



**PROVA SURPRESA DE ANÁLISE DE  
DADOS**

**SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS**

**OLIMPIADAS INTERNACIONAIS DE 2022**

---

### Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. **NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.**
4. A duração da prova é de 3 (três) horas para resolução mais o tempo de 20 (vinte) minutos para *scan*, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 2 questões (totalizando 150 pontos), com as seguintes pontuações: Questão 1 com 75 pontos e Questão 2 com 75 pontos;
6. A prova é individual e sem consultas. Informações relevantes para a Prova de Análise de Dados estão disponibilizadas nas páginas 2, 3 e 4.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre organize seus dados em tabelas. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

### Instruções Específicas

1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça *upload* de uma folha escrito apenas “Esta questão foi pulada”.

## Tabela de Constantes

Massa ( $M_{\oplus}$ )	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	<b>Terra</b>
Raio ( $R_{\oplus}$ )	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Aceleração da gravidade superficial ( $g_{\oplus}$ )	$9,8 \text{ m/s}^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	<b>Lua</b>
Raio	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74 \text{ mag}$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ( $M_{\odot}$ )	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	<b>Sol</b>
Raio ( $R_{\odot}$ )	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	
Luminosidade ( $L_{\odot}$ )	$3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$	
Temperatura ( $T_{\odot}$ )	$5778 \text{ K}$	
Magnitude Absoluta ( $M_{\odot}$ )	$4,80 \text{ mag}$	
Magnitude Aparente ( $m_{\odot}$ )	$-26,7 \text{ mag}$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220 \text{ km s}^{-1}$	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5 \text{ kpc}$	
Diâmetro da pupila humana	$6 \text{ mm}$	<b>Distâncias e tamanhos</b>
Magnitude limite do olho humano nu	$+6 \text{ mag}$	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	
1 pc	$206.265 \text{ UA}$	
Constante Gravitacional ( $G$ )	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	<b>Constantes Físicas</b>
Constante Universal dos Gases ( $R$ )	$8,314 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Planck ( $h$ )	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	
Constante de Boltzmann ( $k_B$ )	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma$ )	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	
Constante de Hubble ( $H_0$ )	$67,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo ( $c$ )	$3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
Massa do Próton	$938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656 \text{ nm}$	

## Formulário

Para encontrar a incerteza  $\sigma_\omega$  de uma função genérica  $\omega = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a fórmula geral é:

$$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

A tabela abaixo mostra algumas aplicações clássicas disso:

Função $\omega = \omega(x, y, \dots)$	Expressões para $\sigma_\omega$
$\omega = x \pm y \pm \dots$	$\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots$
$\omega = x^m$	$\sigma_\omega =  mx^{m-1}  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$ ou $\left \frac{\sigma_\omega}{\omega}\right  = \left \frac{\sigma_x}{x}\right $
$\omega = ax + b$	$\sigma_\omega =  a  \sigma_x$
$\omega = axy$	$\sigma_\omega^2 = (ay)^2 \sigma_x^2 + (ax)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \frac{x}{y}$	$\sigma_\omega^2 = \left(\frac{a}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{ax}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = ax^p y^q$	$\sigma_\omega^2 = (apx^{p-1}y^q)^2 \sigma_x^2 + (ax^p qy^{q-1})^2 \sigma_y^2$ ou $\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$\omega = a \sin(bx)$	$\sigma_\omega =  ab \cos(bx)  \sigma_x$
$\omega = b \log_a x$	$\sigma_\omega = \left \frac{b}{\ln a}\right  \frac{\sigma_x}{x}$

- Pelo método dos mínimos quadrados, a melhor estimativa para os coeficientes da reta  $y = A + Bx$  são:

$$A = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

Onde:

$$\Delta = N \sum x^2 - \left( \sum x \right)^2$$

- As incertezas dos coeficientes são dadas por:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}$$

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

Em que:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}$$

Há também outras fórmulas que levam aos mesmos resultados, e são mais rápidas:

$$\sigma_A = \sigma_B \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

$$\sigma_B = |B| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}}$$

Em que  $r$  é o coeficiente de correlação linear,  $A$  e  $B$  são os coeficientes linear e angular da reta de melhor ajuste, respectivamente, e  $N$  é o número de pontos.

1. **Sequência Principal(25 pontos)** Para estrelas da Sequência Principal, pode-se ajustar uma relação massa-luminosidade do tipo:

$$\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{\alpha}$$

Em que  $\alpha$  é um expoente numérico. Na tabela abaixo, encontram-se dados de massa e luminosidade para uma série de diferentes estrelas pertencentes à sequência principal.

Massa ( $M_{\odot}$ )	Luminosidade ( $L_{\odot}$ )
120	$1,78 \cdot 10^6$
60	$5,37 \cdot 10^5$
25	$1,95 \cdot 10^5$
12	$1,02 \cdot 10^4$
5,0	$5,50 \cdot 10^2$
2,5	$3,98 \cdot 10^1$
1,25	$2,09 \cdot 10^0$
1,0	$6,92 \cdot 10^{-1}$
0,8	$2,45 \cdot 10^{-1}$
0,5	$3,80 \cdot 10^{-2}$
0,2	$6,31 \cdot 10^{-3}$
0,1	$1,00 \cdot 10^{-3}$

Tabela 1: Dados de Massa e Luminosidade para várias estrelas

- (a) **(5 pontos)** A partir dos dados acima, monte uma tabela que contenha  $\log(L/L_{\odot})$  e  $\log(M/M_{\odot})$  para cada estrela.
- (b) **(15 pontos)** Plote um gráfico de  $\log(L/L_{\odot})$  versus  $\log(M/M_{\odot})$  com os dados da tabela construída.
- (c) **(5 pontos)** Estime o coeficiente da reta, bem como a sua incerteza.

**Dica:** Se necessário, utilize que o coeficiente de melhor ajuste é dado por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i y_i)}{\sum_{i=1}^N (x_i^2)}$$

E sua incerteza pode ser estimada como:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}{(N - 2) \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2}}$$

2. **(24 pontos)** Os valores estimados para as grandezas a e b são:  $a = 0,25 \pm 0,02$  e  $b = 3,1 \pm 0,3$ . Calcule, o valor estimado de f, bem como a sua incerteza, para as seguintes funções:

- (a)  $f(a,b) = a + b$
- (b)  $f(a,b) = a - b$
- (c)  $f(a,b) = a^2 - b^2$

(d)  $f(a,b) = a^2 \cdot b^3$

(e)  $f(a,b) = \cos^{-1} \left( \frac{a}{b} \right)$

(f)  $f(a,b) = \log(a + b)$