PROVA TEÓRICA P1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2025

Instruções Gerais

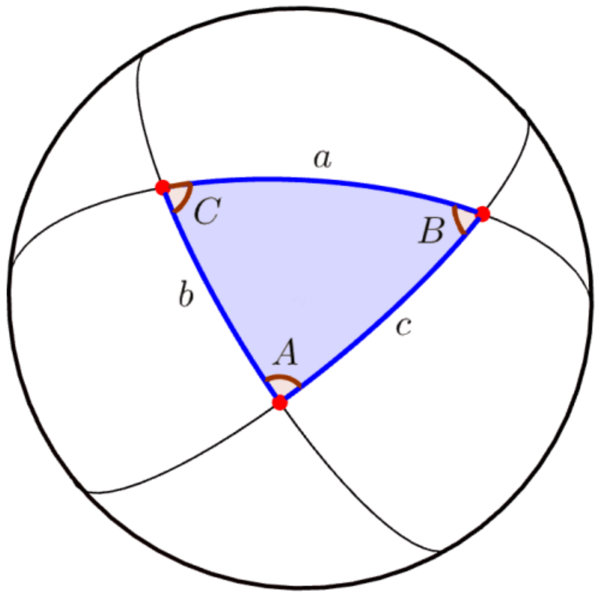
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o número de cada questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma ou mais questões, escreva uma folha declarando os números das questões não resolvidas, p. ex., "não respondi à Q1 e à Q2";
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 300 pontos);
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requererem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Ao final da prova, devolva as folhas utilizadas para resolução.
12. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \cdot 10^{6}$ m	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9{,}8$ m/s^2	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ m	
Distância média à Terra	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5{,}14°$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12{,}74$ mag	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	4,80 mag	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26{,}7$ mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ \mathrm{km\,s^{-1}}$	
Distância ao Centro Galático	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8{,}314\ \mathrm{N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	
Constante de Planck (h)	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s	
Massa do Próton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\mathrm{sen}(a)}{\mathrm{sen}(A)} = \frac{\mathrm{sen}(b)}{\mathrm{sen}(B)} = \frac{\mathrm{sen}(c)}{\mathrm{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \mathrm{sen}(b) \cdot \mathrm{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \mathrm{sen}(a) = \cot(B) \cdot \mathrm{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Área da elipse:

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Equação polar das cônicas:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

Questões

1. **Que calor! (5 pontos)** Qual seria o valor da constante solar se o Sol estivesse à mesma temperatura, mas com o dobro de seu raio e à metade de sua distância atual até a Terra? Deixe sua resposta em W/m^2.

Solução:

Pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$L = 4\pi \left(2R_\odot\right)^2 \sigma T_\odot^4 = 4 \cdot \left(4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4\right)$$

$$L = 4 \cdot L_\odot = 1{,}5 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}$$

A constante solar, portanto:

$$C = \frac{L}{4\pi \cdot d^2}$$

$$C = \frac{4 \cdot L_\odot}{4\pi \cdot (d_{T-S}/\,2)^2} = 16 \cdot \left(\frac{L_\odot}{4\pi \cdot d_{T-S}2)^2}\right)$$

$$C = 16 \cdot C_\odot \approx 21.800\,\mathrm{W/m^2}$$

Grade de Correção

1.: **5 pontos**

+ 2.0 Expressão para luminosidade da estrela (Lei de Stefan-Boltzmann).
+ 2.0 Expressão correta para o fluxo solar nas condições enunciadas.
+ 1.0 Valor numérico correto da nova constante solar.

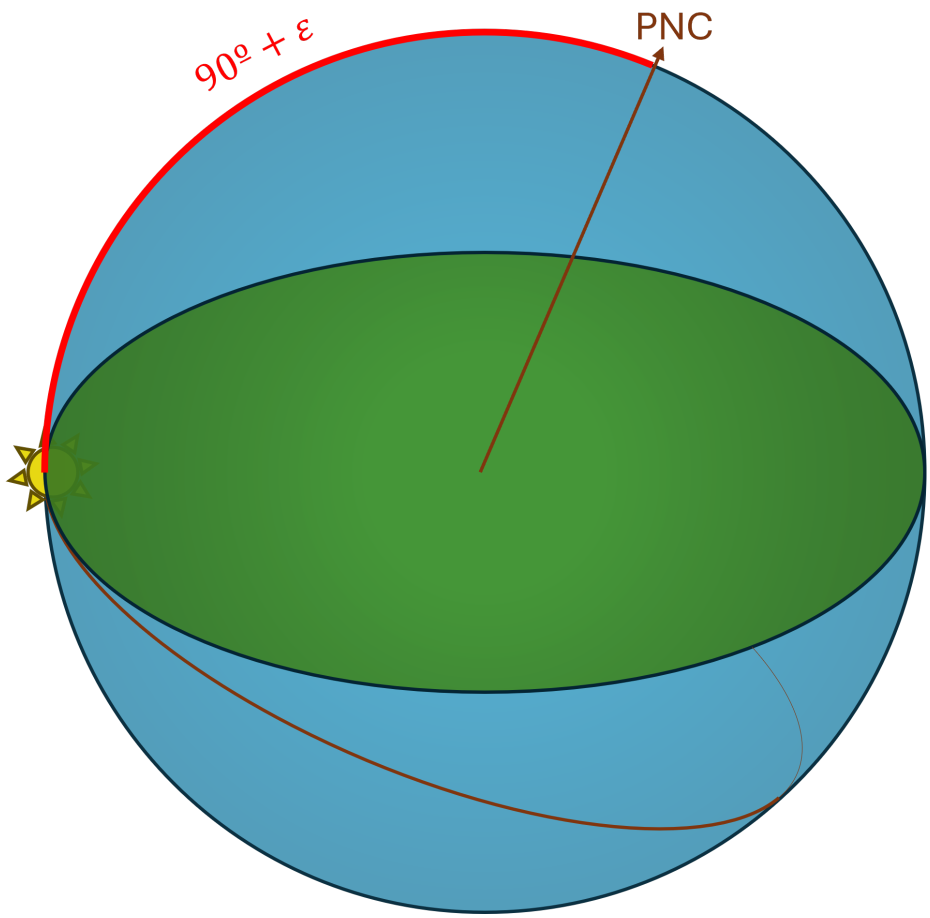
2. Que frio! (10 pontos) No natal do ano passado, Arthurzinho se revoltou por não ter ganhado seu presente e foi tirar satisfação lá na Escandinávia. Seu voo pousou em Svalbard durante a noite. Para não acordar o bom velhinho, Arthurzinho decidiu esperar o amanhecer antes de bater na porta, e esperou... Esperou... Esperou... Esperou... Passou o dia esperando sem ver o nascer do Sol!

(a) **(5 pontos)** Qual a menor latitude no Hemisfério Norte para a qual é possível passar um dia inteiro sem o Sol estar acima do horizonte? Desconsidere efeitos atmosféricos.

(b) **(5 pontos)** Arthurzinho passou aquela noite inteira observando as estrelas, e percebeu que Regulus (α Leo, $\alpha = 10^h 09^m 44^s$, $\delta = 11°50'33''$) parecia girar no céu: começou no alto, desceu, passou praticamente rente ao horizonte e depois voltou a subir. Determine a latitude de Arthurzinho.

Solução:

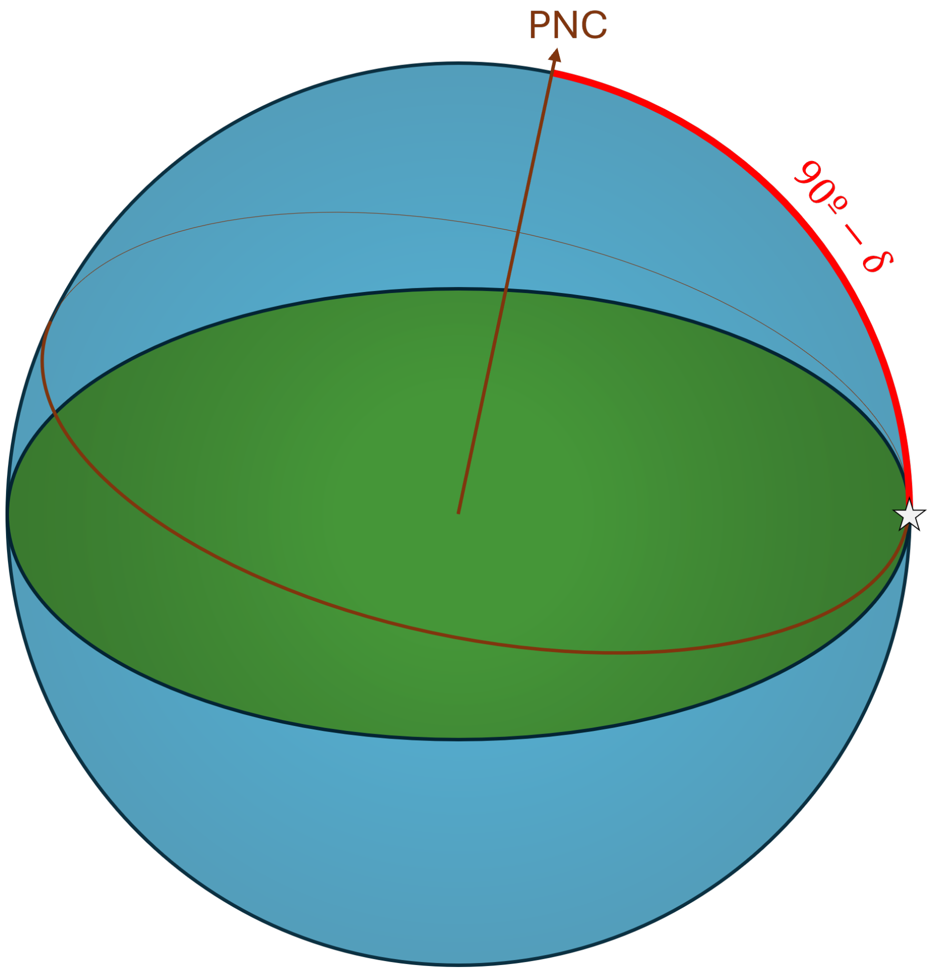
(a) Para atender a condição do enunciado, a culminação superior do Sol deve ocorrer no horizonte. Para encontrar a menor latitude possível, isso deve ocorrer no solstício de inverno do HN.



A latitude é a altura do Polo Elevado:

$$\varphi_{mín} = 90° - \varepsilon \approx 66{,}5°$$

(b) Podemos representar a situação a partir do esquema:



A latitude, portanto, é:

$$\varphi = 90^\circ - \delta \approx 78^\circ$$

Grade de Correção

Item a) **5 pontos**
+ 2.0 Compreender que a culminação superior do Sol deve ocorrer no horizonte.
+ 2.0 Demonstrar compreensão de que a situação proposta ocorre no Solstício de Inverno do HN.
+ 1.0 Valor numérico correto da latitude.

Item b) **5 pontos**
+ 2.0 Demonstrar ter identificado a ocorrência do fenômeno de circumpolaridade.
+ 3.0 Valor numérico correto da latitude.

3. Paralaxe (10 pontos) A primeira medição de uma paralaxe estelar ocorreu no início do século XIX por Friedrich Wilhelm Bessel. O astrônomo mediu a paralaxe da binária 61 Cyg, a uma distância de 11,3 anos luz da Terra. Estime **(i)** a paralaxe de 61 Cyg (em segundos de arco), e **(ii)** o diâmetro mínimo (em cm) de um telescópio capaz de resolver a máxima distância angular entre duas posições aparentes da estrela, em relação ao céu de fundo. Desconsidere efeitos atmosféricos e considere o comprimento de onda da luz visível centrado em 500 nm.

Solução:

A paralaxe de 61 Cyg pode ser calculada como:

$$p \approx \frac{1\,u.a. \ \cdot \ 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m/u.a.}}{11{,}3\,\text{anos-luz} \ \cdot \ 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m/ano-luz}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{rad} \approx 0{,}3''$$

A máxima distância entre duas posições aparentes é $2p$, ou seja, uma distância angular $\theta \approx 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ rad, o que necessita de um diâmetro mínimo dado por:

$$D \approx 1{,}22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}}{2{,}8 \cdot 10^{-6}}\,m \approx 0{,}2\,\text{m} = 20\,\text{cm}$$

Grade de Correção

+ 3 Equação correta para a paralaxe
+ 2 Valor numérico da paralaxe correto
+ 2 Uso do critério de Rayleigh
+ 1 Ângulo de resolução = 2p
+ 3 Valor numérico do diâmetro correto

4. **Calendário Tembé (20 pontos)** "O Céu dos Índios Tembé" é uma cartilha produzida pelo Planetário do Pará, a qual retrata percepções astronômicas e cosmológicas da cultura Tembé, no Alto Rio Guamá (próximo à linha do Equador).

   A divisão das estações do ano no calendário Tembé é bem diferente da nossa; são apenas duas: *kwarahy* (a estação da seca) e *aman* (a estação da chuva), cada uma ocupando aproximadamente metade do ano. Além disso, o conceito de constelação na cultura Tembé pode diferir do nosso. As constelações Tembé estão localizadas no *Tapi'ir Rape* (o Caminho da Anta, designação para a Via Láctea) e são formadas por regiões claras e escuras, além das estrelas. A cabeça de *Wiranu* (a Ema), por exemplo, é desenhada por uma região escura conhecida como Nebulosa do Saco de Carvão.

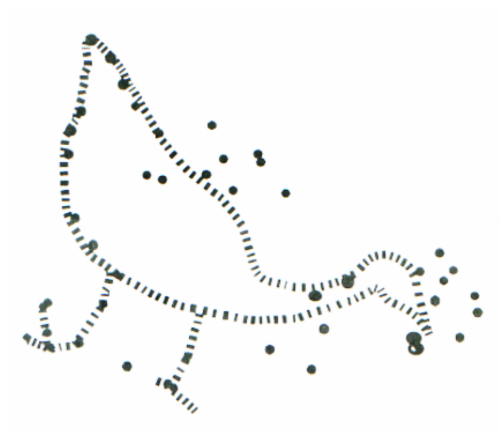


Figura 1: Representação esquemática de *Wiranu*, Retirado de *O Céu dos Índios Tembé*.

   Quando os Tembé percebem *Wiranu* inteiramente visível no lado leste logo após o anoitecer, é sabida a chegada de *kwahary*. Estime a época do ano em que ocorre cada troca de estação (de estação da chuva para estação da seca, e de estação da seca para estação da chuva), justificando sua resposta.

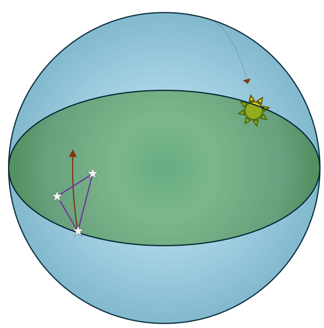
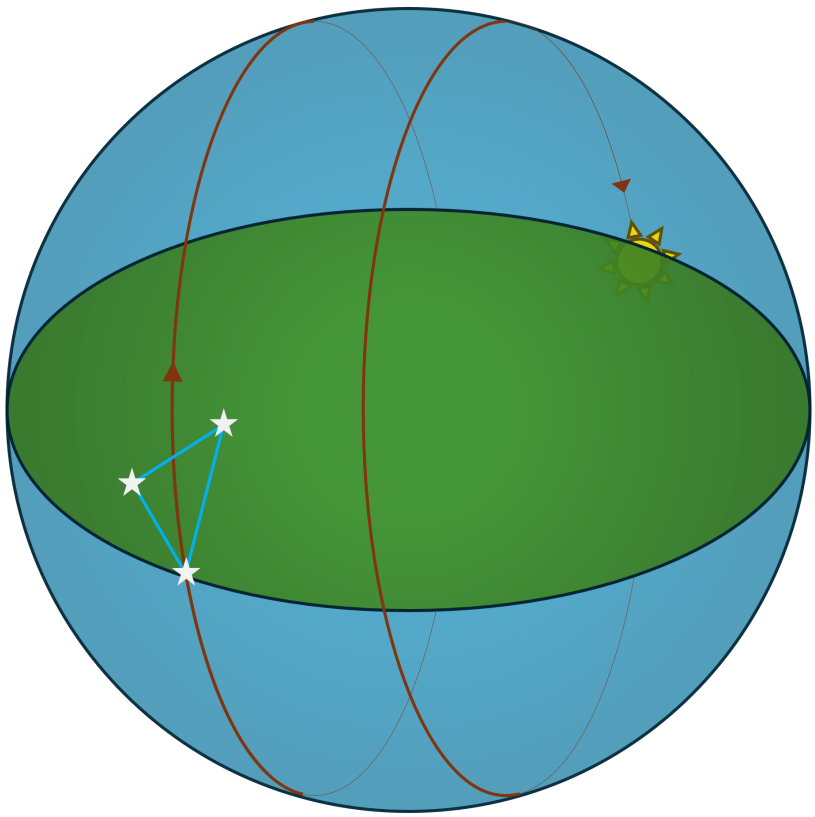


Figura 2: Representação esquemática do nascimento de um asterismo no lado leste logo após o anoitecer.

Solução:

Se um asterismo é inteiramente visível no lado leste logo após o pôr-do-Sol, então o seu elemento mais à leste nasce logo após o Sol se pôr. No Equador, isso significa que a estrela mais à leste tem ascensão reta oposta ao Sol.



Em realidade, o anoitecer ocorre por volta de uma hora após o pôr do Sol, o que faz com que a Ena já fosse inteiramente visível no céu noturno cerca de um mês antes do solstício. As aproximações foram adotadas por simplicidade.

Observando a representação da Ema, percebemos que a parte mais à leste é Escorpião, aonde fica o solstício de verão do hemisfério sul (mais especificamente, ι Sco, a qual está dez minutos distante do solstício). Assim, podemos estimar que *kwahary* se inicia quando o Sol está diametralmente oposto, ou seja, no solstício de verão do hemisfério norte.

Para que cada estação ocupe metade do ano, *aman* deve então se iniciar no solstício de verão do hemisfério sul.

Grade de Correção

4.: **20 pontos**

\+ 2.0 Perceber que a informação relevante é a porção mais à leste da constelação. Essa percepção pode ser expressa verbalmente ou por meio de uma ilustração que retrate a oposição de ascensão reta entre a estrela mais à leste e o Sol (de modo similar à figura fornecida, mas explicitando o leste). Caso a resolução se encerre com essa percepção, ou caso prossiga de forma incorreta, mas utilizando ideias que dependam dessa percepção, os pontos são atribuídos, entendendo que a informação explicitada foi percebida relevante, mesmo que o(a) candidato(a) não tenha conseguido desenvolvê-la. Caso a solução se conclua ignorando a informação (p. ex. argumento de seca/chuva por insolação), a pontuação não deve ser atribuída, pois o(a) candidato(a) demonstra que, apesar de representá-la, não a considerou relevante.

\+ 5.0 Porção mais à leste da Ema ser o Escorpião, ou identificação equivalente, i.e., que permita aplicar corretamente os próximos critérios de rubrica. Identificar o cruzeiro do sul, embora correto, não permite aplicar os próximos critérios, pois é a porção mais à leste da constelação. A pontuação se aplica mesmo que os itens posteriores não sejam alcançados, p. ex., não se consiga determinar a ascensão reta da região identificada, ou se determine incorretamente.

\+ 3.0 Argumento do início da estação das secas pela oposição de ascensão reta ou pela dinâmica celeste (qual constelação nasce em que período, mesmo sem atribuição de ascensão reta). A identificação da constelação e a atribuição de ascensão reta / época do ano corretamente já são avaliados em outros critérios de rubrica, cabendo a esse critério apenas a avaliação do raciocínio. A pontuação não é atribuída se utilizar equivocadamente o termo "oposição", "diametralmente oposto"ou equivalente, pois caracteriza erro conceitual, dado que não há restrição de declinação.

\+ 3.0 Argumento do início da estação das chuvas pela igualdade de ascensão reta ou pela dinâmica celeste (qual constelação nasce em que período, mesmo sem atribuição de ascensão reta). A identificação da constelação e a atribuição de ascensão reta / época do ano corretamente já são avaliados em outros critérios de rubrica, cabendo a esse critério apenas a avaliação do raciocínio. A pontuação não é atribuída se utilizou equivocadamente, no critério anterior, o termo "oposição", "diametralmente oposto"ou equivalente, pois caracteriza erro conceitual, dado que não há restrição de declinação.

\+ 2.0 Essa pontuação pode ser atribuída caso a resolução resolva o início de uma das estações, mas esqueça de mencionar o início da outra. A pontuação não é atribuída se o início da outra estação seguiu alternativas equivocadas, como argumentos por insolação ou pela generalização de aspectos climáticos locais.

\+ 7.0 Resposta final correta, i.e., atribuição correta da época do ano do nascimento de escorpião, e possivelmente da ascensão reta de escorpião como passo intermediário. A pontuação nesse critério exige a pontuação em todos os demais.

5. Uma tríade especial (30 pontos) Muito distantes do nosso mundo, existem três fascinantes estrelas, apelidadas de D4V1, HU60 e M4U1. Essa tríade é especial porque apresenta as seguintes propriedades:

- A estrela HU60, vista da estrela D4V1, está no limiar da visão humana a olho nu;
- A estrela D4V1, vista da estrela M4U1, está no limiar da visão humana a olho nu;
- A estrela M4U1, vista da estrela HU60, está no limiar da visão humana a olho nu.

Com base nessas informações e sabendo que as magnitudes absolutas de HU60 e D4V1 são $M_H = 3{,}6$ mag e $M_D = 4{,}7$ mag, respectivamente, faça o que se pede:

(a) **(15 pontos)** Determine o intervalo numérico, em mag, ao qual a magnitude absoluta de M4U1 deve pertencer.

(b) **(15 pontos)** Em uma situação arbitrária em que a magnitude absoluta de M4U1 tem um certo valor M_M (dentro do intervalo calculado no item anterior), o triângulo formado pelas estrelas apresenta os ângulos α, β e γ. Imagine agora que a magnitude absoluta de M4U1 aumentou para $M_M + 0{,}2$ (também dentro do intervalo). Se, hipoteticamente, as três estrelas pudessem se reposicionar de forma que todas as propriedades sempre fossem válidas, calcule quais deveriam ser os valores de M_H e M_D para que o novo triângulo formado possuísse os mesmos ângulos α, β e γ.

Solução:

(a) Em primeiro lugar, com os dados do enunciado, devemos calcular a distância entre HU60 e D4V1, d_1, e a distância entre D4V1 e M4U1, d_2. A partir do módulo de distância, temos:

$$m - M = 5 \log d - 5$$

$$d = 10^{(m-M+5)/5}$$

Com isso, utilizando que a magnitude limite do olho humano nu é $m = 6$, obtemos $d_1 = 30{,}2$ pc e $d_2 = 18{,}2$ pc. Pela desigualdade triangular, sabemos que a distância entre M4U1 e HU60, d_3, deve pertencer ao intervalo

$$d_1 - d_2 < d_3 < d_1 + d_2$$

$$12{,}0\, pc < d_3 < 48{,}4\, pc$$

Assim, iremos utilizar esses valores para calcular os limites máximo e mínimo da magnitude absoluta que M4U1 pode ter para que a configuração explicitada no enunciado seja válida:

$$M = m - 5 \log d + 5$$

Substituindo 12,0 pc e 48,4 pc na expressão acima, obtemos o seguinte intervalo para a magnitude absoluta de M4U1:

$$\boxed{2{,}6 < M_M < 5{,}6}$$

(b) Com o aumento da magnitude absoluta de M4U1, d_3 deve diminuir para que a terceira propriedade continue válida. Além disso, para que o novo triângulo possua os mesmos ângulos α, β e γ, as distâncias d_1 e d_2 também devem diminuir na mesma proporção. Vamos denotar com um $'$ as variáveis do problema na nova situação. Sendo k uma constante de proporcionalidade tal que $k = \frac{d_1'}{d_1} = \frac{d_2'}{d_2} = \frac{d_3'}{d_3}$, realizamos o desenvolvimento que segue:

$$k = \frac{10^{(m-M'+5)/5}}{10^{(m-M+5)/5}}$$

$$k = 10^{\left[(m-M'+5)/5-(m-M+5)/5\right]}$$

$$k = 10^{(M-M')/5}$$

Portanto, concluímos que, para que o triângulo diminua (ou aumente) em escala, conservando os ângulos correspondentes, devemos ter

$$\frac{M_H - M'_H}{5} = \frac{M_D - M'_D}{5} = \frac{M_M - M'_M}{5}$$

$$M_H - M'_H = M_D - M'_D = M_M - M'_M = M_M - (M_M + 0{,}2) = -0{,}2$$

$$M'_H = M_H + 0{,}2$$

$$M'_D = M_D + 0{,}2$$

Isto é, assim como a magnitude absoluta de M4U1 aumentou em 0,2 mag, as magnitudes absolutas de HU60 e D4V1 também deveriam aumentar em 0,2 mag. Como, nesse caso hipotético, as estrelas podem se reposicionar para preservar as propriedades da tríade, isso faria com que d_1, d_2 e d_3 diminuíssem na mesma proporção (e assim os ângulos seriam preservados). Dessa forma, os valores deveriam ser

$$\boxed{M'_H = 3{,}8}$$

$$\boxed{M'_D = 4{,}9}$$

Grade de Correção

Item a) **15 pontos**

+ 3.0 Cálculo correto da distância entre HU60 e D4V1 e da distância entre D4V1 e M4U1 pelo módulo de distância.
+ 7.0 Aplicação da desigualdade triangular (ou outra propriedade geométrica) para determinar o intervalo para a distância entre M4U1 e HU60.
+ 5.0 Intervalo correto para a magnitude absoluta de M4U1.

Item b) **15 pontos**

+ 1.0 Relação de semelhança de triângulos.
+ 4.0 Cálculo da constante de proporcionalidade para concluir que $M' = M + 0{,}2$.
+ 5.0 Resultado final correto para M'_H.
Resultado final correto para M'_D.

6. **Mudança Orbital (30 pontos)** Os satélites geoestacionários "Starlype" são de muita importância para o fornecimento de conexão à Internet em lugares remotos. O bilionário excêntrico Ualype não está satisfeito com a posição de um desses satélites, projetado exatamente sobre o meridiano de Greenwich e sobre a linha do Equador. Ele decide então mudar a sua posição de um jeito inusitado:

   (a) **(18 pontos)** Considere que o satélite geoestacionário em questão sofra um impulso, de modo a entrar numa órbita elíptica. Qual deve ser o ΔV do impulso para que o satélite chegue ao seu afélio com 86% da velocidade que ele tinha antes do impulso?

   Dado: equação vis-viva para cálculo de velocidade orbital

$$v^2 = GM \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

   (b) **(12 pontos)** Após realizar uma volta, o satélite sofre um impulso de novo, de modo a retornar à órbita geoestacionária. Qual será a longitude da projeção do satélite após essa manobra ?

Solução:

(a) Sejam v e r a velocidade do satélite e o raio orbital, ambos no regime geoestacionário. Ao entrar na nova órbita (semi-eixo maior a e excentricidade e), seu perigeu é r e sua velocidade de apogeu é $k \cdot v = k \cdot \sqrt{GM/r}$

$$\begin{cases} k \cdot \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM}{a} \cdot \dfrac{1-e}{1+e}} \\ r = a \cdot (1-e) \end{cases} \Rightarrow \left(1-k^2\right) + \left(-2-k^2\right) \cdot e + e^2 = 0 \tag{1}$$

$$e = \frac{2 + k^2 - \sqrt{8k^2 + k^4}}{2} \approx 0{,}1 \qquad \textit{(outra raiz não convém)}$$

Determinamos o raio de uma órbita geoestacionária pela terceira lei de Kepler:

$$r = \left(\frac{GM \cdot T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \mathrm{m} \approx 4{,}22 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

O semi-eixo maior da nova órbita, portanto, é:

$$a = \frac{r}{1-e} \approx \frac{4{,}22 \cdot 10^7\,\mathrm{m}}{1-0{,}1} \approx 4{,}68 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

O impulso, por fim, será a velocidade do perigeu menos a velocidade da órbita estacionária:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} - \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 150\,m/s$$

(b) O quanto o satélite se deslocou do meridiano original é determinado por quanto a Terra rotacionou até que ele voltasse para a posição da qual saiu. O intervalo de tempo da volta foi o período da órbita circular:

$$\Delta t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$$

Nesse período, a Terra rotacionou, para leste, um ângulo λ

$$\lambda = \frac{360^\circ}{86400\,\mathrm{s}} \cdot 1{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 420^\circ$$

Isso é equivalente a uma volta mais 60°. Como a Terra gira para leste, o satélite chega em uma longitude oeste, ou seja, 60° O.

Grade de Correção

Item a) (18 pontos):
+ 1 Fórmula polar no perigeu.
+ 1 Fórmula Polar no apogeu.
+ 1 Valor numérico correto do raio da órbita estacionária.
+ 1 Terceira Lei de Kepler.
+ 1 Valor numérico correto do semi-eixo maior da órbita após a manobra.
+ 1 Expressão para velocidade na órbita geoestacionário.
+ 1 Valor numérico correto da velocidade em órbita circular.
+ 3 Conservação da energia no ponto de impulso.
+ 4 Expressão para excentricidade da órbita final.
+ 1 Valor numérico correto da excentricidade da órbita final.
+ 2 Expressão correta para variação de velocidade no ponto de impulso.
+ 1 Valor numérico correto da variação de velocidade para alcançar a nova órbita.
Item b) (12 pontos):
+ 1 Terceira Lei de Kepler.
+ 3 Identificar corretamente o intervalo de tempo entre o primeiro e segundo impulso.
+ 1 Valor numérico correto do intervalo de tempo até o próximo impulso.
+ 1 Usar corretamente a velocidade angular da Terra.
+ 1 Calcular corretamente quantos graus a Terra rotacionou durante uma volta do satélite.
+ 4 Identificar que a Terra deu uma volta e $\frac{\pi}{3}$ radianos, fazendo o ponto de impulso ficar $\frac{\pi}{3}$ à oeste.
+ 1 Concluir corretamente que a longitude do satélite no último impulso é de $\frac{\pi}{3}$.

7. **Analema (30 pontos)** A seguir, está representada a imagem do analema do Sol, sobreposta durante um ano em determinada cidade. A partir da figura e de seus conhecimentos, indique cada alternativa como verdadeira (V) ou falsa (F), justificando brevemente suas respostas:

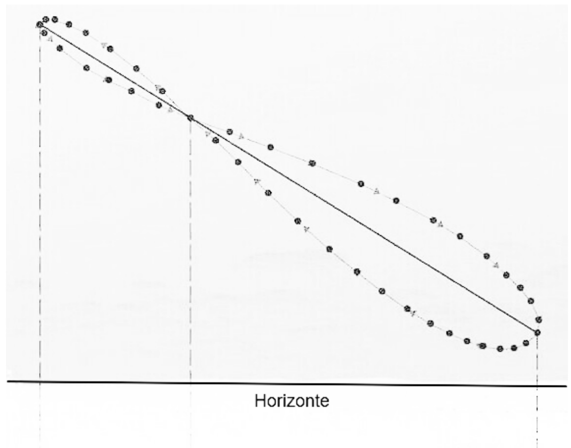


Figura 3: Respresentação do analema. Retirado do Acervo Wikipedia.

(a) **(5 pontos)** A imagem foi tirada com a câmera apontada, aproximadamente, para o ponto cardeal leste.

(b) **(5 pontos)** A linha menor, à direita, aponta para a posição do Sol no solstício de junho.

(c) **(5 pontos)** O analema é resultado de dois fatores: a obliquidade da eclíptica e a precessão dos equinócios.

(d) **(5 pontos)** O nó do analema (o encontro das "barrigas" maior e menor) ocorre durante os equinócios de outono e inverno.

(e) **(5 pontos)** A linha sólida que cruza o analema é paralela à eclíptica.

(f) **(5 pontos)** Se a obliquidade da eclíptica fosse nula, o analema seria colinear e contido no Equador.

Solução:

(a) V - A “barriga” menor do analema do Sol está inteiramente no hemisfério celeste norte, o que ocasiona o ponto cardeal norte está à esquerda da imagem, enquanto que o ponto cardeal sul, estará a direita. Dessa forma, a imagem está voltada para o ponto que está no meio deles, o ponto cardeal leste.

(b) F - O ponto mais afastado da “barriga” maior ocorre durante o solstício de dezembro.

(c) F - O analema é resultado da obliquidade da eclíptica, da excentricidade da órbita terrestre e da inclinação da linha das apsides, mas independe, em primeira aproximação, da precessão dos equinócios, uma vez que a oscilação dos Polos não acumula efeito significativo no decorrer de um ano.

(d) F - Os equinócios ocorrem na mediatriz do segmento de reta que liga os pontos mais afastados das “barrigas” menor e maior do analema. Não ocorrendo, no ponto de encontro delas.

(e) F - A linha sólida central é um meridiano.

(f) V - Se a obliquidade da eclíptica fosse nula, então a declinação do Sol seria sempre zero, ou seja, as posições que ele ocupa estariam sempre no Equador, portanto colineares.

Grade de Correção

Item a) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

Item b) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

Item c) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

Item d) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

Item e) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

Item f) **5 pontos**
+ 2.0 Item correto.
+ 3. Justificativa correta.

8. Sistema Binário (40 pontos) Um astrônomo amador observou ao longo de anos um sistema binário *edge-on* e com os semi-eixos maior das órbitas perpendiculares à linha de visada. Ele conseguiu concluir que a razão entre as massas era de $M_2/M_1 = 4{,}9$, em que M_1 e M_2 são as massas das estrelas 1 e 2, respectivamente. Foi observado que o menor intervalo de tempo entre o periastro e o apoastro é de 1,7 ano. Ele fotografou esses dois momentos (veja figura abaixo): em $t = 0$ ocorreu o apoastro e a separação entre as estrelas era de $\theta_a = 1{,}45''$. Em $t = 1{,}7$ ano ocorreu o periastro e a separação era de $\theta_p = 0{,}22''$.

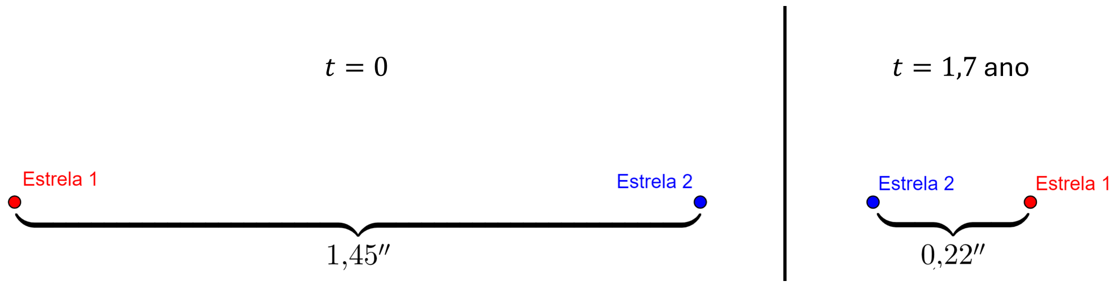


Figura 4: Ilustração das fotografias das estrelas nos momentos de apoastro e periastro, respectivamente (fora de escala).

(a) **(16 pontos)** Encontre a excentricidade e das órbitas.

(b) **(24 pontos)** Sabendo que o sistema estava a uma distância $d = 8{,}5\,\mathrm{pc}$ da Terra, encontre as massas M_1 e M_2, assim como os semi-eixos maiores a_1 e a_2.
Dado: terceira lei de Kepler para sistemas binários

$$\frac{T^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)}$$

Solução:

(a) As distâncias da estrela 1 ao centro de massa no periastro e no apoastro são, respectivamente, $R_p = a_1(1-e)$ e $R_a = a_1(1+e)$. Já as distâncias da estrela 2 ao CM no periastro e no apoastro são, respectivamente, $r_p = a_2(1-e)$ e $r_a = a_2(1+e)$. Dessas expressões concluímos que as distâncias $(R_a + r_p)$ e $(R_p + r_a)$ são

$$(R_a + r_a) = (a_1 + a_2)(1 + e) \tag{2}$$

e

$$(R_p + r_p) = (a_1 + a_2)(1 - e). \tag{3}$$

Perceba que as separações angulares θ_a e θ_p correspondem respectivamente às distâncias $(R_a + r_a)$ e $(R_p + r_p)$, isto é,

$$(R_a + r_a) = d \cdot \theta_a \qquad (R_p + r_p) = d \cdot \theta_p. \tag{4}$$

Logo, dividindo a equação (2) pela equação (3), obtemos

$$\frac{\theta_a}{\theta_p} = \frac{(R_a + r_a)}{(R_p + r_p)} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e = \frac{1 - \frac{\theta_p}{\theta_a}}{1 + \frac{\theta_p}{\theta_a}} \Rightarrow \boxed{e \approx 0{,}74}. \tag{5}$$

(b) Somando as equações (2) e (3) temos

$$(R_a + r_a) + (R_p + r_p) = 2(a_1 + a_2) \Rightarrow (a_1 + a_2) = \frac{d \cdot (\theta_a + \theta_p)}{2} \Rightarrow (a_1 + a_2) \approx 7{,}1\,\mathrm{UA}. \tag{6}$$

Para obter as massas, obtemos primeiramente a soma das massas $M_1 + M_2$ pela terceira lei de Kepler usando o fato que o período orbital é $T = 2 \cdot 1{,}7\,\text{anos} = 3{,}4\,\text{anos}$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{G(M_1 + M_2)} \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{GT^2} \Rightarrow M_1 + M_2 \approx 31{,}0\,\mathrm{M}_\odot \tag{7}$$

e pela razão entre as massas concluímos que

$$\frac{M_2}{M_1} = 4{,}9 \Rightarrow 5{,}9M_1 = M_1 + M_2 \approx 31{,}0\,\mathrm{M}_\odot \tag{8}$$

da qual obtemos M_1 e consequentemente M_2:

$$\boxed{M_1 \approx 5{,}3\,\mathrm{M}_\odot \qquad \text{e} \qquad M_2 \approx 26\,\mathrm{M}_\odot}. \tag{9}$$

Para encontrar a_1 e a_2 basta lembrar que em um sistema binário

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} = 4{,}9. \tag{10}$$

Logo $(a_1 + a_2) = 5{,}9a_2$ e como temos $(a_1 + a_2) \approx 7{,}1\,\mathrm{UA}$ concluímos que

$$\boxed{a_1 \approx 5{,}9\,\mathrm{UA} \qquad \text{e} \qquad a_2 \approx 1{,}2\,\mathrm{UA}}. \tag{11}$$

Grade de Correção

Item a) (16 pontos):
+ 2 Fórmula polar das estrelas no apogeu.
+ 2 Fórmula polar das estrelas no perigeu.
+ 6 Relação entre a separação das estrelas e o os seus raios orbitais.
+ 4 Relação entre a razão das separações e excentricidade.
+ 2 Valor numérico excentricidade.

Item b) (24 pontos):
+ 4 Achar o valor da soma do semieixo maior das órbitas.
+ 6 Aplicar a terceira Lei de Kepler para achar a soma das Massas das estrelas.
+ 4 Achar o valor numérico de M1 e M2.
+ 6 Equação que relacione as massas e semieixos maiores entre as estrelas.
+ 4 Achar o valor numérico de a1 e a2.

9. Gira-gira Planetário (50 pontos) Durante muitos séculos, modelos geocêntricos foram creditados como descrições precisas das dinâmicas planetárias. No entanto, mesmo as modelagens geocêntricas, como a de Ptolomeu, admitiam a órbita de Vênus e Mercúrio ao redor do Sol. Nessa questão, vamos estudar previsões obtidas se essa consideração não for realizada, ou seja, previsões de um modelo puramente geocêntrico.

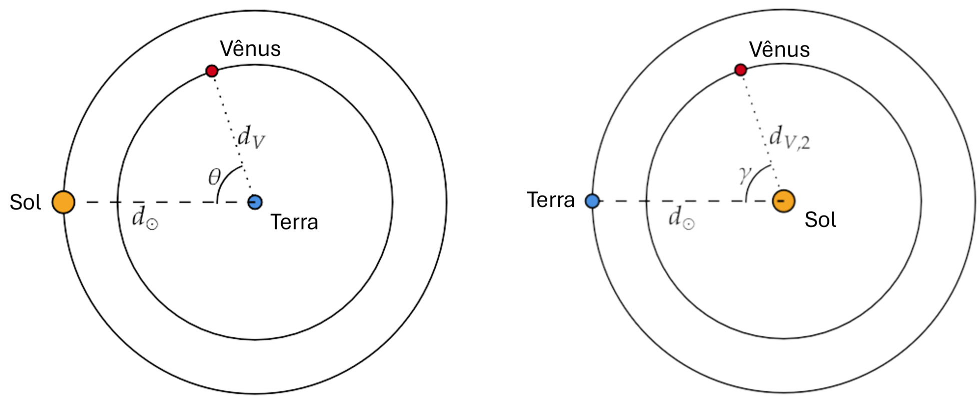


Figura 5: Representação de um modelo puramente geocêntrico (à esquerda) e um modelo heliocêntrico (à direita).

a) **(20 pontos)** Determine a fração iluminada de Vênus, $A_{iluminada}/A_{visível}$, em função do ângulo ϵ entre o Sol e a Terra, com vértice em Vênus. Considere a área **plana** da projeção para um observador na Terra.

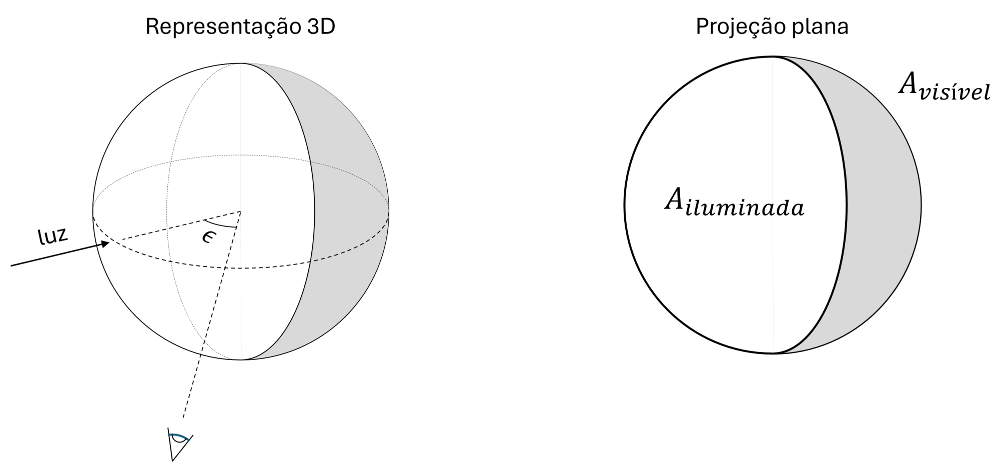


Figura 6: Representação do terminador tanto tridimensional (à esquerda), quanto sua projeção plana (à direita). As indicações de área se referem às áreas das figuras planas na projeção.

b) **(12 pontos)** Considerando o modelo puramente geocêntrico, i.e., em que Vênus orbita ao redor da Terra, expresse a fração iluminada do planeta em função dos parâmetros geométricos apresentados na figura.

c) **(12 pontos)** Considerando o modelo heliocêntrico, expresse a fração iluminada de Vênus em função dos parâmetros geométricos apresentados na figura.

d) **(6 pontos)** A imagem a seguir mostra Vênus em sua fase cheia. Para cada um dos modelos, encontre o valor do respectivo ângulo (θ ou γ) em que Vênus precisa estar para ser visto nessa fase.

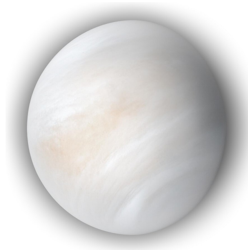
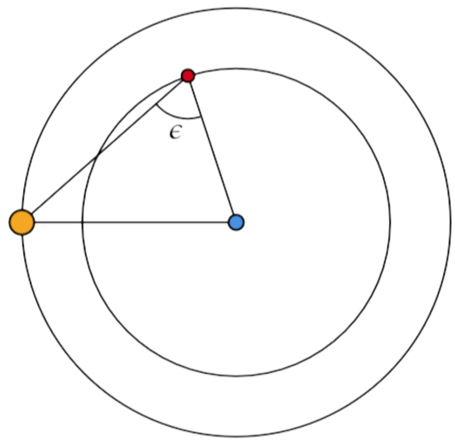


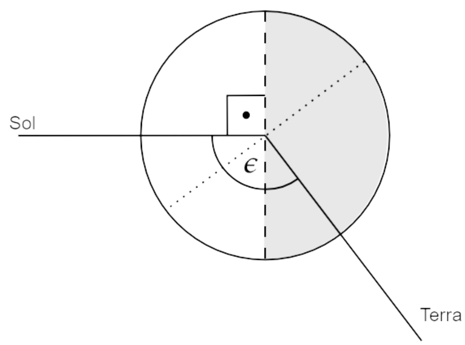
Figura 7: Fotografia de Vênus pela missão Mariner 10. Tratamento das imagens por NASA/JPL-Caltech.

Solução:

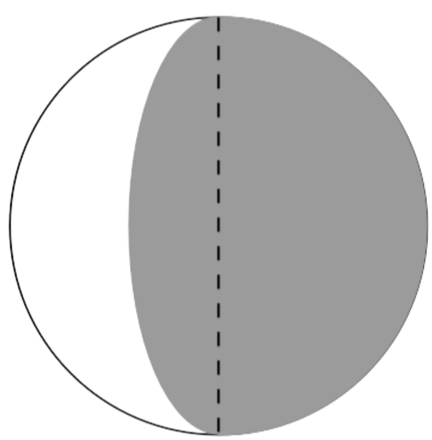
a) Antes de passarmos para os parâmetros geométricos necessários, analisaremos o problema em função do ângulo entre o Sol e a Terra, visto de Vênus (ϵ):



Representando as linhas que conectam o centro de Vênus ao Sol e à Terra, em uma visão de cima do planeta, obtemos a seguinte figura:



Agora, com uma visualização frontal do planeta, ou seja, a projeção dele na esfera celeste:



Nessa configuração, a área visível aparente de Vênus de frente é um círculo de raio R. Já a área iluminada visível corresponde à metade desse círculo menos a área de uma elipse com semieixos R e $R\sin(\epsilon - 90°)$. Assim, a razão desejada η é dada por:

$$A_{\text{ilum}} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2 \sin(\epsilon - 90°)}{2}$$

$$\eta = \frac{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2 \cos\epsilon}{2}}{\pi R^2}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1 + \cos\epsilon}{2}}. \tag{12}$$

b) Para relacionar o cosseno do ângulo ϵ com os parâmetros geométricos do problema, aplicamos a Lei dos Cossenos no triângulo formado pelas linhas que conectam a Terra, o Sol e Vênus. Considerando d como a distância entre o Sol e Vênus, temos:

$$d^2 = d_\odot^2 + d_V^2 - 2d_\odot d_V \cos\theta$$

$$d_\odot^2 = d^2 + d_V^2 - 2dd_V \cos\epsilon$$

Somando essas equações:

$$0 = 2d_V^2 - 2d_\odot d_V \cos\theta - 2dd_V \cos\epsilon$$

$$\cos\epsilon = \frac{d_V - d_\odot \cos\theta}{d}$$

$$\boxed{\cos\epsilon = \frac{d_V - d_\odot \cos\theta}{\sqrt{d_\odot^2 + d_V^2 - 2d_\odot d_V \cos\theta}}} \tag{13}$$

Substituindo a expressão acima na fórmula de η:

$$\boxed{\eta = \frac{1 + \frac{d_V - d_\odot \cos\theta}{\sqrt{d_\odot^2 + d_V^2 - 2d_\odot d_V \cos\theta}}}{2}} \tag{14}$$

c) Para o modelo heliocêntrico, a expressão de η com o ângulo ϵ permanece a mesma. No entanto, os parâmetros geométricos mudam. Aplicando o mesmo raciocínio do item anterior, agora considerando o triângulo com os parâmetros heliocêntricos, obtemos:

$$d_2^2 = d_\odot^2 + d_{V,2}^2 - 2d_\odot d_{V,2} \cos\gamma$$

$$d_\odot^2 = d_2^2 + d_{V,2}^2 - 2d_2 d_{V,2} \cos\epsilon.$$

Seguindo o mesmo procedimento:

$$\cos\epsilon = \frac{d_{V,2} - d_\odot \cos\gamma}{d_2}$$

$$\boxed{\cos\epsilon = \frac{d_{V,2} - d_\odot \cos\gamma}{\sqrt{d_\odot^2 + d_{V,2}^2 - 2d_\odot d_{V,2} \cos\gamma}}}. \tag{15}$$

Substituindo essa expressão na fórmula de η:

$$\boxed{\eta = \frac{1 + \frac{d_{V,2} - d_\odot \cos\gamma}{\sqrt{d_\odot^2 + d_{V,2}^2 - 2d_\odot d_{V,2} \cos\gamma}}}{2}}. \tag{16}$$

d) A fase cheia de Vênus ocorre quando a razão $\eta = 1$:

$$\eta = 1 \implies 1 + \cos\epsilon = 2 \implies \cos\epsilon = 1$$

Que, ao substituir nas expressões encontradas nos itens anteriores, encontra-se que:

$$d_V - d_\odot \cos\theta = \sqrt{d_\odot^2 + d_V^2 - 2d_\odot d_V \cos\theta}$$

$$\boxed{\cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 180^\circ}$$

Pois, para se ter a fase cheia, é necessário que Sol e Vênus estejam em lados opostos do céu no modelo geocêntrico. Enquanto que, para o modelo heliocêntrico, o valor numérico será o mesmo. No entanto, agora, o planeta estará do mesmo lado que a estrela, possibilitando a ocorrência da fase cheia antes da meia-noite, o que era impossível no primeiro modelo.

Grade de Correção

Item a) (20 pontos):
+ 4 Representação geométrica da vista frontal de Vênus com sua fração iluminada e perceber que a parte iluminada é formada por meio círculo menos meia elipse ou equivalente (escrever que a área iluminada é meio círculo menos meia elipse)
+ 6 Encontrar a área iluminada pelo Sol que é visível da Terra
+ 2 Encontrar a área total vísivel de Vênus a partir da Terra
+ 8 Expressão que relaciona o ângulo entre Terra e Sol visto de Vênus e o ângulo de fase ou equivalente (encontrar a equação 12)
Item b) (12 pontos):
+ 3 Escrever a lei dos cossenos para o triângulo Terra-Vênus-Sol ou equivalente
+ 5 Expressão para $\cos\epsilon$ ou equivalente
+ 4 Expressão para o ângulo de fase em função dos parâmetros requisitados
Item c) (12 pontos):
+ 3 Escrever a lei dos cossenos para o triângulo Terra-Vênus-Sol ou equivalente
+ 5 Expressão para $\cos\epsilon$ ou equivalente
+ 4 Expressão para o ângulo de fase em função dos parâmetros requisitados
Item d) (6 pontos):
+ 3 Por encontrar o valor de θ igual a 180°
+ 3 Por encontrar o valor de γ igual a 180°
- 2 Caso considere 0° como solução para θ
- 2 Caso considere 0° como solução para γ

10. 2024 YR4 (75 pontos) O recém-descoberto asteroide 2024 YR4 tem chamado muita atenção pela sua probabilidade de colisão com a Terra em 22 de Dezembro de 2032, atualmente estimada ao redor de 3% segundo a NASA. Apesar da chance pequena, cientistas ao redor do mundo têm estudado o asteroide e monitorado com atenção a sua órbita de forma a entender melhor as reais chances de impacto e suas consequências.

Considere que o asteroide encontra-se em uma órbita elíptica heliocêntrica de distância periélica 0,85 UA. Despreze a inclinação da órbita em relação ao plano da eclíptica e saiba que o asteroide orbita no mesmo sentido da Terra. O intervalo de tempo entre as duas próximas aproximações da Terra é de $\Delta t = 4$ anos. Considere a órbita da Terra circular de raio 1 UA.

(a) **(10 pontos)** Calcule a excentricidade (e) e o semi-eixo maior (a) em UA da órbita de 2024 YR4.

(b) **(10 pontos)** Calcule a velocidade do asteroide em sua aproximação da Terra, em km/s.

(c) **(18 pontos)** Determine o menor ângulo, em graus, entre a órbita da Terra e a órbita do Asteroide no momento de aproximação da Terra.

(d) **(12 pontos)** Calcule, em km/s, a velocidade do asteroide no referencial da Terra no momento da aproximação.

(e) **(25 pontos)** Agora, analisaremos o movimento do asteroide durante a aproximação da Terra—isto é, nas redondezas do planeta, onde a influência gravitacional da Terra torna-se mais relevante que a do Sol. Considere que o asteroide, no referencial geocêntrico, se aproxima da Terra do infinito com a velocidade calculada no item anterior e parâmetro de impacto b. Se o parâmetro de impacto estiver no intervalo

$$0 \leqslant b \leqslant b_{max}$$

o asteroide colidirá com a superfície da Terra. Considerando apenas a atração gravitacional terrestre e utilizando conservação de energia e momento angular, encontre b_{max}, em km.

OBS: O parâmetro de impacto é a distância mínima que o asteroide passaria da Terra caso ele se movesse em movimento retilíneo e uniforme, na ausência de atração gravitacional.

Solução:

(a) Note que, sendo o tempo entre as duas aproximações sucessivas da Terra igual a 4 anos, a Terra deve ter completado 4 translações entre os dois eventos, retornando ao ponto de encontro inicial. Sendo assim, as duas aproximações devem acontecer no mesmo ponto da órbita, logo, o dado fornecido corresponde, de fato, ao período orbital do Cometa. Assim, pela terceira Lei de Kepler:

$$\left(\frac{a}{1\ \text{UA}}\right)^3 = \left(\frac{P}{1\ \text{ano}}\right)^2 \to \boxed{a = (4)^{2/3} = 2{,}5\ \text{UA}}$$

E, pela distância periélica:

$$d_p = a(1-e) \to \boxed{e = 0{,}66}$$

(b) Utilizando a Equação de Vis-Viva para $r = 1$ UA (aproximação da Terra), temos:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}998 \times 10^{30}}{1{,}496 \times 10^{11}}\left(2 - \frac{1}{2{,}5}\right)}\ \text{m/s} \\ &\approx \boxed{37{,}8\ \text{km/s}} \end{aligned}$$

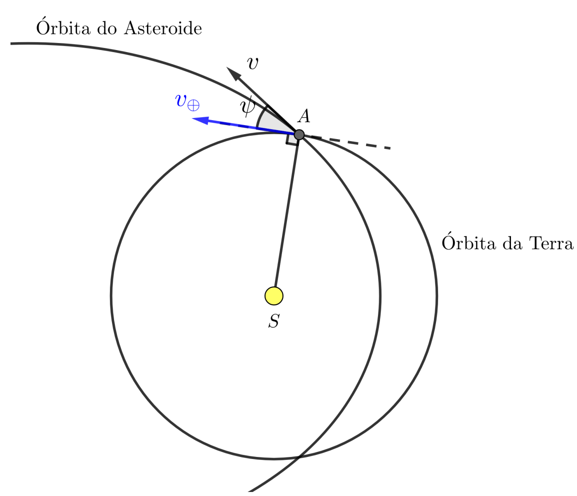
(c) Seja ψ o ângulo buscado temos, por conservação de momento angular:

$$\begin{aligned} \frac{L}{m} = \sqrt{GMa(1-e^2)} &= rv_\perp \\ \sqrt{GMa(1-e^2)} &= a_\oplus v \cos\psi \end{aligned}$$

Em que $a_\oplus = 1$ UA. Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \psi &= \arccos\left(\frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{a_\oplus v}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}998 \times 10^{30} \times 2{,}5 \times 1{,}496 \times 10^{11}}}{37{,}8 \times 10^3 \times 1{,}496 \times 10^{11}}\right) \\ &= 0{,}3495\ \text{rad} \approx \boxed{20^\circ} \end{aligned}$$

(d) Esquematizando a situação:



Em que A é o asteroide e S o Sol. Chame de v_∞ o módulo da velocidade do asteroide no referencial da Terra e $v_\oplus$ o módulo da velocidade da Terra em sua órbita. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, o módulo da velocidade do asteroide no referencial da Terra é dado por

$$v_\infty^2 = (v_\oplus - v\cos\psi)^2 + (v\sin\psi)^2$$

E sabemos que a velocidade orbital da Terra é dada por $v_\oplus = \sqrt{\frac{GM}{a_\oplus}} \approx 29{,}8$ km/s. Logo:

$$v_\infty^2 = (29{,}8 - 37{,}8\cos 20^\circ)^2 + (37{,}8\sin 20^\circ)^2$$

$$\boxed{v_\infty \approx 14 \text{ km/s}}$$

(e) Seja r_{min} a distância de máxima aproximação da Terra e u a velocidade do asteroide nesse momento. Utilizando conservação de momento angular entre o infinito e a máxima aproximação da Terra:

$$v_\infty b = u r_{min} \rightarrow u = \frac{v_\infty b}{r_{min}}$$

E, por conservação de energia mecânica:

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{u^2}{2} - \frac{GM}{r_{min}}$$

Substituindo u obtido anteriormente: Na situação de colisão devemos ter $r_{min} = R_\oplus$.

$$r_{min}^2 + \frac{2GM}{v_\infty^2} r_{min} - b^2 = 0$$

$$b = R_\oplus \sqrt{1 + \frac{2GM}{v_\infty^2 R_\oplus}}$$

Inserindo valores numéricos:

$$b = 6{,}37 \times 10^3 \times \sqrt{1 + \frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{(14 \times 10^3)^2 \times 6{,}37 \times 10^6}} \text{ km}$$

$$\boxed{b \approx 8{,}15 \times 10^3 \text{ km}}$$

Grade de Correção

Item a) (10 pontos):
+ 2 Identificar corretamente o período orbital do cometa.
+ 2,5 Terceira Lei de Kepler.
+ 1,5 Valor correto do semi eixo maior da órbita do cometa.
+ 2,5 Forma polar no periélio.
+ 1,5 Valor correto da excentricidade da órbita do cometa.
Item b) (10 pontos):
+ 2 Identificar que

$$r \approx 1\,\mathrm{UA}$$

.
+ 3 Equação vis viva.
+ 5 Velocidade orbital correta do cometa ao passar próximo da Terra.
Item c) (18 pontos):
+ 2 Expressão do momento angular.
+ 4 Momento angular no periélio.
+ 4 Momento angular ao passar pela Terra.
+ 5 Conservação do momento angular.
+ 3 Valor correto do ângulo ψ.
Item d) (12 pontos):
+ 2,5 Velocidade radial do cometa em relação à Terra.
+ 2 Velocidade orbital da Terra.
+ 2,5 Velocidade tangencial do cometa em relação à Terra.
+ 3 Expressão correta para o módulo da velocidade do cometa em relação à Terra.
+ 2 Valor correto da velocidade do cometa em relação à Terra ao passar em sua proximidade.
Item e) (25 pontos):
+ 1,5 Expressão para o momento angular.
+ 3 Momento angular do cometa infinitamente distante.
+ 3 Momento angular do cometa na máxima aproximação.
+ 5 Conservação do momento angular.
+ 4 Conservação da energia.
+ 1,5 Relacionar as expressões para eliminar a velocidade no infinito.
+ 5 Obter uma expressão para b.
+ 2 Valor correto de b.