observador e os buracos negros supermassivos no núcleo da galáxia.
- 2) Regiões para as quais as linhas espectrais apresentam desvio para o azul e para o vermelho. Considere que a posição dessas regiões em relação ao buraco negro é perpendicular à linha de visada

Estudaremos a galáxia NGC 5765b, que possui um fino anel Megamaser no plano de sua órbita.

Uma abordagem não relativística pode ser aplicada tanto para o gás girando em torno do núcleo quanto para o redshift cosmológico. A massa M do sistema contida dentro de um raio $R < 1 pc$ é constante, sendo ela a massa do núcleo galáctico ativo (AGN).

Observe a seguinte tabela, em que θ é o ângulo entre uma determinada região e o centro galáctico, vista por um observador na Terra, e V_{LSR} é a velocidade da região no referencial da Terra (considerando a velocidade de recessão da galáxia).

¹Sistemas Megamaser se caracterizam por um anel de gás no disco de acreção de um buraco negro localizado no núcleo da galáxia. A sua alta emissão luminosa nos permite observar a distâncias de centenas de Mpc, tornando-os apropriados para uso como técnica no estudo de cosmologia.

Parâmetro de impacto θ (mas)	V_{LSR} (km/s)
-1,1110	7763,5
-1,0660	7754,8
-1,0220	7743,2
-0,9777	7728,7
-0,9422	7722,9
-0,9066	7717,1
-0,8533	7688,2

Tabela 3: Dados de P-V da região com blueshift.

- (a) (2 pontos) Escreva a equação que relaciona a velocidade do gás (V_{rot}) no anel com o parâmetro de impacto θ . Escreva a sua resposta em termos da constante $C_1 = \sqrt{\frac{GM}{D}}$, sendo D a distância até a galáxia.
- (b) (2 pontos) Escreva uma equação para a aceleração do gás, em função de V_{rot} e θ .

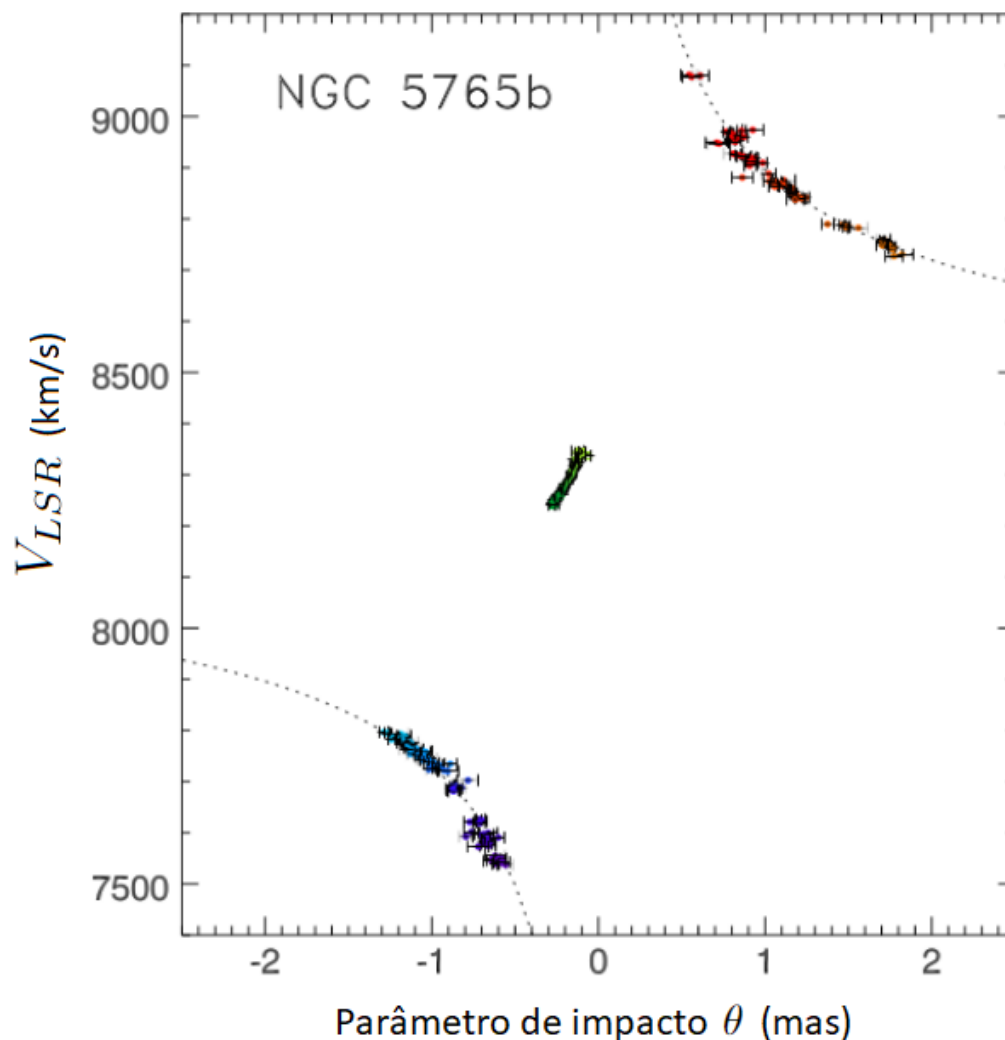


Figura 4: Diagrama de P-V do megamaser NGC5765b.

- (c) **(15 pontos)** Utilizando os dados de posição-velocidade (P-V) da Tabela 3, da região de desvio para o azul, calcule o valor da constante C_1 e o seu desvio padrão. Ignore o erro associado à determinação da velocidade de recessão da galáxia.

A partir da Figura 4, pode-se perceber que a velocidade do gás na região sistêmica possui uma relação linear com o parâmetro de impacto. Considere válida, então, uma relação do tipo:

$$V_{LSR} = C_2 \times \theta + const.$$

Na Tabela 4, estão apresentados diversos valores de V_{LSR} , com os parâmetros de impacto correspondentes.

Parâmetro de impacto (mas)	V_{LSR} (km/s)
-0,2755	8241,3
-0,2400	8252,8
-0,2311	8258,6
-0,2044	8276,0
-0,1866	8284,7
-0,1511	8305,0
-0,1422	8313,7
-0,1244	8328,1
-0,0978	8339,7

Tabela 4: Dados de P-V da região sistêmica.

- (d) **(20 pontos)** Usando os dados da Tabela 4, monte um gráfico de V_{LSR} versus θ . A partir dele, **(i)** calcule o valor da constante C_2 , assim como sua incerteza. Após isso, **(ii)** encontre a razão C_1/C_2 e sua incerteza.

Estudando sistemas Megamaser, descobrimos que a região de gás se agrupa em um anel cujo raio angular vale $\theta_S = \frac{C_1}{C_2}$. Considere que o gás se estende apenas até o raio θ_S .

- (e) **(14 pontos)** O MCP usou o *Green Bank Telescope* (GBT) para monitorar a galáxia NGC 5765b por quase 2 anos. A partir da curva de velocidade da linha espectral (Fig. 5), **(i)** encontre a aceleração e o desvio padrão de 6 conjuntos de dados entre 8260 – 8280 km/s, em unidades de $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{ano}^{-1}$. **(ii)** Determine a média desses valores, bem como a sua incerteza; esse valor pode ser estimado como sendo igual à aceleração do centro.
- (f) **(10 pontos)** Usando a relação de aceleração centrípeta obtida no item (b), **(i)** encontre o raio θ_S do anel Megamaser e, utilizando a Figura 4, **(ii)** estime a velocidade orbital V_{rot} do gás no anel.
- (g) **(12 pontos)** Encontre a distância até a galáxia NGC 5765b e calcule a constante de Hubble (H_0), bem como a sua incerteza, em $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

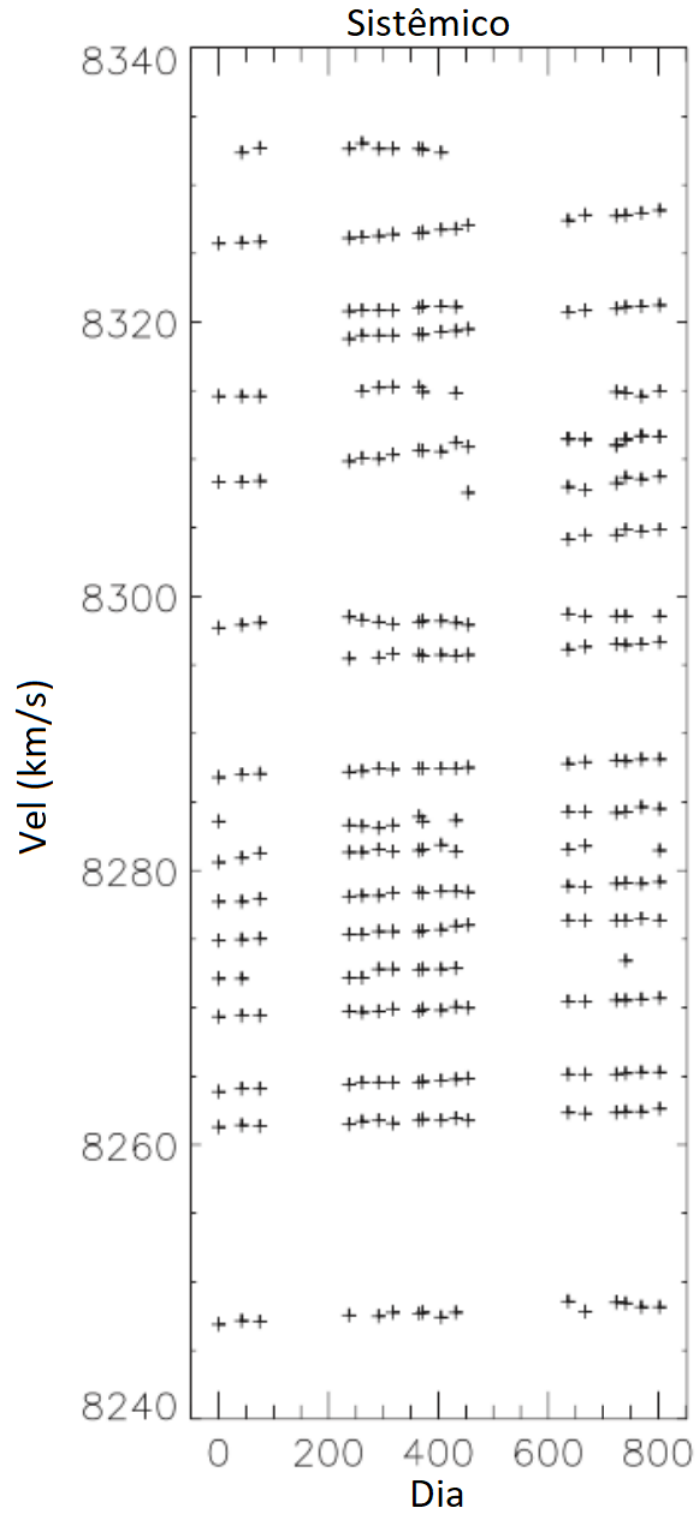


Figura 5: A velocidade do retículo do gás em função do instante observado.

Solução:

(a)

$$\frac{GM_{AGN}}{R^2} = \frac{V_{rot}^2}{R}$$

$$R = |\theta|D$$

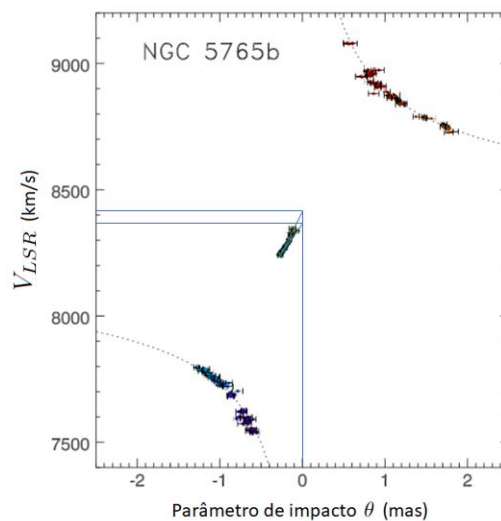
$$\sqrt{\frac{GM_{AGN}}{D}} = |V_{rot}|\sqrt{|\theta|}$$

$$C_1 = |V_{rot}|\sqrt{|\theta|}$$

(b)

$$a_c = \frac{V_{rot}^2}{R} \Rightarrow a_c = \frac{V_{rot}^2}{D|\theta|}$$

(c) Primeiramente, usando a figura 3, podemos estimar a velocidade de recessão V_{recess} da galáxia como sendo a V_{LSR} para $\theta = 0$.



A margem de valores aceita será entre 8375 e 8420 km/s. Como podemos observar, a incerteza na determinação não é desprezível, mas será ignorada conforme o comando da questão.

$$V_{recess} \approx 8390 \text{ km/s}$$

$$V_{rot} = V_{LSR} - V_{recess}$$

Parâmetro de Impacto (mas)	V_{LSR} (km/s)	V_{rot} (km/s)	C_1 (km mas ^{0,5} /s)
-1,1110	7763,5	-626,5	660,4
-1,0660	7754,8	-635,2	655,8
-1,0220	7743,2	-646,8	653,9
-0,9777	7728,7	-661,3	653,9
-0,9422	7722,9	-667,1	647,5
-0,9066	7717,1	-672,9	640,7
-0,8533	7688,2	-701,8	648,3
		Média	651,5
		SD	6,5

Tabela 5

$$C_1 = (652 \pm 7) \text{ km mas}^{0.5}/\text{s}$$

Observação: Também é possível fazer essa questão sem utilizar a velocidade de recessão medida a partir da figura 3. Para isso, utiliza-se uma regressão linear do tipo:

$$\underbrace{V_{LSR}}_y = \underbrace{C_1}_B \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}}_x + \underbrace{V_{recess}}_A$$

Obtendo-se os coeficientes:

$$\begin{cases} B = C_1 = (0,0373 \pm 0,0024) \text{ km/s} = (37,3 \pm 2,4) \text{ m/s} \\ A = V_{recess} = (8270 \pm 40) \text{ km/s} \end{cases}$$

(d) Plotando o gráfico:

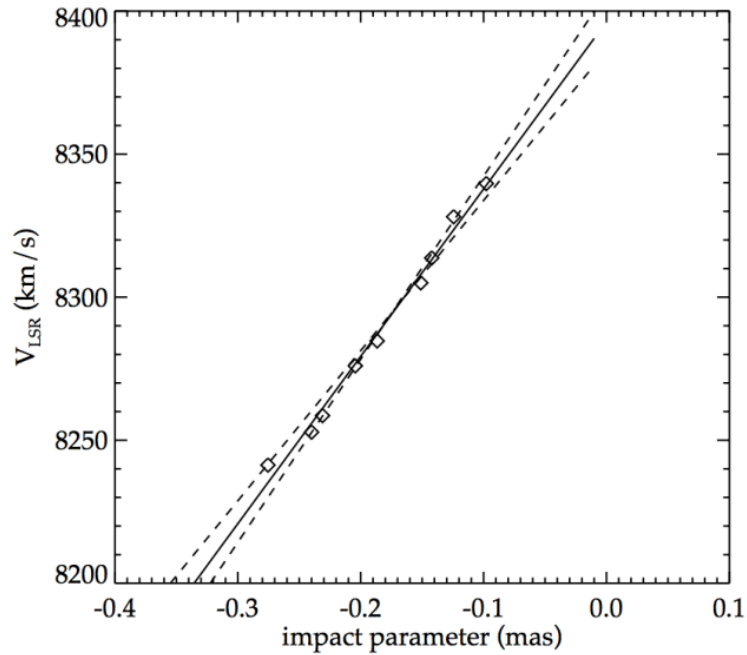


Figura 6: Gráfico de V_{LSR} versus θ .

$$C_2 = (590 \pm 60) \text{ km s}^{-1} \text{ mas}^{-1}$$

Serão aceitos valores no intervalo .

$$\frac{C_1}{C_2} = (1,1 \pm 0,1) \text{ mas}^{3/2}$$

- (e) Subtraindo de cada valor de V_{LSR} a velocidade de recessão e aplicando posteriormente as equações da regressão linear, obtemos a margem de valores aceitável para o coeficiente C_1 e para sua incerteza, todos os valores em $\text{mas}^{0,5} \cdot \text{s}^{-1}$:

Conjunto de dado	a ($\text{km s}^{-1} \text{ ano}^{-1}$)
1	0.691
2	0.691
3	0.6
4	0.691
5	0.83
6	0.553
Average	0.676
SD	0.095

Tabela 6

Observação: Foi aceito um intervalo bem grande de respostas, devido à grande incerteza das medidas no gráfico.

(f)

$$\theta_s = \frac{C_1}{C_2} = 1,11$$

$$V_{rot} = \frac{\Delta V_{LSR}(\theta_s)}{2} \approx \frac{8870 - 7760}{2} \approx 555 \text{ km/s}$$

$$R_s = \frac{V_{rot}^2}{a} = 0,466 \text{ pc}$$

$$R_s = 0,47 \text{ pc}$$

(g)

$$D = \frac{R_s}{\theta_s} = 87 \text{ Mpc}$$

$$H_0 = \frac{V_{recess}}{D} = 96 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

$$H_0 = (96 \pm 28) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$