



PROVA EM GRUPO
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

1. Identifique seu grupo em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., “não respondi à Q1 e à Q2”;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. Essa prova é composta por 5 questões valendo um total de 300 pontos (4 questões valendo 50 pontos e questão 1 valendo 100);
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
8. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
10. Ao final da prova, devolva as somente as folhas utilizadas para resolução.
11. Um formulário com informações relevantes para análise de dados está disponibilizado.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	$8,5$ kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- A Distribuição Binomial pode descrever a probabilidade de se ter n de N partículas de um gás em um sub-volume V .

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

- A média de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\langle N \rangle = \sum_{n=1}^N n \cdot P(n)$$

- A média quadrática de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{n=1}^N n^2 \cdot P(n)$$

- A variância σ_N^2 de uma variável aleatória N é dada por:

$$\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$$

- Equação de conservação:

$$L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{cnt}$$

- Algumas integrais:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

$$\int \ln(x) = x(\ln x - 1) + C$$

Glossário

Sugar

“Sugar” se refere ao ato de extrair todas as energias, dinheiro, força vital ou qualquer coisa que seja de uma pessoa, seja de seu intelecto, seu tempo, corpo ou bolso. -Glossário de gírias do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) - WikITA (Adaptado)

1. Brilha Brilha Estrelinha (50 pontos)

Se a fusão nuclear do Sol parasse agora, quanto tempo demoraria para que percebêssemos? Para estimar a resposta para essa instigante pergunta, precisamos assumir algumas hipóteses. Vamos considerar que maior parte da energia gerada pelo Sol provém de reações que ocorrem próximo ao seu centro. Além disso, acredita-se que na camada externa do Sol o transporte de energia seja dominado por convecção, mas que nas camadas interiores, abaixo de um raio $R_{lim} \approx 5 \cdot 10^8 m$, o processo dominante no fluxo energético pode ser modelado a partir da caminhada aleatória de fótons de raios X. Ou seja, vamos considerar que os fótons sempre percorrem uma distância discreta d - seu livre caminho médio - entre duas interações, sendo que em cada uma delas eles são reemitidos em uma direção aleatória, repetindo esse processo enquanto está dentro da região limitada por R_{lim} .

- (a) **(10 pontos)** Considerando o modelo descrito, em média, qual a ordem de grandeza da quantidade de passos que um fóton precisa dar para atingir a zona onde transporte convectivo é dominante ($r \geq R_{lim}$)? Para esse calculo, considere que $d = 1 \text{ mm}$.
- (b) **(5 pontos)** Quanto anos, em média, um fóton leva para chegar na região limítrofe entre a zona de radiação e de convecção considerando o modelo em questão?
- (c) **(10 pontos)** A zona de radiação solar está logo após o seu núcleo, onde reações em cadeia desencadeadas por colisões p-p, representando mais de 90% das interações primárias, são as principais responsáveis por manter o equilíbrio hidrostático da estrela.



Em média, qual a razão $f = \frac{t_{\nu_e}}{t_\gamma}$ entre o tempo que o neutrino t_{ν_e} e o fóton t_γ levam para atingir a zona limítrofe R_{lim} ?

Agora, vamos supor que na zona de radiação os fótons possam ser tratados de maneira análoga a partículas em gás. Então, vamos analisar uma região de volume V da zona radiativa, considerada com volume V_0 . Por simplicidade, diremos que a chance de escolhermos aleatoriamente um sub-volume V nessa região é dada por $p = \frac{V}{V_0}$. Cada sub-volume possui uma quantidade média $\langle n \rangle$ de fótons e um desvio padrão σ_n .

- (d) **(20 pontos)** Considerando essa modelagem e que a estrela está estável, ou seja, sem mudanças em seu comportamento médio no núcleo, zona radiativa e convectiva, encontre a flutuação $\Gamma = \frac{\sigma_n}{\langle n \rangle}$ em um sub-volume V na zona radiativa.
- (e) **(5 pontos)** Faça um gráfico esboçando o comportamento das flutuações. Identifique o que ocorre no(s) caso(s) limite(s) e explique qualitativamente as consequência(s) desse(s) resultado(s).

Solução:

- (a) Tome um passo aleatório \vec{l}_i , cujo módulo é $l = 1 \text{ mm}$. Então, após N passos aleatórios,

$$\vec{r}_N = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i$$

Por simetria, é fácil ver que a média da distribuição dos deslocamentos é zero.

Mas se não foi fácil, podemos esboçar uma demonstração geométrica. Perceba que para cada vetor deslocamento \vec{l}_i há um correspondente na direção oposta com a mesma probabilidade, devido a simetria da esfera em poder trocar esses pontos. Então, nessa direção a média é nula, raciocínio que pode ser geometricamente expandido para todas as direções. Agora, se ainda não ficou satisfeito, vamos provar diretamente esse fato. Um deslocamento aleatório pode ser escrito em termos das variáveis aleatórias azimutal $\phi \in [0, 2\pi]$ e polar $\theta \in [0, \pi]$.

$$\vec{l} = l \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Tomando a média.

$$\langle \vec{l} \rangle = l \left\langle \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right\rangle = l \begin{bmatrix} \langle \sin \theta \cos \phi \rangle \\ \langle \sin \theta \sin \phi \rangle \\ \langle \cos \theta \rangle \end{bmatrix}$$

Em uma esfera Então, verificando a média do módulo da distância após N passos.

$$\langle r^2 \rangle = \langle \vec{r}_N, \vec{r}_N \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \right\rangle$$

Note que a independência dos passos nos leva à:

$$\begin{cases} \langle \vec{r}_j \cdot \vec{r}_i \rangle = \langle \vec{r}_j \rangle \langle \vec{r}_i \rangle = 0 & , \quad i \neq j \\ \langle \vec{r}_j \cdot \vec{r}_i \rangle = l^2 & , \quad i = j \end{cases}$$

Logo, obtemos o deslocamento médio quadrático e podemos finalizar a questão.

$$\langle r^2 \rangle = \sum_{i=1}^N l^2 = Nl^2$$

Seja d o deslocamento médio após N passos, temos:

$$d = l\sqrt{N}$$

Com os valores fornecidos para sair da zona de radiação, $d = R_{lim}$ e $l = 1\text{mm}$ obtemos $N = 2.5 \cdot 10^{23}$ passos. Ou seja, a quantidade de passos é da ordem de 10^{23} .

- (b) Com o modelo descrito, basta considerarmos o tempo para o fóton percorrer os passos do item anterior.

$$t_\gamma = \frac{Nl}{c} = 26400 \text{ anos}$$

- (c) Considerando a natureza praticamente não interagente do neutrino, podemos supor que ele atravessa a região na velocidade da luz. Então,

$$f = \frac{R_{lim}}{t_\gamma}$$

$$f \approx 2 \cdot 10^{-12}$$

- (d) Para resolver esse item, vamos escrever a distribuição do número de fótons em um sub-volume com n partículas de um total de N em V_0 . Considerando todas as formas possíveis de juntar as n partículas em V , temos:

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Onde $p^n (1-p)^{N-n}$ representa a probabilidade de termos n fótons em V enquanto os $N-n$ estão fora. Por sua vez, o fator binomial faz com que consideremos todas as formas possíveis de obter essa configuração.

Agora resta calcularmos a média e o desvio padrão dessa distribuição.

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} \left(\frac{V}{V_0}\right)^n \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N-n} = \frac{V}{V_0} N$$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} \left(\frac{V}{V_0}\right)^n \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N-n} = N \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) + N^2 \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$$

Calculando a variância e por fim obtendo o resultado pretendido.

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

$$\sigma_n^2 = N \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) + N^2 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 - \left(\frac{V}{V_0} N \right)^2$$

$$\sigma_n = \sqrt{N \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0} \right)}$$

Então.

$$\Gamma = \frac{\sqrt{N \frac{V}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0} \right)}}{\frac{V}{V_0} N}$$

$$\therefore \Gamma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)}$$

(e) Segue abaixo o plote do comportamento das flutuações.

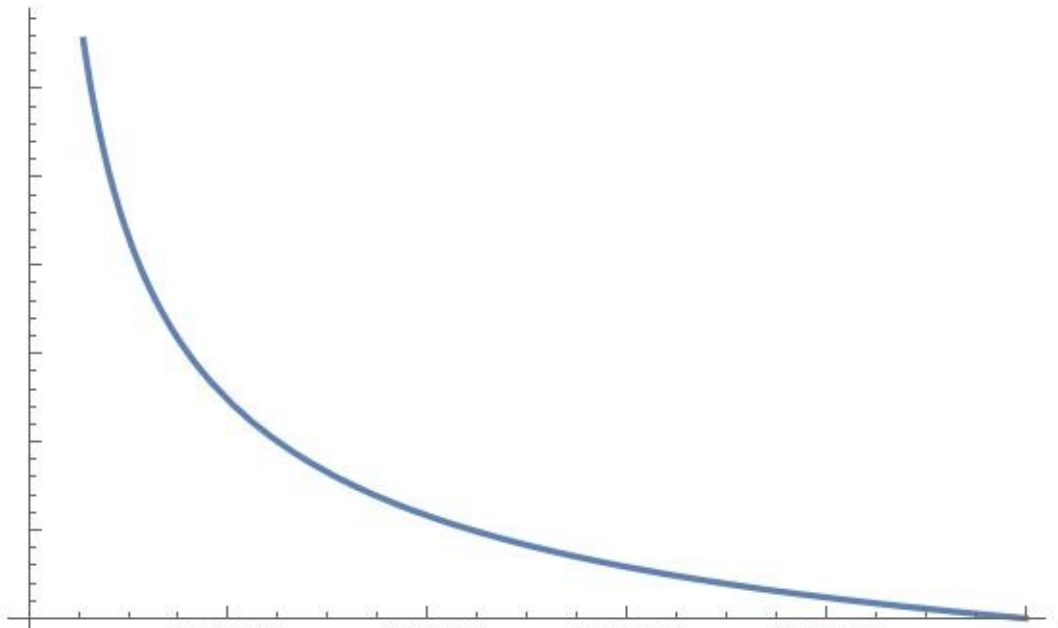


Figura 1: Comportamento das flutuações em função do número de fótons no sub-espço.

Perceba, então, que quando temos virtualmente infinitas partículas, as flutuações cessam. Isso caracteriza o Limite Termodinâmico, situação em que um sistema pode ser descrito unicamente por quantidades macroscópicas, sem necessidade de invocar sua natureza microscópica.

2. Berlíomarzio e suas aventuras interestelares (50 pontos)

Após acordar de sua hibernação, Berlíomarzio começa a se lembrar de ter sonhado com uma longa viagem até Betelgeuse (642.5 anos-luz). Inspirado, ele decide verificar se seria possível chegar lá em tempo suficiente para que ele ainda esteja vivo e possa aguardar pacientemente para fotografar seu

colapso de perto. Para isso, ele pretende comparar quanto tempo de viagem gastaria com um foguete de ejeção de íons e com sua engenhoca movida por luminosidade. Para checar esses valores e os gastos de combustível, ele precisa realizar alguns cálculos, onde não serão considerados efeitos dissipativos e nem interações externas de qualquer natureza.

(I) **Foguete com propulsão iônica**

O foguete de propulsão iônica de Berlíomarzio possui massa total inicial $m_0 = 10^9$ kg e ejeta matéria em uma taxa temporal constante $\dot{m} = 5 \cdot 10^{-5}$ kg/s e com velocidade $u = 200$ m/s em relação ao centro de massa do sistema.

- (a) **(15 pontos)** Com essas informações, determine a velocidade do foguete em função do tempo.
- (b) **(10 pontos)** Determine quanto tempo será necessário para que Berlíomarzio chegue em Betelgeuse usando esse foguete.

(II) **Engenhoca do Berlíomarzio**

A engenhoca do Berlíomarzio consiste em um foguete de massa inicial m_0 acoplado na parte convexa de um espelho parabólico suficientemente grande. No foco espelho, acoplado ao sistema, está uma fonte de luminosidade constante L emitindo apenas em direção ao espelho.

- (c) **20 pontos** Com essas informações, determine a velocidade da engenhoca do Berlíomarzio em relação a um referencial inercial em função do tempo próprio τ .
- (d) **(5 pontos)** Berlíomarzio não quer ter que usar cálculos muito difíceis em suas análises... então ele supõe que seu foguete se desloca com velocidade constante $v = 0.97c$ rumo a Betelgeuse. Qual é o tempo de viagem registrado por Berlíomarzio em seu relógio?

Solução:

- (a) Para determinar a velocidade do foguete, vamos partir da segunda lei de Newton. Então, escrevendo a variação de momento do gás ejetado e do foguete após um pequeno intervalo de tempo δt .

$$\begin{cases} \delta p_{fog} = m(t + \delta t)v(t + \delta t) - m(t)v(t) \\ \delta p_{gas} = -[m_g(t + \delta t)u(t + \delta t) - m_g(t)u(t)] \end{cases}$$

Pelas condições do problema, $m(\delta t + t) \approx m(t)$ e $u(t + \delta t) \approx u(t)$. Logo,

$$\begin{cases} \delta p_{fog} = m(t)[v(t + \delta t) - v(t)] \\ \delta p_{gas} = -u(t)[m_g(t + \delta t) - m_g(t)] \end{cases}$$

A variação global de momento δp será:

$$\delta p = \delta p_{fog} + \delta p_{gas}$$

$$\delta p = m(t)[v(t + \delta t) - v(t)] - u(t)[m_g(t + \delta t) - m_g(t)]$$

Calculando a taxa média de variação de δp no pequeno intervalo δt e o fazendo tender a zero.

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta p}{\delta t} = m(t) \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\delta t} \right) - u(t) \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{m_g(t + \delta t) - m_g(t)}{\delta t} \right)$$

$$\frac{dp}{dt} = m(t) \frac{dv}{dt} - u(t) \frac{dm_g}{dt}$$

Por conservação, a massa perdida pelo foguete é integralmente composta pelo gás ejetado, i.e., $\frac{dm_g}{dt} = -\frac{dm}{dt}$.

Substituindo na lei de Newton no referencial do centro de massa do sistema e considerando $x(t)$ a posição do foguete em relação a posição inicial $x(0) = 0$.

$$m(t) \frac{dv}{dt} + u(t) \frac{dm}{dt} = m(t) \frac{d^2x}{dt^2}$$

. Com as informações enunciadas, temos que $u(t) = u(0) = u$ e $m = m_0 - \dot{m}t$, onde $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ é constante.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t)} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t)}$$

$$\int_0^t \frac{dv}{dt'} dt' = -\int_0^t \frac{u\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t')} dt'$$

$$v(t) - v(0) = u\dot{m} \ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right)$$

Como o foguete parte do repouso, $v(0) = 0$ e obtemos o resultado desejado.

$$\therefore v(t) = u\dot{m} \ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right)$$

Esse resultado é conhecido como Equação do Foguete ou Equação de Tsiolkovski.

- (b) Para obter o tempo de viagem, basta integrar a velocidade e resolver para o tempo necessário para percorrer a distância de Betelgeuse.

$$\int_0^t \frac{dv}{dt'} dt' = u\dot{m} \int_0^t \ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t' \right) dt'$$

$$x(t) - x(0) = -um_0 \left[\left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right) \left(\ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right) - 1 \right) + 1 \right]$$

$$\therefore x(t) = -um_0 \left[\frac{\dot{m}}{m_0} \ln \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right) + \left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t \right) \right]$$

Para resolvermos para o tempo de viagem, iremos fazer $x(T) = d \approx 6.1 \cdot 10^{18}$ m e melhorar a expressão para podermos resolvê-la iterativamente.

$$T = \frac{m_0}{\dot{m}} \left[1 - \exp \left(-\frac{d}{u\dot{m}} - \frac{m_0}{\dot{m}} + T' \right) \right]$$

$$\therefore T \approx 35585 \text{ anos}$$

- (c) Nessa caso, a propulsão do foguete é devido ao momento recebido dos fótons refletidos no espelho parabólico. Perceba que como o espelho é parabólico e os fótons emanam do foco, todos serão refletidos em direção paralela ao eixo óptico. Além disso, note que por simetria a transferência efetiva de momento é paralela ao eixo óptico e que as perdas por projeção nessa direção se complementam simetricamente. Com o índice γ indicando uma grandeza associada a ação efetiva dos fótons temos as seguintes relação, considerando o referencial do centro de momento do sistema e que $p = \gamma mv$ e $E = \gamma mc^2$:

$$\begin{cases} p_{fog} - p_{\gamma} = 0 \\ p = E \frac{v}{c^2} \end{cases}$$

Escrevendo o módulo do 4-vetor momento-energia e a energia total para o sistema antes e depois de um pequeno intervalo de tempo δt em que o foguete sofre uma pequena aceleração e possui massas iniciais e finais m_f e m_0 , respectivamente.

$$\begin{cases} E_{fog} + cp_\gamma = m_0c^2 \\ E_{fog}^2 = m_f^2c^4 + p_{fog}^2c^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $v(m_0)$.

$$E_{fog} + cp_\gamma = E_{fog} + cp_{fog} = m_0c^2$$

$$E_{fog} \left(\frac{c+v}{c} \right) = m_0c^2$$

Enquanto,

$$E_{fog}^2 - p_{fog}^2c^2 = E_{fog}^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2} \right) = m_f^2c^4$$

$$\begin{cases} E_{fog}^2 \left(\frac{c+v}{c} \right)^2 = m_0^2c^4 \\ E_{fog}^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2} \right) = m_f^2c^4 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{m_0^2}{m_f^2}$$

$$v(m_f) = c \frac{m_0^2 - m_f^2}{m_0^2 + m_f^2}$$

Como a fonte tem luminosidade L contante, podemos escrever a taxa de conversão de massa em luz e encontrar a taxa de perda de massa no referencial do foguete, i.e. em função do tempo próprio.

$$m(t) = m_0 - \frac{L}{c^2}\tau$$

Substituindo e determinando $v(\tau)$.

$$v(\tau) = c \frac{m_0^2 - \left(m_0 - \frac{L}{c^2}\tau \right)^2}{m_0^2 + \left(m_0 - \frac{L}{c^2}\tau \right)^2}$$

$$\therefore v(t) = c \frac{1}{1 + \frac{2m_0^2c^4}{2m_0L\tau c^2 + L^2\tau^2}}$$

- (d) No referencial inercial temos simplesmente um movimento com velocidade constante, restando aplicar a transformada de Lorentz para determinar o tempo próprio τ .

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{d}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}$$

$$\tau \approx 161 \text{ anos}$$

3. Dudu Engenharias (50 pontos)

Sugado de defender o espaço aéreo brasileiro, Dudu decide relaxar usando todas suas artimanhas para tentar descobrir a forma mais rápida de se deslocar entre dois pontos na superfície terrestre. Dentre as possibilidades, ele cogita um lançamento sobre a superfície e um túnel em linha reta ligando dois locais distintos. Para uma análise mais geral, Dudu escolhe dois pontos genéricos não semelhantes na superfície, com coordenadas geográficas (ϕ_1, λ_1) e (ϕ_2, λ_2) . Não obstante, Dudu também está sugado de soluções numéricas computacionais e decide ir além considerando que a Terra é uma esfera homogênea sem atmosfera.

- (5 pontos) Calcule o menor tempo de viagem possível entre (ϕ_1, λ_1) e (ϕ_2, λ_2) considerando o lançamento de um foguete na trajetória que melhor se adequa ao nosso problema.
- (15 pontos) Determine o tempo de viagem entre (ϕ_1, λ_1) e (ϕ_2, λ_2) por um túnel subterrâneo que os ligue diretamente.
- (30 pontos) Insatisfeito, Dudu tenta determinar a trajetória de menor caminho da forma mais simples possível. Para isso, ele decide não assumir nada sobre a forma da trajetória, apenas que ela minimiza o tempo de viagem. Determine a equação dessa trajetória em função das coordenadas geográficas (ϕ_1, λ_1) e (ϕ_2, λ_2) .

Solução:

- Pela lei das áreas, temos $\Delta A \propto \Delta t$. Logo, o menor tempo está associado à menor área. De imediato observamos que o mínimo ocorre em uma órbita rasante a superfície terrestre, i.e. circular de raio R_\odot . Geometricamente, pode-se argumentar simplesmente pela distância mínima entre dois pontos em uma esfera.
- Seja O o centro da Terra, P1 o ponto (ϕ_1, λ_1) e P2 o ponto (ϕ_2, λ_2) . A semi-reta P1-P2 determina a trajetória de uma massa m viajando entre os dois pontos. Para determinar o tempo de viagem, vamos analisar um ponto M qualquer na semi-reta P1-P2. Definimos o ângulo θ como o ângulo entre a reta perpendicular a P1-P2 que passa pelo ponto O e a semi-reta O-M, que possui comprimento r . Agora, vamos estudar o movimento causado pela força gravitacional das camadas internas com aceleração \ddot{x} na semi-reta P1-P2.

$$-mg(r) \sin \theta = m\ddot{x}$$

$$-\frac{4\pi}{3}Gr \sin \theta = \ddot{x}$$

$$-\frac{4\pi}{3}G\rho x = \ddot{x}$$

Essa é a conhecida equação do oscilador

4. Interceptação Balística (50 pontos)

Um satélite de defesa orbita a Terra no mesmo sentido de sua rotação, possuindo inclinação i_S com periastro no zênite da capital de Eurasia (ϕ_L, λ_L) . Por razões adversas, Oceania dispara a partir de sua capital (ϕ_O, λ_O) um míssil intercontinental em direção a capital de Eurasia. Assim que o míssil foi detectado nos radares de Eurasia, uma resposta rápida foi necessária para evitar que uma catástrofe ocorresse. Os motivos dessas divergências são tão complexos quanto as tentativas de Oceania em avançar na direção nordeste, tentando invadir Eurasia.

- (5 pontos) Faça um desenho esquemático indicando as órbitas do míssil e do satélite.
- (10 pontos) Escreva as velocidades em ascensão reta ω_α e declinação ω_δ do míssil intercontinental em relação ao satélite. Deixe seu resultado em função dos parâmetros fornecidos, da velocidade de rotação terrestre Ω e das coordenadas equatoriais do satélite $(\delta, \alpha)_S$ e do míssil $(\delta, \alpha)_M$.
- (5 pontos) Determine a separação angular geocêntrica entre o satélite e o míssil em função do tempo e das variáveis do problema.

- (d) **(20 pontos)** Com intuito de evitar uma catástrofe, o satélite de defesa precisa interceptar o míssil antes de atingir o seu alvo. Para isso, ele irá disparar um míssil de interceptação, capaz de desenvolver uma velocidade constante, contra o míssil intercontinental no momento de máxima aproximação com sua trajetória. Sendo assim, qual o ângulo do disparo em relação ao arco de circunferência da menor distância? Suponha que o míssil intercontinental já passou pela máxima aproximação das trajetórias.
- (e) **(10 pontos)** Após o impacto, suponha que os pedaços remanescente comecem a se desfragmentar na atmosfera. Assumindo que eles são de formatos arbitrários, filtrados pelo diâmetro da circunferência que o circunscribe, podemos dizer que a fragmentação da partícula d_{i-1} resulta em outra com diâmetro $d_i = f_i d_{i-1}$, onde f_i assume uniformemente qualquer valor no intervalo $[0,1]$. Determine a distribuição do diâmetro dos fragmentos que irão atingir o solo após muitas fragmentações.
Dica: lembre do Teorema Central do Limite, onde a soma de muitas variáveis aleatórias uniformes converge para uma distribuição gaussiana.

5. Diagrama Hertzsprung–Russell (100 pontos)

A partir de dados observacionais, no começo do século XX, um grande passo foi dado na compreensão da evolução estelar. Tal avanço é devido ao desenvolvimento do Diagrama H-R (Hertzsprung–Russell), onde as estrelas são representadas por sua temperatura e luminosidade ou magnitude absoluta. Devido a sua importância, vamos reproduzir a partir de dados de algumas estrelas o processo de construção desse diagrama.

Tabela 1: Dados coletados de magnitude aparente no filtro visível, paralaxe astronômica e tamanho angular para algumas estrelas.

Estrela	V (mag)	Paralaxe (mas)	Tamanho Angular (mas)
10 Lacertae	4.88	2.61	0.07
Zeta Oph	2.56	9.00	0.25
Vega	0.03	130.2	3.28
Sirius A	-1.46	379.2	6.00
Altair	0.77	194.4	3.20
Procyon A	0.34	284.6	5.40
Alpha Cen A	-0.01	747.2	6.00
Epsilon Eri	3.73	310.9	2.10
Estrela de Barnard	9.50	548.3	0.36
Betelgeuse	0.50	5.95	42.00
Antares	1.06	5.89	37.40
Mu Cephei	4.08	0.55	18.00
Aldebaran	0.86	48.9	20.60
Arcturus	-0.05	88.8	21.00
Pollux	1.14	96.5	8.00
Gacrux	1.63	37.4	9.30
Mira	3-9	10.9	26.00
Sirius B	8.44	379.2	0.005
Procyon B	10.82	284.6	0.006
40 Eridani B	9.52	200.6	0.007
Estrela de van Maanen	12.37	232.4	0.004
Eta Bootis	2.68	88.2	2.80
Gamma Cephei A	3.22	72.5	2.20
Beta Hyi	2.80	134.0	3.40

- (a) **(25 pontos)** Construa uma tabela contendo a distância (pc), magnitude absoluta (mag) e raio (R_{\odot}) das estrelas da Tabela 1.

- (b) **(20 pontos)** Agora, com os dados obtidos no item anterior, faça uma tabela com a luminosidade (L_{\odot}) e temperatura (K) das estrelas da Tabela 1.
- (c) **(30 pontos)** Faça um Diagrama H-R, plotando os valores de luminosidade (L_{\odot}) e temperatura (K) da tabela desenvolvida no item anterior.
- (d) **(15 pontos)** Indique no diagrama as seguintes regiões características da evolução estelar:
- I Sequência Principal
 - II Ramo assintótico das gigantes
 - III Gigantes vermelhas
 - IV Supergigantes Vermelhas
 - V Supergigantes Azuis
 - VI Zona de Instabilidade
 - VII Anãs Brancas
- (e) **(5 pontos)** Explique sucintamente o que caracteriza cada uma das fases da evolução estelar mencionadas no item anterior.
- (f) **(5 pontos)** Esboce no diagrama a trajetória evolutiva do Sol.