

Instruções Gerais

1. Escreva seu NÚMERO DE IDENTIFICAÇÃO em TODAS as folhas de resposta que serão escaneadas.
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página.
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA.
4. A duração da prova é de 4 (quatro) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos.
5. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos), divididas nas seguintes categorias:
 - Questões Curtas - **5 questões**, com 2 valendo 10 pontos, 2 valendo 15 pontos e 1 valendo 20 pontos.
 - Questões Médias - **3 questões**, com 1 valendo 25 pontos, 1 valendo 30 pontos e 1 valendo 45 pontos.
 - Questões Longas - **2 questões**, com 2 valendo 65 pontos.
6. A prova é individual e sem consultas.
7. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso à internet.
8. As resoluções das questões podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso.
9. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser escaneadas.

Instruções Específicas

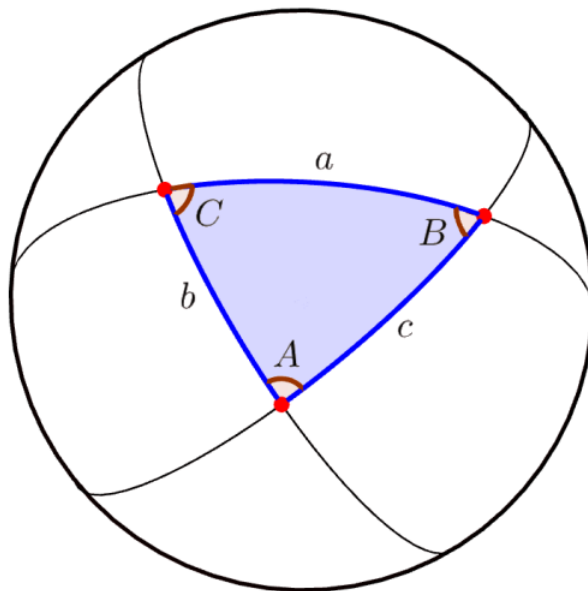
1. Após o término da prova, os alunos deverão escanear suas soluções com um aparelho celular para enviarem suas provas pelo Gradescope.
2. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções.
3. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só é permitido enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
4. Para questões em branco, faça upload de uma folha escrito 'Pulei essa questão'.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,00 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton (m_p)	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Carga elementar (e)	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = \epsilon \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

em que a emissividade vale $\epsilon = 1$ para um emissor perfeito.

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

Questões Curtas

1. CCD (10 pontos)

Juventino possui uma placa CCD e a utiliza para observar uma estrela de magnitude 18,5 mag que cobre completamente 5 pixels do CCD. Nessa noite, os ruídos valem, em unidade de contagens, $\sigma_1 = 10 \cdot px$ e $\sigma_2 = \sqrt{5 \cdot px \cdot t}$ (em que px é o número de pixels, t o tempo de integração, em segundos). Considerando que foi detectada uma taxa de 1 contagem/s para uma outra estrela de magnitude 21 mag, encontre qual deve ser o tempo de integração para, nessa observação, obter uma razão sinal-ruído de 5.

Dica: o ruído total é dado por

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

2. Poluição Atmosférica (10 pontos)

Sulistinha, um infeliz astrônomo do ano 3000, observava o céu de seu apartamento de $5m^2$. As únicas estrelas visíveis eram Canopus, próxima ao zênite, e Sírius, a uma altura de 60° . Devido à poluição, Canopus estava duas vezes mais brilhante que Sírius. Sabendo disso, qual a fração aproximada da energia solar que chega à superfície, em relação à energia total que incide na alta atmosfera, quando o Sol está a pino?

Dados: Magnitudes de Canopus e Sírius, corrigidas pela absorção atmosférica, são, respectivamente, $m_{C,0} = -0,74$ e $m_{S,0} = -1,46$.

3. Telescópio Misterioso (15 pontos)

Um dia, Bruno estava caminhando pelas ruas de Munique e encontrou um telescópio muito interessante. Fascinado, ele quis saber a razão focal do telescópio. Contudo, não havia nenhuma marcação, e os únicos objetos disponíveis eram um cronômetro e uma ocular de 25 mm com campo de visão de 45° . Bruno decidiu colocar sua ocular no telescópio e realizar os seguintes testes:

- I. Bruno apontou o telescópio para Enif ($\delta = 9,87^\circ N$; $\alpha = 21h44min$) e determinou que a estrela demorava 4min20s para cruzar o campo de visão.
- II. Após apontar para vários objetos do céu profundo, Bruno concluiu que a maior magnitude que podia ser vista pelo telescópio era +12,15. Bruno optou por assumir que a eficiência de transmissão era de 100%.

Qual foi a razão focal obtida por Bruno? Considere que a magnitude limite do olho humano é igual a +6,0 e o diâmetro da pupila é igual a 6,0 mm.

4. Moonfall (15 pontos)

Considere um cenário (felizmente fictício) no qual um imenso asteroide colide frontalmente com a Lua de forma perfeitamente inelástica. Considere o asteroide uma esfera de diâmetro $D = 750$ km composto por rocha de densidade $\rho = 2,70$ g/cm³. Despreze a atração gravitacional que a Terra e a Lua exercem no asteroide, considere que ambas as órbitas da Lua ao redor da Terra e da Terra ao redor do Sol são circulares e se dão no mesmo sentido; negligencie as massas da Lua e do asteroide em comparação com a massa da Terra.

- (a) **(10 pontos)** Seja V o módulo da velocidade do asteroide em relação ao Sol. Determine o intervalo $[V_{min}, V_{max}]$ para V de modo que, logo após a colisão, a Lua pare em relação à Terra. Considere que o raio orbital da Lua em torno da Terra é negligenciável em relação ao raio orbital da Terra em torno do Sol.
- (b) **(5 pontos)** Assumindo $V_{min} \leq V \leq V_{max}$, estime o tempo necessário, em dias, para a Lua se chocar com a Terra, contado a partir do impacto.

5. Gigante Bismarck (20 pontos)

Durante sua visita ao Telescópio do Polo Sul, a astrônoma reptiliana Giulia decidiu ir ao Polo Sul geográfico para observar o céu noturno. Ao chegar lá, se deparou com um pequeno gigante chamado Bismarck, que dizia ter centenas de milhares de anos e já ter visto todas as estrelas do céu, tanto do norte quanto do sul, apesar de nunca ter deixado o Polo Sul geográfico. Curiosa para saber se o gigante falava a verdade, Giulia calculou a menor altura que possibilitaria tal feito (enxergar todas as estrelas do céu sem sair do Polo Sul). Considere que a Terra é aproximadamente esférica.

- (a) **(7 pontos)** Qual foi a altura mínima h_{min} que ela encontrou?

Giulia fica maravilhada com as redondezas, e, por ter uma vida muito mais longa que a de um terráqueo, decide ficar lá por centenas de milhares de anos. No entanto, ela faz questão de ver seu satélite favorito, Shojiro. Para essa questão, assuma que Shojiro orbita com inclinação orbital de $\theta = 10^\circ 00'$ (em relação ao equador terrestre atual) e altura de $h = 40000$ km (em relação à superfície), e que a órbita de Shojiro é invariante com o tempo.

- (b) **(13 pontos)** Qual a altura angular máxima com que Giulia observará Shojiro?

Questões Médias**6. Trajetória da EEI (25 pontos)**

Por volta das 19h00min do dia 12/04/2023, a Estação Espacial Internacional (EEI) passará próximo à cidade de Barra do Piraí (latitude $\phi_B = 22^\circ 28'S$ e longitude $\lambda_B = 43^\circ 50'O$), atingindo uma magnitude de até -3.2 mag. Quando observadores em Barra do Piraí veem a EEI em sua máxima altura angular, a estação estará sobrevoando um ponto P de coordenadas geográficas $\phi_P = 20^\circ 28'S$, $\lambda_P = 41^\circ 41'O$.

Para os itens a seguir, despreze a rotação da Terra e considere que a órbita da EEI seja circular e de altitude constante igual a $H = 408$ km.

- (a) **(4 pontos)** Qual é a distância angular θ , ao longo da superfície da Terra, entre a cidade de Barra do Piraí e o ponto P ?
- (b) **(6 pontos)** Calcule a máxima altura angular h atingida nessa passagem pela EEI para os observadores em Barra do Piraí.
- (c) **(15 pontos)** Calcule a separação angular ΔA entre o ponto do nascer e do ocaso da EEI nessa passagem vista por observadores em Barra do Piraí.

7. Boa janta! (30 pontos)

Após se irritar com questionamentos sobre um uso diferenciado de anzóis, Jânio Bojânio decide tirar férias jantando no planeta KLFK. O planeta em questão possui uma lua que o orbita no mesmo plano de seu equador celeste e tem uma atmosfera muito espessa e densa, que funciona como uma grande casca esférica que envolve o planeta. Como Jânio achou a lua absurdamente bonita, a janta só será boa se ele puder observar o satélite natural durante toda a refeição, assim ajude Jânio a desfrutar de uma janta sem cálculos ou anzóis!

- (a) **(4 pontos)** Chegando no sistema de KLFK, Jânio nota que uma estrela de que gosta muito, Uapyle, tem magnitude aparente igual a 0 quando vista do espaço próximo do planeta. Entretanto, ao pousar no planeta, a estrela, a qual estava no zênite, teve sua magnitude aumentada para 4,34. Calcule a profundidade óptica no zênite da atmosfera de KLFK.
- (b) **(14 pontos)** Jânio obteve a informação de um habitante de KLFK, Bpizza, de que a lua tem magnitude igual a $m_z = 2$ quando vista no zênite. Sabendo que a atmosfera de KLFK é homogênea e tem altura de $H = 500$ km, e que KLFK tem raio $R_p = 5100$ km, calcule

qual a distância zenital máxima que ainda permite a observação lunar, tendo em vista que a atmosfera não apresenta refração atmosférica por alguma razão desconhecida. Considere que os olhos de Jânio funcionam em KLFK do mesmo jeito que na Terra; como Jânio gosta de precisão, nem pense em aproximar a atmosfera para um plano!

Dica: a profundidade óptica é proporcional a distância percorrida pelos raios de luz em um meio com opacidade constante.

- (c) **(12 pontos)** O jantar está acontecendo no Pnamá, localizado no equador do planeta. Calcule qual é o intervalo de tempo em que Jânio consegue ver a lua nessas condições. Saiba que o planeta tem raio de $R_p = 5100$ km e um dia sideral de 10 h; o raio da órbita circular da lua é $R_L = 2 \cdot 10^8$ m, o período orbital da lua é de 175 h, e que a lua gira no mesmo sentido de rotação de KLFK. Lembre-se de que Jânio não está no centro da esfera celeste dada a proximidade da lua com o planeta.

8. Da Terra ao Sol (45 pontos)

Com o objetivo de estudar mais a fundo a fotosfera do Sol, um certo grupo de cientistas decide construir uma vela solar que ficaria estacionária, no espaço, 6,30 milhões de quilômetros acima da **superfície** da estrela. Como essa vela ficará submetida a uma temperatura de 4430 K em sua posição final, ela é feita de um material com alto ponto de fusão, coeficiente de dilatação superficial $\beta = 9,00 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ e superfície perfeitamente refletora. Além disso, ela ficará sempre voltada para a estrela, de forma que a luz chegue perpendicularmente à sua superfície. Por fim, a maior parte da massa da vela está concentrada em um computador de 8 kg em seu centro. Para os cálculos abaixo, desconsidere o arrasto e a atração gravitacional dos planetas.

- (a) **(10 pontos)** Ajude esses cientistas e calcule com qual área essa vela precisa ser fabricada, considerando que a confecção será feita em um laboratório na Terra, a uma temperatura de 15° C .

Devido a um erro em sua construção, a vela foi fabricada com aproximadamente 95% da área calculada no item anterior.

- (b) **(15 pontos)** Suponha que a vela parta do repouso na posição em que fora inicialmente projetada para se manter em equilíbrio. Considerando, a priori, que a temperatura não varia em função da distância à estrela, estime quanto tempo demoraria para que a vela chegue à fotosfera.

Na verdade, uma análise mais detalhada deve considerar que a temperatura, de fato, varia em função da distância à estrela. Podemos considerar que, dentro de uma faixa, essa relação segue a função:

$$T = T' - q \cdot r^2 \cdot (r - r_0)$$

Em que T' , q e r_0 são constantes, e r é a distância até o **centro** da estrela.

- (c) **(13 pontos)** Sabe-se que o movimento, nessa faixa, é um M.H.S. entorno da distância de $6,82 \cdot 10^9$ m até o **centro** da estrela. Também é sabido que o ponto no qual a vela fora inicialmente projetada para repousar pertence a essa faixa. Visto isso, calcule T' , q e r_0 .
- (d) **(7 pontos)** Qual é o período desse M.H.S.?

Questões Longas

9. A guerra das mecânicas (65 pontos)

Durante os séculos XVII e XVIII, duas formas de enxergar a realidade física travaram uma verdadeira guerra por adeptos na comunidade científica, tratam-se das mecânicas cartesiana e newtoniana. Esta dispensa apresentações; aquela foi um modelo proposto por Descartes que visava,

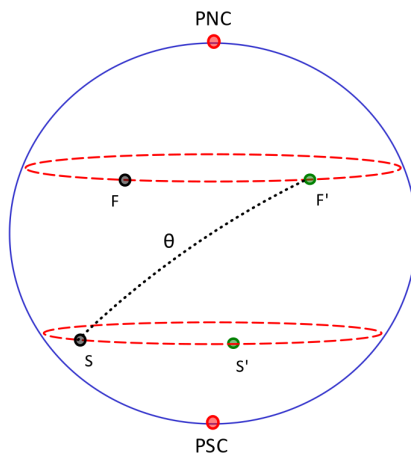
entre outras coisas, entender os fenômenos a partir de forças de contato. Por exemplo, ao girar uma colher em um copo d'água com partículas não solubilizadas, o movimento de rotação cria um vórtice, cujo fluxo arrasta as partículas, fazendo-as girar entorno da colher; similarmente, a rotação do Sol provocaria, no *éter*, um vórtice responsável pela translação dos planetas.

Uma das alternativas para comparar as mecânicas é deduzir os raios equatorial e polar da Terra. Segundo o modelo cartesiano, o vórtice gerado pela rotação terrestre reduziria o raio equatorial, como se estivesse sugando o Equador, enquanto a física de Newton prevê o contrário: o Equador, como se fosse empurrado pela força centrífuga, seria expandido. Outra alternativa é explorar como as mecânicas se relacionam com as leis do movimento planetário.

- (a) **(3 pontos)** Para um vórtice que gira entorno de um único ponto, é válida a conservação de momento angular específico ao longo de todo o fluido. Ou seja, se uma partícula acompanha o fluxo do fluido, a razão entre seu momento angular e sua massa depende apenas do vórtice a que está submetida. Visto isso, prove que a mecânica cartesiana não respeita a lei harmônica de Kepler.
- (b) **(2 pontos)** Prove que, para órbitas circulares, a mecânica newtoniana está de acordo com a lei harmônica de Kepler.
- (c) **(15 pontos)** Determine a latitude geocêntrica φ_G em função da latitude astronômica φ para um planeta de raio equatorial R_e e raio polar R_p . Assuma que a secção transversal da Terra seja elíptica.
- Dado:** Latitude geocêntrica é o ângulo entre o Equador e o observador, com vértice no centro do planeta. Já latitude astronômica é a altura do polo elevado (considerando um horizonte idealmente plano)
- (d) **(20 pontos)** Encontre a distância R de um ponto ao centro da Terra em função da latitude astronômica φ , do raio equatorial R_e e do raio polar R_p .
- (e) **(8 pontos)** Suponha que, na tentativa de comparar os raios, Jânio e Chefia fizeram algumas expedições. Em um dado instante, ambos observavam as estrelas Dubhe (ascensão reta: 11 h 05 min 08,9s; declinação: $61^\circ 37' 40,2''$) e Merak (ascensão reta: 11 h 03 min 13,9s; declinação: $56^\circ 15' 31,3''$). Jânio media distâncias zenitais iguais a $8^\circ 22,3'$ e $13^\circ 44,5'$, respectivamente, enquanto Chefia, acampando a uma distância $d = 55,5$ km do primeiro, media as distâncias zenitais $8^\circ 52,3'$ e $14^\circ 14,5'$, respectivamente. Sabendo disso, estime as latitudes astronômicas dos dois.
- (f) **(8 pontos)** Em outra expedição, em um dado momento, os dois observaram Mintaka (Ascensão reta: 5 h 32 min 00,4s; declinação: $-0^\circ 17' 56,7''$) no zênite. Eles então iniciaram imediatamente um deslocamento rumo ao Sul com velocidade de 100km/h. Uma hora depois, a distância zenital de Mintaka era $15^\circ 01,58'$. Sabendo disso, calcule os raios Equatorial e Polar da Terra. Utilize algarismos significativos até a casa da unidade de quilômetro.
- (g) **(9 pontos)** Em realidade, o raio equatorial da Terra é 6.371km. A partir da mecânica newtoniana, encontre o raio polar do planeta.

10. Lançando um míssil (65 pontos)

Bismarck, em seu projeto de finalização de curso para se tornar um engenheiro, decide construir um míssil e lançá-lo de presente a um de seus grandes amigos: Ualype, que passava suas férias tranquilamente em Fortaleza/CE. Em sua construção, o míssil é adaptado para possuir uma órbita de semi-eixo maior igual ao raio da Terra. Como objetivo da missão, o míssil sai de São José dos Campos (ϕ_S, λ_S) com destino à Fortaleza (ϕ_F, λ_F). Na imagem abaixo, temos a posição inicial (F, S) e final (F', S') das cidades, representando, respectivamente, o momento de lançamento e o momento de chegada do míssil, cuja trajetória, por sua vez, é representada pelo arco esférico θ .

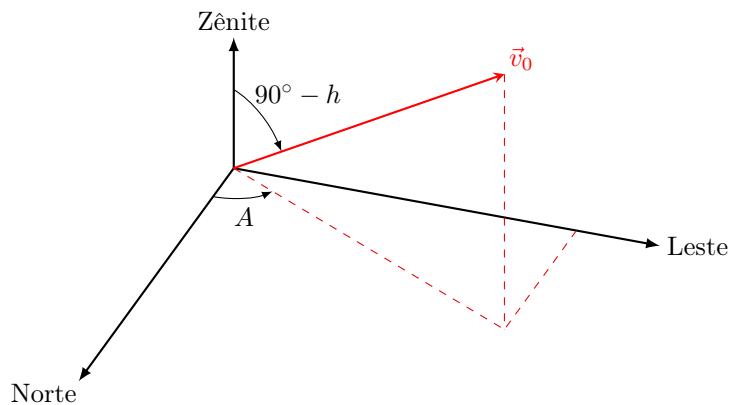


Trajetória do míssil; $\{F, F'\}$ e $\{S, S'\}$ são, respectivamente, Fortaleza e São José dos Campos.

De modo a ajudar Bismarck em seu projeto, responda os itens a seguir. Desconsidere efeitos atmosféricos e lembre-se de considerar a rotação da Terra.

- (a) **(6 pontos)** Encontre uma expressão para a excentricidade e da órbita do míssil como função do ângulo θ .
- (b) **(12 pontos)** Encontre uma expressão para a duração da viagem do míssil t_m como função do ângulo θ , da massa M_T e do raio R_T da Terra e da constante gravitacional G .
- (c) **(6 pontos)** Encontre uma expressão para o ângulo θ em funções das coordenadas de São José dos Campos (ϕ_S, λ_S) , das coordenadas de Fortaleza (ϕ_F, λ_F) , da duração da viagem t_m e da velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo, ω .
- (d) **(15 pontos)** Sabendo que $(\phi_F, \lambda_F) = (-3^\circ 44', -38^\circ 32' O)$ e $(\phi_S, \lambda_S) = (-23^\circ 11' S, -45^\circ 53' O)$, encontre um valor numérico para o tempo de viagem do míssil t_m , em segundos.
- (e) **(20 pontos)** Encontre a intensidade da velocidade v_0 , em km/s, com a qual o míssil deve ser lançado, com relação à superfície da Terra, de modo a cumprir seu trajeto.
- (f) **(6 pontos)** Por fim, ajude Bismarck a determinar o azimute A_0 , e a altura h_0 , em graus, com que ele deve lançar seu míssil.

OBS: Pode ser útil utilizar a representação esquemática abaixo para se orientar com relação ao sistema de coordenadas utilizado:



Representação esquemática do sistema de coordenadas.