PROVA GRUPAL

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2023

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4.
5. A prova é composta por 18 questões (totalizando 180 pontos), de forma que cada uma vale 10 pontos.

A prova é individual e sem consultas.

O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.

As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.

Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

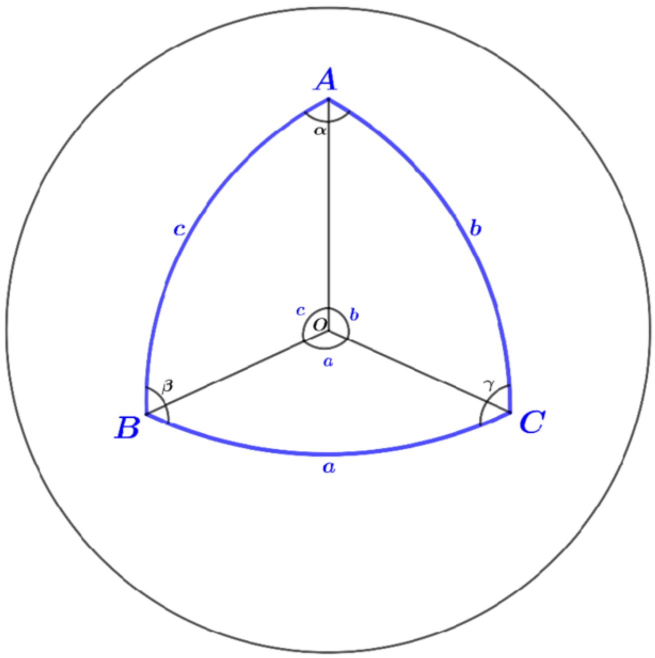
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74\ mag$	
Período Sideral	27,32 dias	
Período Sinódico	29,53 dias	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}\ W$	
Temperatura ($T_\odot$)	$5778\ K$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4{,}80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\, s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8{,}5\ kpc$	
Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938{,}27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(\alpha)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) + \cos(a) \cdot \cos(\gamma) = \cot(b) \cdot \text{sen}(a)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Forma Polar da parábola :

$$r(\theta) = \frac{2r_p}{1 + \cos(\theta)}$$

- Primeira Equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- Equação dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_m} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Onde $R > 0$ para faces convexas e $R < 0$ para faces côncavas, n_L é o índice de refração da lente e n_m é o índice de refração do meio.

1. **(10 pontos)**

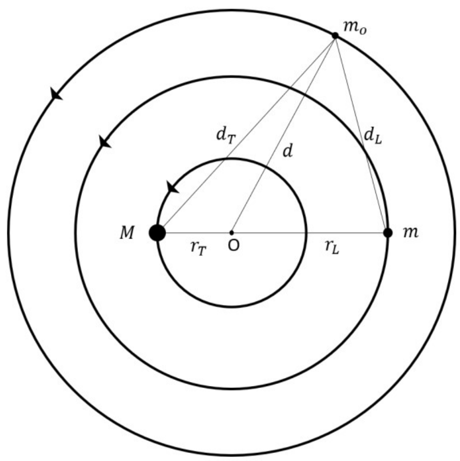
   Se um objeto de massa m orbita um planeta de massa M ($\gg m$) de forma que a face apontada pro planeta sempre é sempre a mesma, mostre que a distância mínima d entre os corpos para que o objeto não se desintegre é:

$$d = R\left(\frac{3\rho_p}{\rho_0}\right)^{1/3}$$

   Onde ρ_p e ρ_0 são as densidades do planeta e do objeto, respectivamente, e R é o raio do planeta.

2. **(10 pontos)**

   No esquema genérico abaixo, tanto a Terra quanto a Lua estão representadas pelos seus centros de massa, m_0 está posicionado no ponto L4 e "O"representa o baricentro do sistema Terra-Lua..



Esquema com Terra, Lua e massa de prova.

   (a) Partindo da configuração genérica dada, demonstre qual é a posição do ponto L4 em relação ao sistema Terra-Lua, usando apenas argumentos matemáticos e físicos. Para tanto, calcule as distâncias d_T, d_L e d.

   (b) A que distância do centro da Lua deve ficar o objeto no ponto L2? Assuma que essa distância é muito menor que $r_L + r_T$.

   Adote as notações: M (massa da Terra), m (massa da Lua), r_T (distância Terra-baricentro do sistema) e r_L (distância Lua-baricentro). Use, se necessário, a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, válida quando $x \ll 1$ e para n positivo ou negativo.

3. **(10 pontos)** Na figura do Analema abaixo, **(a)** identifique o hemisfério do observador, **(b)** trace o equador celeste e **(iii)** identifique cada um dos 4 pontos: Solstícios de junho e de dezembro, Equinócios de março e de setembro.

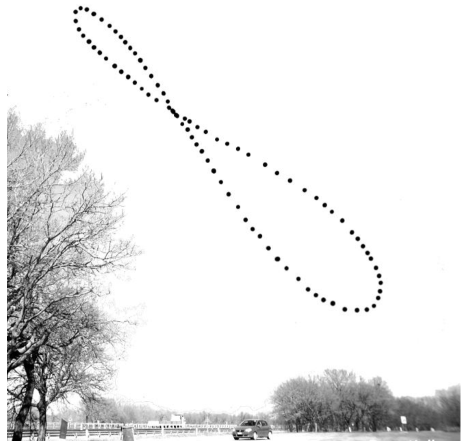


Figura 1: Analema

4. **(10 pontos)** Considere um universo com $a \propto t^\gamma$, em que $\gamma \neq 0$. Dentro de uma galáxia distante, uma explosão de supernova lançou um jato de material diretamente para a Terra com uma velocidade v, medida em relação à galáxia, que é comparável à velocidade da luz c. Qual o redshift observado de uma luz emitida desse jato em t_1 e observada aqui na Terra em t_2?

5. **(10 pontos)**

   Considere um universo com $a \propto t^\gamma$, em que $\gamma \neq 0$. Suponha que nós estamos na galáxia A e enviamos em t_1 uma mensagem via ondas de rádio para uma civilização na galáxia B, que recebe essa mensagem em t_2. Entretanto, após percebermos que tínhamos esquecido de traduzi-la, reenviamos a mensagem em $t_1 + \Delta t$, de tal forma que essa mensagem chega em B no instante t_3. Assumindo que $\Delta t \ll t_1$, encontre $t_3 - t_2$.

6. **(10 pontos)** O número do dia D é utilizado para medir a passagem do ano, de forma que $D = 1$ equivale ao dia 1 de Janeiro e, por exemplo, um $D = 33$ equivale ao dia 2 de Fevereiro. Assim, **(i)** encontre a data associada a um $D = 73$ em 2022 e **(ii)** determine quantos dias se passaram entre 17/2/2020 e 13/8/2021 (contando os dias dos extremos).

7. **(10 pontos)**

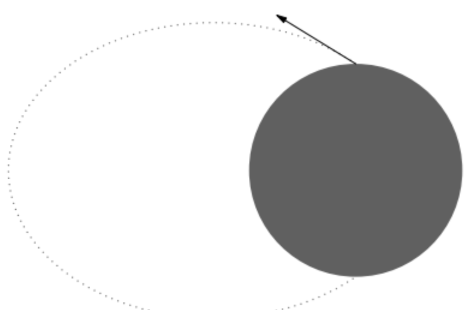


Figura 2: Míssil

Após hackers brasileiros descobrirem que a Rússia estava secretamente guardando a resolução do problema de N-corpos em um banker no Polo Sul, cientistas russos decidem lançar um míssil balístico ao local para acabar com todas os vestígios de tal solução. O projétil é lançado do Polo Norte ao Polo Sul com $v_0 = 2200 m/s$ em um planeta Terra alternativo de massa $M = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg e raio $R = 1.7 \cdot 10^6$ m. Assim, encontre o tempo de voo.

Dica: você não precisa de um computador

8. **(10 pontos)**

A curva de luz abaixo é de um sistema binário fictício com estrelas X e Y. Considerando que a estrela X é mais brilhante, mas Y é mais quente, calcule a razão entre os raios, as temperaturas e as luminosidade das estrelas.

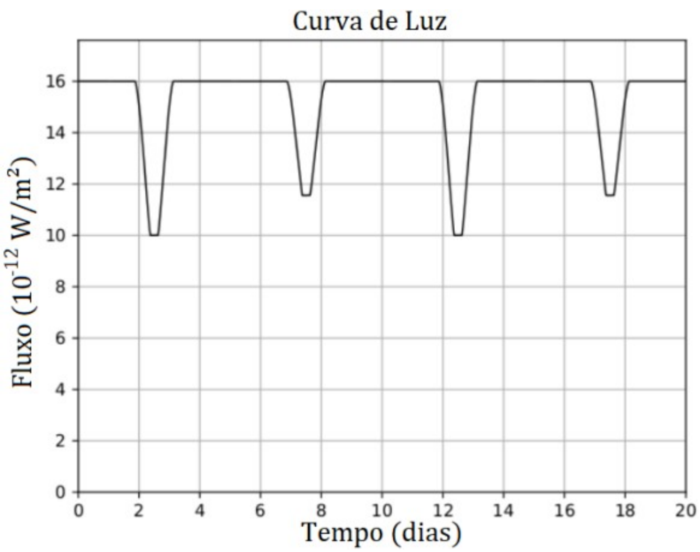
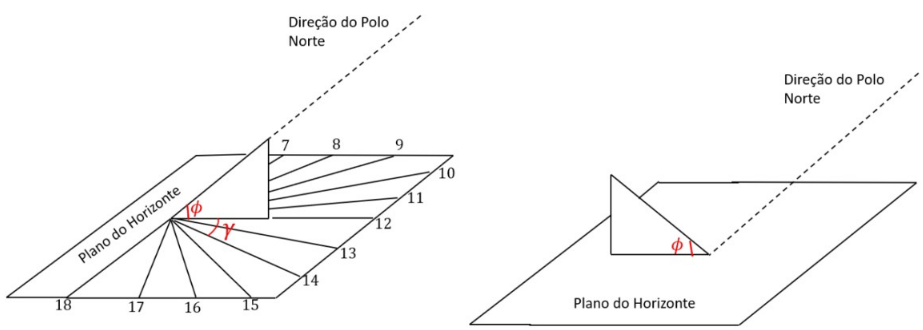


Figura 3: Curva de luz de um sistema binário

9. **(10 pontos)**

Um relógio solar com mostrador horizontal pode ser facilmente construído como indicado na figura abaixo (figura da esquerda).



Construção convencional (à esquerda) e construção errônea (à direita).

(a) **(5 pontos)** Determine a relação entre os ângulos H (ângulo horário do Sol) e γ (ângulo entre o plano do relógio e a marcação das horas, sobre o horizonte) para um observador no hemisfério norte. Essa relação deve depender apenas de ϕ.

Uma pessoa, ao tentar construir o relógio mostrado, acabou se confundindo e colocou o relógio na direção oposta ao polo elevado, como mostra a figura da direita.

(b) **(5 pontos)** Determine a nova relação entre os ângulos H e γ para essa situação. Uma mesma demarcação de horas servirá, nesse caso, para dois dias consecutivos?

Dica: utilize trigonometria esférica

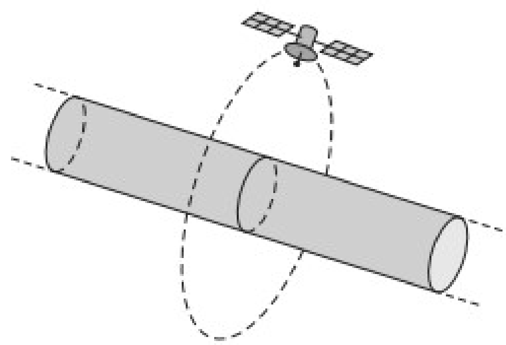
10. **(10 pontos)** Considere uma nuvem de poeira uniformemente distribuída formada por grãos que possuem massa $m_P = 1000 m_H$, onde m_H é a massa de um átomo de hidrogênio, e raio $r = 1{,}00\,\mu$m. Sabe-se que a profundidade óptica para uma camada de 20 pc de espessura é $\tau = 1{,}00 \cdot 10^2$. Calcule a densidade (em m^{-3}) de partículas na nuvem.

11. **(10 pontos)** Prove que, em um equinócio, a extremidade da sombra de um relógio de Sol vertical performa com o tempo um caminho retilíneo. Despreze o movimento aparente do Sol na Eclíptica.

12. **(10 pontos)** Em março de 1997 vimos o brilhante cometa Hale-Bopp com magnitude -1,5. Sendo observada da Terra, a parte interna mais brilhante da cauda do cometa tinha o comprimento de cerca de 10° e a largura de cerca de 1°. Imagine que ao mesmo tempo uma nave espacial com astronautas chegasse ao cometa e pousasse em seu núcleo no lado oposto em relação ao Sol. Os astronautas verão as estrelas no céu quando chegarem à superfície do núcleo? Dado: a magnitude superficial do céu em uma noite sem lua é de $\mu = 21{,}8\,\mathrm{mag/arcsec^2}$.

13. **(10 pontos)**

Um planeta longo e cilíndrico chamado Wattson possui um satélite orbitando-o. A densidade média ρ do planeta é igual à da Terra, assim como seu raio R. Assim, calcule:



(a) **(5 pontos)** Uma expressão que relaciona o período P com a distância do satélite ao centro do planeta.

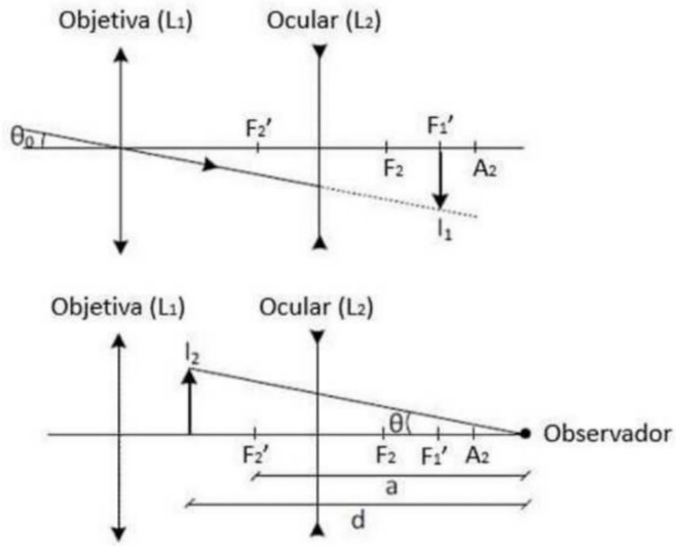
A velocidade de escape de um corpo é definida por aquela que, caso seja alcançada, faz com que este corpo fique no infinito com uma velocidade nula. Desta forma ele nunca volta para sua órbita inicial. Sabendo disso analise, possivelmente dando o valor, tais grandezas:

(b) **(1 ponto)** A velocidade de escape para um corpo na superfície da Terra.

(c) **(4 pontos)** A velocidade de escape para um corpo na superfície de Wattson.

14. **(10 pontos)**

O telescópio de Galileu é formado por duas lentes esféricas gaussianas delgadas: a objetiva (lente convergentes L1) e a ocular (lente divergente L2). As lentes são ajustadas de tal forma que o feixe de luz emergente da objetiva atinge a ocular antes da imagem real I1 se formar. Nessa situação, I1 se comporta como objeto virtual para a ocular, situado entre o foco-principal objeto e o ponto anti-principal objeto desta lente, formando a imagem virtual I2.



(a) **(8 pontos)** Determine o aumento visual (ampliação angular), $G = \dfrac{\theta}{\theta_0}$, em função das distâncias focais das lentes e dos parâmetros a e d mostrados na segunda figura.

(b) **(2 pontos)** Mostre que na condição nominal (no limite em que a posição da imagem final tende ao infinito), o aumento visual depende apenas das distâncias focais.

15. (10 pontos)

Prove a equação da magnitude limite de um telescópio refletor de diâmetro D (magnitude limite do olho humano é 6 e diâmetro da pupila é 6 mm). Caso um dos espelhos tenha refletividade de 98%, qual seria a nova expressão da magnitude limite?

16. (10 pontos)

Cygnus X-1/HDE 226868 é um sistema binário que consiste do buraco negro Cygnus X-1 e da estrela supergigante azul HDE 226868. A massa de HDE 226868 é $30M_\odot$ e o período do sistema binário é de 5,6 dias. Análises das velocidades radiais mostram que a velocidade orbita de HDE 226868 é 116,68km/s no apoastro e 123,03km/s no periastro. Assim:

(a) **(2 pontos)** Determine a excentricidade da órbita de HDE 226868

(b) **(4 pontos)** Encontre o semieixo maior da órbita de HDE 226868

(c) **(4 pontos)** Determine a massa de Cygnus X-1 com até três algarismos significativos.

17. (10 pontos)

Vamos analisar algumas condições de observabilidade de um eclipse solar alternativo no qual o Sol está infinitamente distante e suas coordenadas equatoriais são iguais às da Lua.

(a) **(5 pontos)** Sabendo que a declinação da Lua é 20°, encontre a maior e a menor latitude de um observador terrestre que não consegue ver o Sol.

(b) **(5 pontos)** Calcule a diferença de longitude dos observadores mais à leste e oeste que não conseguem ver o Sol.

18. (10 pontos) O astrocurioso Kotoma quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco $(B-V)_{0,1} = 0{,}4\,\text{mag}$ e temperatura $T_1 = 6880\,\text{K}$ e a estrela 2 tem $(B-V)_{0,2} = 0{,}8\,\text{mag}$

e $T_2 = 5280\,\text{K}$. Também, tinha que para sua estrela 3 $(B-V)_3 = 0{,}66\,\text{mag}$ e a distância era $d_3 = 314\,\text{pc}$. Qual foi a temperatura encontrada por Kotoma? Considere que para a posição do corpo luminoso no céu, $a_V = 1{,}00\,\text{mag/kpc}$, $\dfrac{A_V}{E_{B-V}} = 3{,}0$ e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para $0{,}4 \leqslant (B-V)_0 \leqslant 0{,}8$.