



LISTA 2
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 6 problemas, 4 valendo 10 pontos e 2 valendo 20 pontos.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente **individual**.

Prazo: 26/04/2025 23h59min

Tabela de Constantes

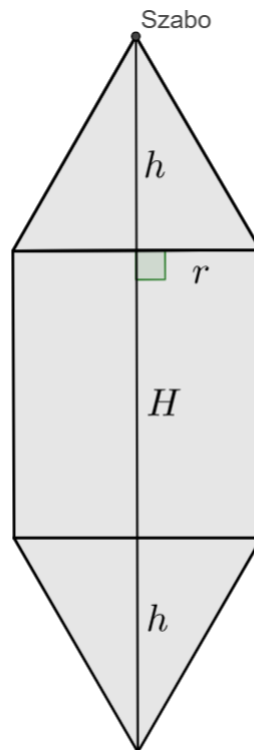
Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
Permissividade magnética do vácuo (μ_0)	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	
Raio do átomo de hidrogênio (r_H)	37 pm	

1. **Aglomerado (10 pontos)** Considere um aglomerado aberto formado por $N = 7 \times 10^{10}$ estrelas de massa entre $0.5M_{\odot}$ e $5M_{\odot}$. Sabe-se que a densidade de probabilidade de formação de estrela nesse aglomerado é proporcional à M^{-2} . Sabendo que para estrelas da Sequência Principal a relação massa-luminosidade é do tipo $L \propto M^3$, encontre a magnitude absoluta m_T do aglomerado e calcule o desvio Δm_T que ocorreria caso se considerasse que o aglomerado fosse formado apenas por estrelas do tipo solar.

DADO: A idade do aglomerado é menor do que o tempo de vida de qualquer estrela nele presente.

2. **Szabo e o Dado Transcendental (10 pontos)** Szabo é o maior fã de Dungeons & Dragons no mundo. Já jogou em todos os papéis possíveis, foi Dungeon Master centenas de vezes e tem o costume de colecionar dados de variadas cores, materiais e número de faces. Recentemente, ele comprou um D20 (dado em formato de icosaedro) de um camelô em uma van preta muito duvidosa. O dado tinha faces com símbolos estranhos que mudavam com o tempo. Quando Szabo usou o dado em uma de suas jogatinas, ele foi teletransportado para outra dimensão!

Ele repentinamente apareceu em um planeta de formato estranho, formado por dois cones, cada um com sua base colada em uma das bases circulares de um cilindro entre eles. Eis uma ilustração planificada do planeta:



Szabo está bem no vértice de um dos cones. O planeta tem uma massa M , cada um dos cones tem altura h , o cilindro tem altura H e as bases dos cones têm raio r (bem como as faces circulares do cilindro).

Qual é a força sentida por Szabo, se ele tem massa m e a massa do planeta é distribuída uniformemente? Considere que $H \gg h$.

3. **Extração de Trabalho de uma Atmosfera Estelar (10 pontos)**

Parte I

Para a parte principal dessa questão, precisaremos do resultado obtido no item a seguir:

- (a) **(1,5 pontos)** Encontre a energia potencial Ω armazenada em uma casca esférica homogênea de massa total M , raio interno R_i e raio externo R_e .

Parte II

Imagine que uma civilização muito avançada está planejando a construção de uma estrutura ao redor de uma estrela com objetivo de extrair energia elétrica. A estrutura tem a intenção de isolar a atmosfera estelar do resto da estrela e do espaço exterior. Além disso, planeja-se separar a atmosfera em um compartimento contendo apenas matéria e outro contendo apenas radiação, conforme a ilustração a seguir

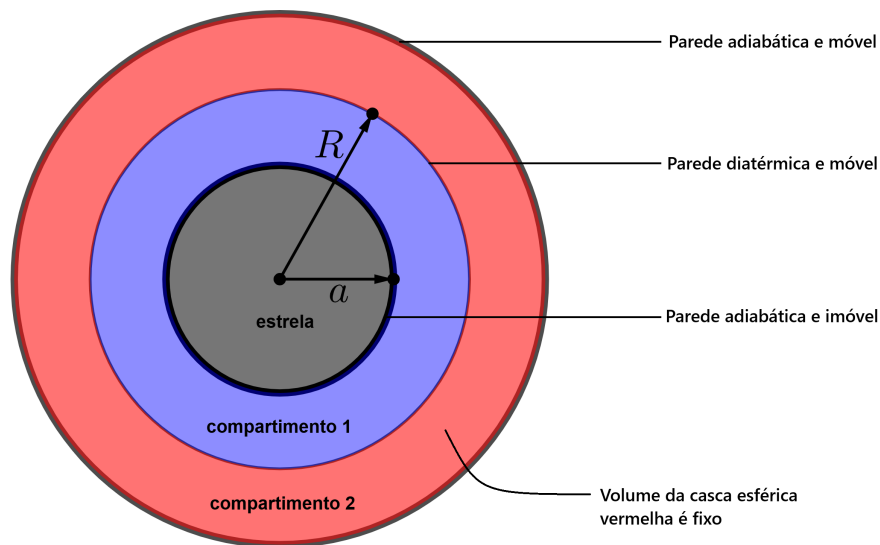


Figura 1: Esquema das três paredes construídas ao redor da estrela. Todas as paredes são impermeáveis. O volume na casca vermelha é fixo e igual a V , mesmo as paredes limitantes sendo móveis. As paredes móveis são sempre esféricas e com centro fixo, apenas alteram o raio.

O compartimento 1 contém N partículas de um gás ideal monoatômico totalizando uma massa M e o compartimento 2 contém um volume fixo V de gás de fótons. A estrela (tirando sua atmosfera) está contida dentro da parede mais interna de raio a . A mobilidade das duas paredes mais externas ocorre unicamente pela variação de seus raios. Elas estão conectadas de forma que o volume V no compartimento 2 é sempre constante. Suponha que todas as três paredes possuem massa desprezível.

Planeja-se submeter o compartimento 1 a uma queda de sua energia interna a fim de transformar calor em trabalho útil por meio de mecanismos envolvendo pistões e fluidos auxiliares (os mecanismos não são relevantes para a solução do problema - tanto a energia quanto a entropia dos mecanismos são desprezíveis). Entretanto, é conhecido que tal conversão não pode ser feita com 100% de eficiência pela 2ª lei da termodinâmica, de forma que parte desta energia interna se transformará em calor transferido para o compartimento 2.

Assuma que os processos são todos quasi-estáticos. Assuma também que em cada instante a distribuição de cada gás em seu respectivo compartimento é homogênea, com pressão e temperatura constantes ao longo do compartimento.

- (b) **(1,5 pontos)** Qual é a variação de entropia total do sistema (sistema=compartimento 1+compartimento 2) se R varia de R_i a R_f , a temperatura do gás no compartimento 1 varia de T_{1i} a T_{1f} e do gás no compartimento 2 varia de T_{2i} a T_{2f} ?

- (c) **(4 pontos)** Suponha que as temperaturas iniciais de cada compartimento é T_{1i} e T_{2i} e o raio inicial é R_i . Qual é a temperatura T_{2f} final do compartimento 2 que resultará no maior valor possível de trabalho útil extraído a partir da queda da energia interna do compartimento 1 quando este sai do estado inicial para um com temperatura T_{1f} e raio R_f ?

Dica: Use a primeira e segunda lei da termodinâmica.

- (d) **(3 pontos)** Explique sucintamente como obtemos a expressão do trabalho máximo que pode ser extraído neste processo. Não é necessário escrevê-la explicitamente, visto que ela será um pouco grande.

Dados:

Entropia de um gás ideal monoatômico:

$$S = Ns_0 + Nk_B \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-5/2} \right], \quad (1)$$

em que s_0 , U_0 , V_0 e N_0 são constantes, k_B é a constante de Boltzmann, U energia térmica do gás, V volume e N número de partículas.

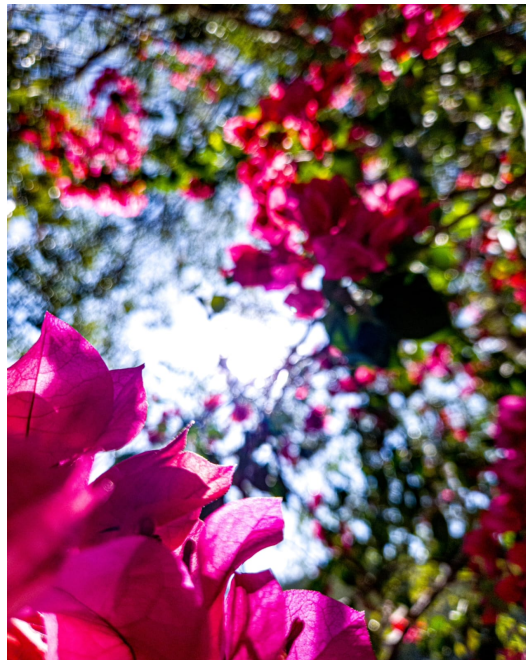
Entropia de um gás de fótons:

$$S = \frac{16\sigma}{3c} VT^3, \quad (2)$$

em que σ é a constante de Stefan-Boltzmann, c velocidade da luz, V volume e T temperatura do gás.

4. He takEs Images of Telescopes Or... floweRs? (10 pontos)

Treinando para se tornar um astrofotógrafo, Heitor tem registrado imagens de diversos temas, com destaque para paisagens e fenômenos astronômicos. A seguir, são apresentadas duas fotografias capturadas por ele: uma do eclipse lunar ocorrido em 14 de março de 2025, e outra de uma paisagem com flores e árvores. (No arquivo enviado juntamente com esta lista, essas mesmas imagens estão disponíveis em maior resolução e com tamanhos iguais).



A imagem à esquerda foi registrada com um telescópio kepleriano de distância focal 127 mm, utilizando uma ocular de 25 mm de distância focal. Considere que o objeto captado pela lente do

celular é o mesmo que formaria a imagem vista em um CCD acoplado ao telescópio. Já a imagem à direita foi feita com o mesmo celular, porém sem o uso de lentes adicionais. Admita que todos os dispositivos ópticos envolvidos funcionam como lentes finas ideais.

- (4 pontos) Determine o diâmetro real do Mar da Fecundidade e o diâmetro da lente da câmera do celular.
- (2 pontos) Calcule a distância focal da lente da câmera do celular e a distância entre essa lente e o sensor da câmera. Sabendo que sua razão focal é $f/20$.
- (4 pontos) Agora, trocou-se a ocular por uma de 15 mm , a câmera do celular foi afastada da ocular, de modo que a nova distância entre elas corresponde ao comprimento do tubo do telescópio e o tubo do telescópio não foi alter. Determine a distância focal de uma lente equivalente ao sistema óptico resultante, bem como a posição dessa lente equivalente em relação à objetiva do telescópio.

5. As Estrelas do Maui (20 pontos) Maui se cansou de se transformar em vários animais usando seu anzol depois de milênios protegendo os povos da Oceania. Repentinamente, ele decidiu se tornar um astrônomo em Harvard University enquanto a humanidade não precisa da sua ajuda para não se destruir. No momento, está fazendo seu pós-pós-pós-doutorado, onde tem explorado sua paixão por sistemas binários.

Nas últimas décadas, Maui ficou fascinado pelo sistema edge-on HLU-Ug-CoAS-1232, fazendo diversas medições para entender a dinâmica e o futuro de suas estrelas: a anã branca pLO-28 e a jovem LRSA-29, que está na sequência principal, mas é estranhamente quente. HLU-Ug-CoAS-1232 tem período orbital $P = 25,08$ anos e as estrelas têm órbitas de excentricidade $e = 0,83$.

Nesta questão, considere:

- O modelo atômico de Dalton é verdadeiro;
- LRSA-29 é praticamente feita apenas de hidrogênio;
- A velocidade angular de LRSA-29 em torno de seu eixo é muito pequena para ser considerada de qualquer forma.

Parte A - Entendendo o Presente

- (3 pontos) Maui fez uma tabela com a velocidade radial de pLO-28 e LRSA-29 em alguns momentos, além do tempo medido a partir do momento em que pLO-28 estava em seu apoastro em anos terrestres. Veja um segmento da tabela:

$v_{r,p}$ (m/s)	$v_{r,L}$ (m/s)	t (anos)
-8.921	4.110	12,40
-10.893	4.556	12,44
-13.167	5.391	12,49
-17.200	6.103	12,52
-13.037	5.112	12,60

Encontre a razão entre as massas $k = \frac{M_p}{M_L}$.

- (3 pontos) Determine os semieixos das órbitas das estrelas em unidades astronômicas, bem como suas massas individuais em massas solares. Em outras palavras, determine a_p , a_L , M_p , e M_L .

Parte B - Entendendo o Futuro

O grande objetivo da tese de doutorado de Maui é prever por quanto tempo o sistema HLU-Ug-CoAS-1232 durará. Maui percebeu, após alguns anos, que a massa de LSAR-29 parece estar diminuindo, não apenas por conta da sua luminosidade. LSAR-29 está ejetando massa, sendo que 46% da massa ejetada por LSAR-29 é capturada por pLO-28. Usando instrumentação do Smithsonian Astrophysical Observatory, em Cambridge, Massachusetts, Maui traçou o gráfico da radiancia espectral de LSAR-29, encontrando o pico no comprimento de onda $\lambda = 14,58\text{ nm}$.

- (c) **(2 pontos)** Maui está considerando, como boas aproximações para LSAR-29:

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{P}{R}$$

$$\frac{dT}{dr} \approx -\frac{T}{R}$$

Prove que, então, a densidade da estrela é aproximadamente uniforme.

- (d) **(2 pontos)** Encontre o raio R de LSAR-29 em raios solares.
- (e) **(2 pontos)** Determine a mínima luminosidade que LSAR-29 deve ter para que as camadas mais externas sejam ejetadas.
- (f) **(3 pontos)** Determine o fluxo F na superfície de LSAR-29 e também a perda de massa por ano \dot{M}_L neste momento. Maui está considerando algumas pequenas coisas:
- A mudança de raio de LRSA-29 é desprezível em um ano.
 - A massa é dita ejetada apenas quando recebe energia suficiente para se locomover ao infinito, caso não houvesse influência gravitacional de outros corpos. Apenas a camada mais externa, por estar em contato com o quase-vácuo, recebe trabalho não nulo
 - A camada mais externa tem refletividade nula e transmissividade $\tau = 0,9999999999$ igual para todos os comprimentos de onda.
- (g) **(5 pontos)** Considerando que $T(r)$ não varia com o tempo, diga em quanto tempo LSAR-29 será completamente desintegrada. Em seguida, justifique o porquê do modelo de Maui ser (ou não ser) aceitável.

6. Anãs Brancas Passando dos Limites! (20 pontos) De acordo com as melhores previsões até o momento, ao fim de sua fase de gigante vermelha, o Sol irá colapsar em uma anã branca imersa em uma nebulosa planetária. Essas estrelas representam a última fronteira impedindo o núcleo de um corpo celeste de se tornar um objeto compacto, apresentando densidades imensas chegando a saturar os níveis de energia disponíveis para os elétrons do plasma o que da origem a prevalência de um efeito denominado pressão degenerada. Nesse problema, estudaremos como este e outros efeitos decorrem do princípio de exclusão de Pauli, e sua relação com a estabilidade da estrela através da estimativa do limite de massa de Chandrasekhar.

Tornando o linguajar mais preciso, vamos considerar a termodinâmica da estrela como um gás ideal de elétrons livres (i.e. a energia é função somente do momento). Chamamos de densidade de estados, o número de configurações por unidade de volume disponíveis para um único elétron com certo momento: p , sendo denotado por $g(p)$. Ademais, chamamos de fator de ocupação a probabilidade de um elétron possuir energia: ϵ , sendo por isso denotado por $f(\epsilon)$. A densidade (numérica) de elétrons com energia ϵ é desse modo dada pelo produto entre a densidade de estados, e a probabilidade de estar em cada estado: $n(\epsilon) = g(p)f(\epsilon)$. Devido ao princípio de exclusão de Pauli, o fator de ocupação é dado por:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{-\alpha + \epsilon/k_B T} + 1},$$

onde $\alpha \geq 0$ é chamado de fator de degenerescência e é geralmente função da temperatura $\alpha = \alpha(T)$.

- (a) **(2 pontos)** No limite de $k_B T \ll \epsilon$ (gás degenerado), definimos a grandeza $\epsilon_F = \alpha k_B T$ (energia de Fermi). Com isso, esboce o gráfico de do fator de ocupação como função da energia. Seu eixo de abcissas deve conter o valor ϵ_F .

A partir de agora, vamos considerar o limite ultrarrelativístico, onde a energia do elétron é dada por $\epsilon \approx cp$.

Ademais, utilize que para elétrons livres, a densidade de estados é dada por:

$$g(p) = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2$$

- (b) **(3 pontos)** Mostre que no limite de $T \approx 0$, a densidade total de elétrons n_e é dada por:

$$n_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_F}{hc} \right)^3$$

Dica: Integre $n(\epsilon)$, assumindo que $f(\epsilon)$ é constante para $\epsilon < \epsilon_F$ e 0 para $\epsilon > \epsilon_F$.

- (c) **(3 pontos)** A pressão de um gás ideal ultrarrelativístico pode ser obtida através de considerações cinéticas pela fórmula:

$$P = \frac{c}{3} \int_0^\infty p n(p) dp$$

Mostre que esse gás de elétrons é politropo, isto é, que $P = K n_e^{1+\frac{1}{\beta}}$, e encontre os valores das constantes K e β .

Compare o resultado com o gás ideal, onde $K = k_B T$ e $\beta = 0$, e discuta os diferentes comportamentos da pressão quando $T \rightarrow 0$.

- (d) **(3,5 pontos)** Determine agora, na mesma aproximação degenerada, mostre que a densidade de energia dos elétrons nesse gás é dada por:

$$u = \frac{3ch}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

- (e) **(2,5 pontos)** Com isso, você seria capaz de escrever as equações de continuidade e equilíbrio hidrostático e resolver a equação diferencial de Lane-Emden para determinar a equação de estado da estrela. Porém vamos tomar um caminho simplificado :) . Assuma que a estrela é homogênea, e encontre sua energia potencial gravitacional: U_G (auto-energia) em função de sua massa M e raio R .
- (f) **(3,5 pontos)** Considere que a composição atômica da estrela possua número médio de núcleons por elétron igual a $\mu_e \approx 2$ (i.e. $\mu_e = \text{prótons} + \text{nêutrons} / \text{elétrons}$), com sua massa dominada por estes núcleons com massa m_p igual à massa do próton. Desse modo, sendo U sua energia interna (térmica), podemos equacionar a energia da estrela $U_{tot} = U + U_G$, como função da massa M e do raio R . A estrela é dita em equilíbrio estático sua energia total é mínima, nesse caso, encontre o raio da anã branca em equilíbrio.
- (g) **(2,5 pontos)** Estrelas acima do limite de Chandrasekhar ($M > M_{Ch}$) não possuem um mínimo de energia, e por isso seu raio é comprimido a $R \rightarrow 0$. Encontre a massa crítica M_{Ch} para isso acontecer.

A título de curiosidade, esse valor está apenas $\sim 20\%$ fora daquele encontrado por Chandrasekhar de $M_{Ch} = 1.4M_\odot$.