

Instruções Gerais

1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 3 horas e 30 minutos;
6. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
12. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

Formulário

Para encontrar a incerteza σ_ω de uma função genérica $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para σ_ω
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega = mx^{m-1} \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega = a \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega = ab \cos(bx) \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right \frac{\sigma_x}{x}$

- Para um conjunto de medidas x_i com incerteza σ_i , podemos calcular o valor médio \bar{x} através de uma média ponderada com pesos $1/\sigma_i^2$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i/\sigma_i^2}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

A incerteza correspondente ao valor obtido pela média ponderada é dada por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1/\sigma_i^2}}$$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta $y = A + Bx$ são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que r é o coeficiente de correlação linear, A e B são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e N é o número de pontos.

- A função densidade de probabilidade para uma distribuição normal com variância σ^2 e média μ é tal que

$$f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1. Extinção atmosférica (55 pontos)

Em um mesmo local de observação, grupos diferentes mediram a opacidade e a densidade do ar atmosférico. Os resultados das medições são mostrados na tabela abaixo.

Grupo	$\kappa\rho (10^{-5} \text{ m}^{-1})$
1	1.0532 ± 0.0011
2	1.073 ± 0.070
3	1.10 ± 0.21
4	1.3 ± 0.2
5	1.051 ± 0.023
6	1.11 ± 0.25
7	1.0 ± 0.2
8	1.032 ± 0.120
9	1.0462 ± 0.0030
10	1.06 ± 0.01
11	1.17 ± 0.11
12	1.075 ± 0.040
13	1.019 ± 0.029

Tabela 1: Medições de opacidade e densidade do ar

- (a) **(10 pontos)** Calcule o valor da opacidade multiplicada pela densidade atmosférica e estime a incerteza dessa quantidade.

Em outra noite de observação, um grupo mediu o brilho de uma estrela ao longo da noite. As medidas da magnitude da estrela, de sua altura e do tempo sideral local no momento das observações são mostrados na tabela abaixo.

z (°)	TSL (°)	m
5.53	188.05	4.222
20.73	160.05	4.247
38.19	132.05	4.326
59.34	98.05	4.595
68.05	55.05	4.873
55.85	30.05	4.525
34.99	-2.95	4.306
16.64	-32.95	4.237

Tabela 2: Fotometria estelar e altura da estrela

- (b) **(25 pontos)** A partir das relações de absorção da luz estelar na atmosfera, encontre um ajuste linear apropriado para calcular a altura da atmosfera e o brilho da estrela fora da atmosfera terrestre com seus respectivos erros.
- (c) **(20 pontos)** Plote o gráfico da magnitude da estrela em função do tempo sideral local usando os dados da tabela e estime a ascensão reta da estrela em horas. Explique o seu método para fazer isso.

2. **Medindo a curva de rotação da Via Láctea (95 pontos)** - Em um projeto com alguns dos sistemas estelares da Via Láctea, pretendemos, com a colaboração dos habitantes de nossa galáxia, calcular e desenhar sua curva de rotação. Para isso, primeiro calculamos as constantes de Oort para a órbita do Sol. Os habitantes de cada um dos outros sistemas estelares fazem isso para suas próprias estrelas, e finalmente, usando esses dados, desenhamos a curva de rotação. Para realizar o projeto, responda passo a passo às perguntas que seguem.

A figura abaixo mostra a posição da estrela de referência (nosso Sol), o centro da galáxia e um corpo celeste arbitrário. Considere todas as órbitas como circulares em todas as perguntas.

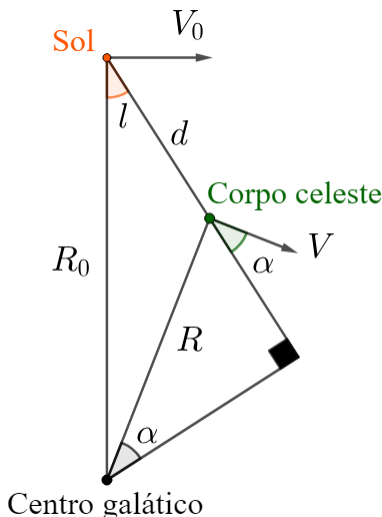


Figura 1: Posição da estrela de referência (Sol), centro da galáxia e um corpo celeste

A velocidade de um corpo celeste próximo em relação ao Sol nos sentidos radial e tangencial é calculada aproximadamente através da seguinte fórmula:

$$v_r = Ad \sin 2l$$

$$v_\theta = Ad \cos 2l + Bd$$

Onde l é a longitude galáctica e d é a distância do corpo celeste ao Sol, que obedece à relação $d \ll R$. A e B são as constantes de Oort, definidas como:

$$A = -\frac{1}{2} \left(\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R_0} - \frac{V_0}{R_0} \right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R_0} + \frac{V_0}{R_0} \right)$$

Onde V_0 e R_0 são a velocidade e o raio orbital da estrela de referência. Para o Sol, temos $R_0 = 7.914$ kpc. Observando a curva de rotação da galáxia, percebemos que as mudanças na velocidade orbital ao longo de diferentes intervalos de R são relativamente grandes. Além disso, em nosso modelo, assumimos que a velocidade angular de rotação da galáxia decresce monotonicamente com a distância ao centro galáctico.

- (a) **(12 pontos)** Com base na figura 1, use as relações geométricas e expanda a velocidade para provar a seguinte relação para a velocidade radial máxima de uma estrela em relação ao Sol em uma dada longitude eclíptica l :

$$v_{r,\max} = 2A(1 - \sin l)R_0$$

Para isso, assumamos que o corpo celeste esteja na vizinhança do Sol.

Dica: Para uma variação muito pequena Δx , uma função $f(x_0 + \Delta x)$ pode ser aproximada para:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$

- (b) **(9 pontos)** A figura 2 mostra a curva de velocidade radial para estrelas com longitude eclíptica $l = (86 \pm 1)^\circ$. Use essa figura para determinar a constante de Oort A , incluindo a incerteza associada a ela, ambas em $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$. O método de regressão linear não é necessário, mas a medição realizada no gráfico deve ser clara. Além disso, interprete a incerteza obtida.

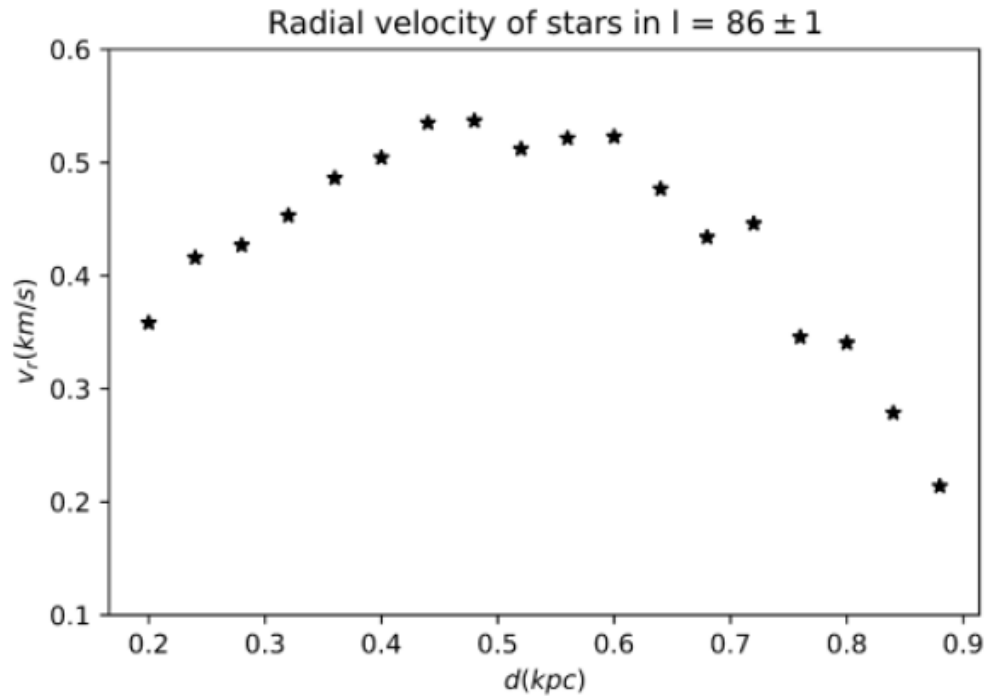


Figura 2: Gráfico da velocidade radial em função da distância ao Sol

- (c) **(20 pontos)** A tabela 1 fornece as velocidades radiais e tangenciais relativas de algumas estrelas em relação ao Sol. Plote **um único gráfico** dessas velocidades em função da longitude galáctica l . Trace uma curva de melhor ajuste para cada velocidade.

#	$l(^{\circ})$	$v_r(\text{km/s})$	$v_{\theta}(\text{km/s})$
1	35.4	6.04	-2.67
2	40.3	6.31	-3.71
3	65.3	4.85	-8.93
4	69.0	4.28	-9.51
5	81.2	1.92	-10.86
6	98.4	-1.85	-10.88
7	109.0	-3.94	-9.80
8	111.1	-4.29	-9.51
9	122.0	-5.74	-7.57
10	126.3	-6.10	-6.67
11	148.5	-5.70	-1.86
12	194.6	3.13	0.82
13	198.8	3.90	0.31
14	202.1	4.45	-0.17
15	212.3	5.78	-2.02
16	247.0	4.59	-9.21
17	251.6	3.83	-9.88
18	257.2	2.77	-10.52
19	260.1	2.17	-10.78
20	325.3	-5.99	-2.51

Tabela 3: Velocidades radiais e tangenciais de estrelas em relação ao Sol

- (d) **(10 pontos)** Determine a constante de Oort B e a sua incerteza, ambas em $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$.
- (e) **(13 pontos)** Determine a distância de todas as estrelas na tabela 1, incluindo suas incertezas. Construa uma nova tabela com esses dados. Interprete os resultados.
- (f) **(6 pontos)** Escreva a expressão que representa a probabilidade da primeira estrela estar a uma distância entre 0,3 kpc e 1,3 kpc com base no erro determinado para sua distância (você não precisa calcular o valor numérico dessa expressão nem simplificá-la). A probabilidade de a distância estar dentro desse intervalo de valores, que é considerado o mais adequado para a obtenção das constantes de Oort, pode ser calculado como sendo em torno de 80%.
- (g) **(25 pontos)** A tabela 2 apresenta as constantes de Oort obtidas para diferentes sistemas estelares. Preencha a tabela com os valores obtidos para o Sol e utilize a tabela preenchida para plotar a curva de rotação da Via Láctea. Existem pontos estranhos no seu gráfico? Se sim, identifique-os.

#	$R(\text{kpc})$	$A(\text{km s}^{-1}\text{kpc}^{-1})$	$B(\text{km s}^{-1}\text{kpc}^{-1})$
1	1.5	-12.5	-62.5
2	2.1	3.6	-53.6
3	3.1	7.4	-47.4
4	3.6	13.9	-38.9
5	4.4	14.2	-33.5
6	5.3	17.3	-25.7
7	5.7	20.5	-19.7
Sol			
9	9.3	13.2	-11.2
10	10.8	11.4	-9.4
11	13.7	7.9	-7.9
12	15.7	7.2	-6.6
13	17.3	8.5	-4.0
14	19.7	2.3	-8.1
15	21.1	12.3	2.2
16	22.1	2.3	-6.6
17	22.6	3.5	-5.4
18	23.7	0.6	-2.5
19	24.8	4.1	-3.9

Tabela 4: Tabela de dados para plotar a curva de rotação da Via Láctea