



LISTA 3
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

1. Cada aluno deve enviar um arquivo único por lista no formato PDF pelo Gradescope da seletiva. Na plataforma, o aluno deverá marcar quais páginas correspondem a quais questões.
2. A lista é composta por 4 problemas.
3. Antes de enviar o arquivo, verifique se a sua solução está **legível**.
4. Caso opte por deixar uma questão em branco, faça upload de uma página escrita "em branco" e associe à questão.
5. As soluções de duas ou mais questões não podem estar em uma mesma página;
6. No canto superior esquerdo das páginas informe: "Nº aluno - Q(Nº questão) ". Por exemplo, "48 - Q1", e no canto inferior direito informe o número da página, por exemplo, "p.1."
7. Use apenas dados presentes nos enunciados e na tabela de constantes para a resolução das questões, a não ser que a questão peça o contrário.
8. A lista é totalmente **individual**.

Prazo: 03/05/2025 23h59min

Tabela de Constantes

| | | |
|--|---|----------------------------------|
| Massa (M_{\oplus}) | $5,98 \cdot 10^{24}$ kg | Terra |
| Raio (R_{\oplus}) | $6,38 \cdot 10^6$ m | |
| Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus}) | $9,8$ m/s ² | |
| Obliquidade da Eclíptica | $23^{\circ}27'$ | |
| Ano Tropical | 365,2422 dias solares médios | |
| Ano Sideral | 365,2564 dias solares médios | |
| Albedo | 0,39 | |
| Dia sideral | 23h 56min 04s | |
| Massa | $7,35 \cdot 10^{22}$ kg | Lua |
| Raio | $1,74 \cdot 10^6$ m | |
| Distância média à Terra | $3,84 \cdot 10^8$ m | |
| Inclinação Orbital com relação à Eclíptica | $5,14^{\circ}$ | |
| Albedo | 0,14 | |
| Magnitude aparente (lua cheia média) | -12,74 mag | |
| Massa (M_{\odot}) | $1,99 \cdot 10^{30}$ kg | Sol |
| Raio (R_{\odot}) | $6,96 \cdot 10^8$ m | |
| Luminosidade (L_{\odot}) | $3,83 \cdot 10^{26}$ W | |
| Magnitude Absoluta (M_{\odot}) | 4,80 mag | |
| Magnitude Aparente (m_{\odot}) | -26,7 mag | |
| Diâmetro Angular | $32'$ | |
| Velocidade de Rotação na Galáxia | 220 km s ⁻¹ | |
| Distância ao Centro Galáctico | 8,5 kpc | |
| Diâmetro da pupila humana | 6 mm | Distâncias e tamanhos |
| Magnitude limite do olho humano nu | +6 mag | |
| 1 UA | $1,496 \cdot 10^{11}$ m | |
| 1 pc | 206 265 UA | |
| Constante Gravitacional (G) | $6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻² | Constantes Físicas |
| Constante Universal dos Gases (R) | $8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹ | |
| Constante de Planck (h) | $6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s | |
| Constante de Boltzmann (k_B) | $1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹ | |
| Constante de Stefan-Boltzmann (σ) | $5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴ | |
| Constante de Deslocamento de Wien (b) | $2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K | |
| Constante de Hubble (H_0) | $67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹ | |
| Velocidade da luz no vácuo (c) | $3,00 \cdot 10^8$ m/s | |
| Massa do Próton (m_p) | $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg | |
| Carga elementar (e) | $1,60 \cdot 10^{-19}$ C | |
| Permissividade magnética do vácuo (μ_0) | $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m | |
| $\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório | 656 nm | |
| Raio do átomo de hidrogênio (r_H) | 37 pm | |

1. Relatividade um pouco mais geral... (10 pontos)

Gurjinho, após se formar em Engenharia Aeroespacial, decidiu criar um foguete para sair do sistema solar. Seu objetivo era chegar à estrela M1ch3l-W1LL14Ms, que distava D da Terra. Sabe-se que Gurjinho move-se em linha reta e com aceleração constante a , medida em seu referencial. Com base nisso, determine o tempo T que Gurjinho levará para alcançar M1ch3l-W1LL14Ms, conforme medido por um relógio dentro de seu foguete. Assuma que Gurjinho se move em velocidades relativísticas.

2. Medindo o Universo em Expansão (10 pontos)**(a) Constante de Hubble?**

Suponha um universo homogêneo e isotrópico. A partir da parametrização da expansão com um fator de escala $a(t)$. **Derive** a lei de Hubble $\mathbf{r}(\dot{\mathbf{t}}) = H(t)\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Definimos $H(t) \equiv \dot{a}/a$.

Note que a lei de Hubble é na verdade uma propriedade de um universo homogêneo e isotrópico, e não apenas uma relação deduzida à partir observações.

Podemos obter o valor de H_0 (notação para $H(t_0)$ onde t_0 corresponde ao momento atual) usando uma regressão linear $d_L = cz/H_0$.

(b) Módulo da distância cosmológico:

Na fórmula acima, d_L corresponde à distância de luminosidade.

Demonstre a relação entre o módulo da distância ($\mu = m - M$, onde m e M são magnitude aparente e absoluta, respectivamente) e a distância de luminosidade d_L em Mpc.

(c) Medindo H_0 :

Usando os dados da Tabela 1, determine H_0 e a incerteza na sua medida.

(d) Medidas distintas?

A medida que você encontrou no item anterior pode ser comparada com a medida que obtemos de medições da radiação cósmica de fundo, que prevêem uma constante de Hubble nos dias atuais em torno de $67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Compare o resultado obtido no item anterior com o resultado dado neste item. Liste pelo menos 3 motivos que justificariam a diferença observada.

Tabela 1: Tabela de Galáxias com μ e z

| Galáxia | μ | z |
|---------|--------|----------|
| M101 | 29.11 | 0.001574 |
| M66 | 30.22 | 0.002739 |
| M96 | 30.31 | 0.002763 |
| N1309 | 32.50 | 0.007616 |
| N1316 | 31.46 | 0.004384 |
| N1316 | 31.46 | 0.004260 |
| N1316 | 31.46 | 0.003659 |
| N1365 | 31.36 | 0.004181 |
| N1380 | 31.397 | 0.004576 |
| N1404 | 31.36 | 0.004331 |
| N1404 | 31.36 | 0.005416 |
| N1448 | 31.35 | 0.004926 |
| N1448 | 31.35 | 0.003907 |
| N1559 | 31.51 | 0.004674 |
| N2442 | 31.65 | 0.004878 |
| N2525 | 31.81 | 0.006126 |
| N3021 | 32.22 | 0.006843 |
| N3370 | 32.25 | 0.006750 |
| N3447 | 31.92 | 0.006146 |
| N3972 | 31.75 | 0.005653 |
| N3982 | 31.50 | 0.004918 |
| N4038 | 31.67 | 0.005290 |
| N4414 | 31.24 | 0.004594 |
| N4424 | 30.94 | 0.003456 |
| N4457 | 31.05 | 0.004090 |
| N4526 | 31.00 | 0.003531 |
| N4536 | 30.94 | 0.003559 |
| N4639 | 31.78 | 0.005391 |
| N4666 | 30.90 | 0.003620 |
| N5584 | 31.81 | 0.006341 |
| N5643 | 30.54 | 0.003097 |
| N5643 | 30.54 | 0.003037 |
| N5861 | 32.10 | 0.006773 |
| N7250 | 31.63 | 0.004989 |
| N7814 | 30.86 | 0.004223 |

3. Trevisinha em Busca do Buraco Negro Primordial I (25 pontos)

Em determinado momento de sua saga em busca de um buraco negro primordial, Trevisinha se deparou com um grande buraco negro. Infelizmente, como estava em uma velocidade altíssima e sem detectores apropriados de radiação Hawking, ela acabou adentrando a Esfera de Fótons. Inevitavelmente, Trevisinha entrou no horizonte de eventos do buraco negro recitando a métrica de Schwarzschild como últimas palavras...

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Considere que o buraco negro que Trevisinha caiu tem massa M , não está carregado e possui momento angular nulo. Usando o sistema de unidades naturais, vamos explorar o que a física nos permite saber sobre o futuro de Trevisinha.

Justifique todos os passos de sua solução e tudo que, se necessário, assumir.

- (a) Tomando a singularidade como origem do sistema de coordenadas espaciais, encontre a condição que obriga uma partícula estar dentro do horizonte de eventos. Com esse resultado, explore a simetria da métrica de Schwarzschild dentro do horizonte de eventos e argumente se Trevisinha, mesmo que transcendesse as leis da Biologia (mas não as da física), consegue ou não retornar ao horizonte de eventos. Explique como ela retornaria ou o porquê de não conseguir retornar.
- (b) Informalmente, um importante resultado do cálculo variacional - o Teorema de Noether - nos diz que:

"Para cada simetria contínua do Lagrangiano de um sistema, que pode ser verificada pela Equação de Euler-Lagrange, uma quantidade correspondente é conservada".

Encontre a energia de uma partícula massiva que adentrou o horizonte de eventos em função de $\frac{dt}{d\tau}$. Mostre que a energia se conserva e explique o que é esperado para os valores típicos $E < 0, E = 0$ e $E > 0$.

Para esse item, leve em consideração que a generalização relativística do Princípio de Ação é dada por:

$$S = -m \int d\tau$$

- (c) Para modelarmos o que vai acontecer com Trevisinha, considere uma partícula massiva de prova adentrando o horizonte de eventos. Expresse a condição imposta sobre o módulo da velocidade própria radial da partícula; determine seu valor mínimo e a condição necessária para que ele ocorra.
- (d) Supondo que Trevisinha, após o resultado dos itens anteriores, aceite seu destino, quanto tempo passará em seu relógio até que atinja o estado terminal (*lifetime*) em relação ao momento em que cruzou o horizonte de eventos?

4. Sinuca Ultrarrelativística (25 pontos)

ϕ neus e Férmion, entediados em uma tarde de verão, resolvem aprender a jogar sinuca disparando fótons em elétrons através do espalhamento Compton. Estudaremos nessa questão, tanto a cinemática de sistemas de colisão relativística, quanto um fundamental aspecto de sua dinâmica, a sessão de choque; estratégias fortemente implementadas pelos irmãos para aumentar sua probabilidade de vitória.

- (a) Quando nos referimos à cinemática de um processo, buscamos entender tudo que é possível sobre o estado assintótico de um sistema, sem necessariamente conhecer as interações que ocorreram no meio do caminho. Considere o processo geral a seguir:

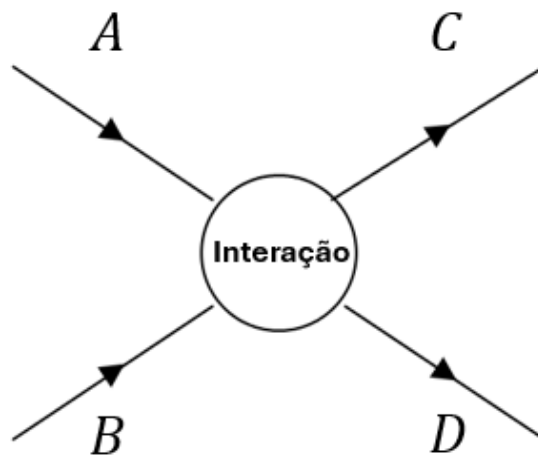


Figura 1: Colisão na forma: $A + B \rightarrow C + D$, onde cada letra representa uma partícula. O processo ocorre da esquerda para a direita.

Chamando de \vec{p}_A e E_A o momento e energia da partícula A (e assim respectivamente), mostre que as seguintes grandezas:

$$s = (E_A + E_B)^2 - c^2 \|\vec{p}_A + \vec{p}_B\|^2 \quad t = (E_A - E_C)^2 - c^2 \|\vec{p}_A - \vec{p}_C\|^2 \quad u = (E_A - E_D)^2 - c^2 \|\vec{p}_A - \vec{p}_D\|^2.$$

Denominadas variáveis de Mandelstam, são invariantes relativísticas, e mostre que:

$$s + t + u = c^4 (m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2).$$

(b) Considere agora o caso particular do espalhamento Compton:

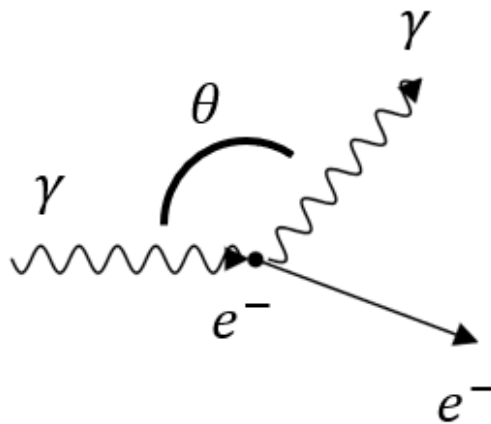


Figura 2: Espalhamento compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, onde γ representa um fóton, e^- um elétron e θ o ângulo entre o fóton incidente e espalhado no referencial do primeiro elétron parado.

Adote como referencial, aquele que o elétron está inicialmente parado (como na figura), e o fóton incide sobre a direção \hat{x} com frequência ν e é espalhado com frequência ν' . Mostre que:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 + \cos(\theta)).$$

Agora vamos entender mais a fundo a dinâmica do problema. Quando falamos de sessão de choque, nos referimos à área efetiva σ que uma partícula tem para certo processo. Isso engloba diversas situações distintas, desde um fóton interagindo com poeira no meio interestelar, até um neutrino difundindo momento em camadas superiores durante o colapso do núcleo de uma supergigante em uma supernova.

Outra grandeza relevante é a sessão de choque diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, que corresponde à área efetiva da partícula para ser espalhada em certa direção, representada pelo ângulo sólido $d\Omega$. Em analogia com a sinuca de ϕ neas e férmion, é como estimar a pequena área superficial $d\sigma$ que uma bola pode atingir a outra de modo a seguir na direção desejada $d\Omega$.

Em geral, não escrevemos $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ pois este não é invariante relativístico. Preferindo fazer uso da variável de Mandelstam: t , que carrega a mesma informação de direção. Sendo assim, entendendo seu significado conceitualmente, temos que a sessão de choque diferencial obedece a equação:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{c^2 h^2}{64\pi^3 (s - c^4 m^2)^2} \mathcal{M}^2$$

Onde m é a massa do elétron, e \mathcal{M} se denomina amplitude de espalhamento, e geralmente é a coisa mais difícil de calcular. Aqui, a pedido de ϕ neas, será fornecida a fórmula:

$$\mathcal{M}^2 = 2 \left(\frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 h c} \right)^2 \left[\left(\frac{2m^2 c^4}{s - m^2 c^4} + \frac{2m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right)^2 + \left(\frac{4m^2 c^4}{s - m^2 c^4} + \frac{4m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right) - \frac{u - m^2 c^4}{s - m^2 c^4} - \frac{s - m^2 c^4}{u - m^2 c^4} \right] \quad (1)$$

- (c) Obtenha o limite ultrarrelativístico da sessão de choque diferencial, isto é, encontre $\frac{d\sigma}{dt}$ para $mc^2 \ll h\nu$, em termos das variáveis de Mandelstam.
- (d) Considere o sistema adotado para o item (b), no qual um fóton de frequência ν se espalha em um elétron parado com um ângulo θ saindo com uma frequência ν' . Mostre então que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{h^2}{8\pi^2 m^2 c^2} \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \right)^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'} - \sin^2(\theta) \right) \quad (\text{Equação de Klein-Nishina})$$

Obs: Como o sistema tem simetria cilíndrica sob o eixo de incidência, estamos tomando $d\Omega = 2\pi |\sin(\theta)| d\theta = 2\pi |d(\cos(\theta))|$.

- (e) Encontre a sessão de choque total σ , no limite clássico $mc^2 \gg h\nu$, e relacione a expressão encontrada com a sessão de choque de Thomson:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

para encontrar o que seria o raio efetivo do elétron r_e .

- (f) Enquanto ϕ neas prepara sua jogada, Férmion olha pela janela e fica pensando em qual seria a chance de um fóton ultraenergético vindo do espaço (cosmogênico) entrar na sala e atrapalhar o jogo. Para isso, ele se lembra de ter aprendido sobre a simetria de Crossing, que permite relacionar processos com partículas similares. Em particular, ele se lembra que o processo de colisão elétron fóton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ pode ser relacionado com um análogo $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$, onde e^+ representa um pósitron (anti-elétron).

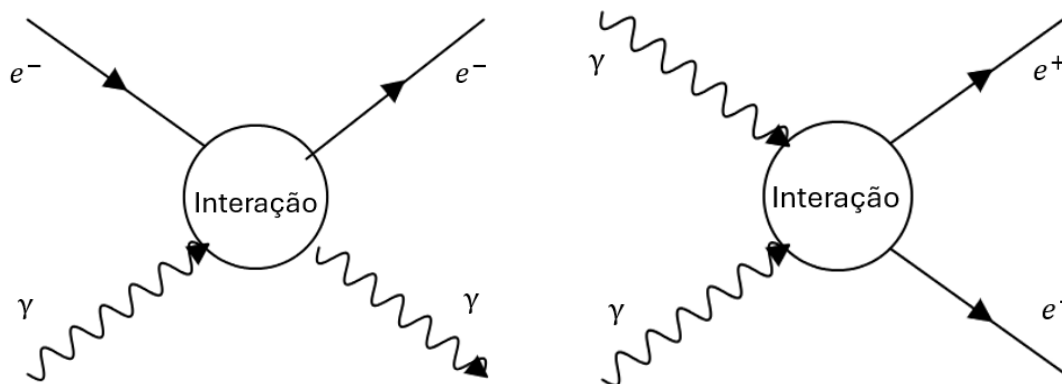


Figura 3: A esquerda, está o diagrama análogo à figura 2, representando $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$; à direita, seu análogo $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$

Note que a menos do sentido das setas, os diagramas são uma rotação a 90° um do outro. A simetria de Crossing, permite relacionar as amplitudes $\mathcal{M}_{\gamma+e^- \rightarrow \gamma+e^-}$ com $\mathcal{M}_{\gamma+\gamma \rightarrow e^-+e^+}$, nos dizendo que as amplitudes são **iguais** a menos de uma troca de variáveis de Mandelstam: $s \rightarrow u$, $u \rightarrow s$ e $t \rightarrow t$. Isto é:

$$\text{Trocando em 1 as variáveis: } \begin{cases} s \rightarrow u \\ u \rightarrow s \\ t \rightarrow t \end{cases}, \quad \text{teremos: } \mathcal{M}_{\gamma+e^- \rightarrow \gamma+e^-} \rightarrow \mathcal{M}_{\gamma+\gamma \rightarrow e^-+e^+}.$$

Este processo que Férminon está pensando é de interesse para a astronomia de altas energias, pois mostra que para altas energias é possível que dois fótons "colidam" dando origem a um par elétron pósitron. Isso faz com que a radiação cósmica de fundo atue como um meio translúcido ou até opaco para fótons de altíssima energia.

Vamos estimar essa profundidade óptica. Considere um processo simplificado, onde o fóton energético de frequência ν interage frontalmente com um microondas no pico de emissão da radiação cósmica de fundo (2,7 K); produzindo um par $e^+ + e^-$, ambos com a mesma energia. Chamemos a sessão de choque diferencial desse processo de $(\frac{d\sigma}{dt})_{\text{médio}}$, e aproximamos $\sigma = (t_{max} - t_{min}) (\frac{d\sigma}{dt})_{\text{médio}}$

Assuma também para a estimativa que o fundo cósmico é apenas composto por fótons com a frequência de pico. Nessas condições encontre a profundidade óptica τ imposta pela CMB. Para qual frequência de luz a distância entre a Via Láctea e Andrômeda é maior que τ ?.