



PROVA TEÓRICA P1
SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS
OLIMPIÁDAS INTERNACIONAIS DE 2024

Instruções Gerais

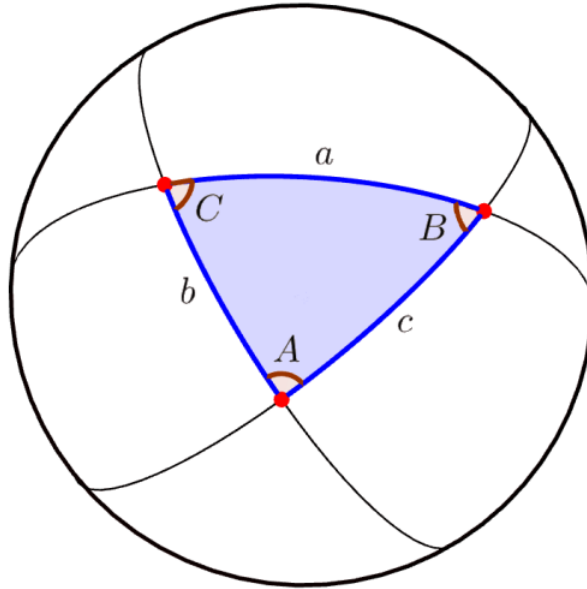
1. Identifique seu número de candidato(a) em **TODAS** as folhas de respostas. Não coloque mais nenhum meio de identificação pessoal;
2. Escreva o Número de cada Questão nas folhas de respostas;
3. Enumere as folhas de resposta em ordem crescente com o número das questões. A enumeração não deve reiniciar a cada questão;
4. Se não responder a uma questão, faça upload de uma folha escrito "em branco" e associe às questões correspondentes;
5. A duração da prova é de 4 horas;
6. A prova é composta por 9 questões (totalizando 250 pontos) e tem peso 3 na composição da média final.;
7. A prova é individual e sem consultas;
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
9. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
10. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas. Serão desconsideradas as respostas que requerem, mas não apresentarem, as devidas explicações e desenvolvimentos matemáticos.
11. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada.

Tabela de Constantes

Massa (M_{\oplus})	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg	Terra
Raio (R_{\oplus})	$6,38 \cdot 10^6$ m	
Aceleração da gravidade superficial (g_{\oplus})	$9,8$ m/s ²	
Obliquidade da Eclíptica	$23^{\circ}27'$	
Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Dia sideral	23h 56min 04s	
Massa	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg	Lua
Raio	$1,74 \cdot 10^6$ m	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^8$ m	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14^{\circ}$	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia média)	-12,74 mag	
Massa (M_{\odot})	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	Sol
Raio (R_{\odot})	$6,96 \cdot 10^8$ m	
Luminosidade (L_{\odot})	$3,83 \cdot 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta (M_{\odot})	4,80 mag	
Magnitude Aparente (m_{\odot})	-26,7 mag	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	220 km s ⁻¹	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
Diâmetro da pupila humana	6 mm	Distâncias e tamanhos
Magnitude limite do olho humano nu	+6 mag	
1 UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m	
1 pc	206 265 UA	
Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m ² · kg ⁻²	Constantes Físicas
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314$ N · m · mol ⁻¹ · K ⁻¹	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K ⁻¹	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴	
Constante de Deslocamento de Wien (b)	$2,90 \cdot 10^{-3}$ m · K	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8$ km · s ⁻¹ · Mpc ⁻¹	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^8$ m/s	
Massa do Próton	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	656 nm	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

Lei dos cossenos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot \cos(A)$$

Lei dos quatro elementos:

$$\cot(b) \cdot \text{sen}(a) = \cot(B) \cdot \text{sen}(C) + \cos(a) \cdot \cos(C)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = \cdot 4\pi R^2 \sigma T^4$$

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

- Lei de Hubble-Lemaître:

$$v = H_0 \cdot d$$

Questões

1. Declinação Lunar (15 pontos)

No dia 20 de março, Paulo decide estimar a declinação de seu objeto astronômico favorito: a Lua! Para tanto, ele utiliza seu telescópio newtoniano e alinha a montagem equatorial ao polo celeste elevado. Inicialmente, ele mede o tempo que o centro do Sol leva para percorrer o diâmetro do campo de visão da lente ocular do telescópio, obtendo $t_{\odot} = 312 \text{ s}$. Mais tarde, ele repete o procedimento, mas apontando para a Lua, cronometrando $t_L = 346 \text{ s}$. Sabendo que o dia lunar tem duração de $T_L = 24h50min$, qual o módulo da declinação da Lua, em graus, estimada por Paulo?

2. Encontre a estrela (10 pontos)

Uapyle estava acompanhando a trajetória de sua estrela favorita no céu. Duas horas depois de nascer, ela atingiu uma altura igual ao número da sorte de Uapyle.

Ele queria tirar uma foto da estrela a essa altura, mas se distraiu e a perdeu. Ajude-o e calcule qual o menor tempo que ele precisará esperar para que a estrela tenha novamente essa altura.

Dado: a estrela passa $T = 10$ horas no céu.

3. Os Satélites (15 pontos)

Shell decidiu lançar alguns satélites caseiros para gerar imagens da Terra. Ele estava particularmente interessado na região da Linha do Equador e optou por começar seu experimento com satélites geoestacionários.

- (10 pontos)** Qual é a menor quantidade de satélites que Shell precisa lançar para conseguir captar simultaneamente imagens da totalidade do Equador?
- (5 pontos)** Insatisfeito com as imagens obtidas na sua primeira tentativa, Shell decidiu trazer os satélites inicialmente geoestacionários para uma órbita ainda equatorial e circular, mas um pouco mais próxima da Terra. Qual deve ser o raio mínimo da nova órbita para que Shell ainda consiga gerar imagens de toda a Linha do Equador simultaneamente sem precisar aumentar o número de satélites?

4. Estrela de Nêutrons (20 pontos)

RX J1856.5-3754 é a estrela de nêutrons conhecida mais próxima à Terra. Entre todas as estrelas de nêutrons, ela é uma das únicas com espectro puramente de corpo negro, pois seu espectro não é afetado pela contaminação da atividade magnetosférica, de uma nebulosa circundante ou de um resto de supernova.

Ela possui um raio de $R = 3,05R_S$, em que R_S é seu raio de Schwarzschild, está localizada a uma distância $d = 120 \text{ pc}$ da Terra e sua magnitude bolométrica é $m_{bol} = 14,1$. Da Terra, observa-se que o pico de seu espectro é em $\lambda_{obs} = 6,7 \text{ nm}$.

A velocidade radial da estrela é relativamente pequena e pode ser desprezada para o cálculo do redshift. A fórmula do redshift gravitacional é dada por

$$1 + z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}$$

- (10 pontos)** Encontre a temperatura efetiva T_{ef} da estrela.
- (10 pontos)** Encontre a massa M .

5. Velut Luna (35 pontos)

- Pelo luar, céus, obri...

Maritana sorria para a Lua, e a Lua sorria para Maritana, mas o lenço negro da noite não eclipsou a variável cruel das selenatas:

- ...Afinal, quanto de ti eu vejo em teu sorriso?

Seja θ o ângulo entre a Lua e o Sol para um observador na Terra ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$), determine a expressão que relaciona o ângulo θ à porcentagem da área superficial da Lua visível para esse observador.

Obs: Por "área superficial da Lua", entenda a área física da superfície esférica do astro, não a "área projetada" do disco lunar

6. Sistema Solar Eclipsante (25 pontos)

Uma estrela de raio $R_s = R_\odot$ é orbitada por dois planetas, um mais interno que o outro. O primeiro possui raio igual a $R_p = 7 \cdot 10^7 \text{m}$ e possui uma órbita elíptica de semi-eixo maior $a = 0,5 \text{UA}$ e excentricidade $e = 0,7$. Já o planeta externo apresenta uma órbita circular de raio $r = 1 \text{UA}$. A órbita dos planetas é coplanar, de forma que o planeta interno eclipsa parcialmente a estrela a cada período sinódico, quando observado do planeta externo. Sendo assim, observando a partir do planeta externo, calcule a maior diferença possível entre a maior e a menor magnitude da estrela, ambas durante os auges dos eclipses (que não são necessariamente consecutivos).

7. JWST (40 pontos)

Em 24 de Janeiro de 2022, o telescópio espacial James Webb (JWST) atingiu seu destino final. Ele está localizado nas redondezas do ponto de Lagrange L_2 do sistema Terra-Sol, que encontra-se "atrás" da Terra. A escolha desse ponto é justificada: para um corpo em L_2 , as forças gravitacionais do Sol e da Terra balanceiam seu movimento orbital, de forma que o corpo permanece parado em relação ao nosso planeta, tornando esse ponto um verdadeiro estacionamento espacial. Nos itens que seguem, considere a órbita da Terra circular.

- (a) **(12 pontos)** Calcule a distância entre o ponto de Lagrange L_2 e a Terra, em km. Você pode utilizar a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $|x| \ll 1$.

De forma a estudar o lançamento do JWST até L_2 , faremos algumas simplificações. Considere que, após lançado da Terra, o telescópio—no referencial heliocêntrico—segue em uma trajetória curva até L_2 , sujeito à atração gravitacional do Sol e da Terra e sem quaisquer manobras de assistência. A velocidade de lançamento é escolhida de tal forma que, ao chegar em L_2 , o JWST deve ter exatamente a velocidade necessária para mantê-lo em uma órbita circular heliocêntrica. Vale ressaltar que, na vida real, o satélite encontra-se não em L_2 exatamente, mas em uma pequena órbita em torno desse ponto.

- (b) **(20 pontos)** Diante do cenário descrito, calcule a velocidade de lançamento v_0 do JWST, em relação à Terra, em km/s. Na resolução desse item considere, para fins de cálculo, **somente a atração gravitacional do Sol**.

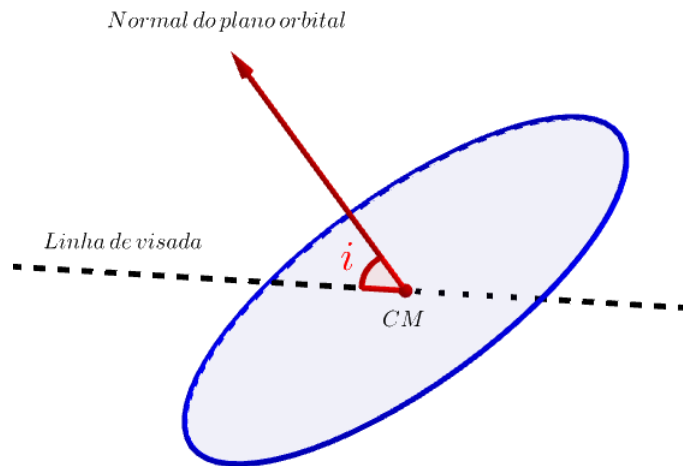
Dica: Visto da Terra, o satélite segue essencialmente em uma linha reta até L_2 . O que isso nos diz sobre a direção da velocidade de lançamento nesse referencial?

Para refinar nossa resposta levando em conta a influência da Terra, considere agora a seguinte situação no referencial da Terra: o JWST é lançado da superfície terrestre com uma velocidade u_0 , e chega a uma distância muito maior que o raio da Terra com a velocidade v_0 encontrada no item passado.

- (c) **(8 pontos)** Calcule u_0 , em km/s. Aqui, leve em conta nos cálculos **somente a atração gravitacional da Terra**, e ignore a sua rotação do em torno do próprio eixo.

8. Função de Massa (45 pontos)

Durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, Hugo observava a estrela Plo I com seu telescópio. Comparando o seu espectro com o de outras estrelas, ele descobre que Plo I é uma estrela de nêutrons e estima sua massa como sendo $M_1 = 2M_\odot$. Ele também observa que Plo I possui variações senoidais em sua velocidade radial ao longo do tempo e conclui que Plo I deve fazer parte de um sistema binário com outro corpo celeste, Plo II. Observando a curva de velocidade de Plo I, Hugo também determina que Plo I possui uma órbita circular de período P e velocidade radial máxima K . Porém, ele não sabe qual é a massa M_2 de Plo II e nem qual é a inclinação i do plano orbital do binário em relação ao plano do céu, representada na figura a seguir.



- (a) **(30 pontos)** A partir da 3ª lei de Kepler e da 2ª lei de Newton, encontre uma expressão para a **função de massa** do sistema binário formado por Plo I e Plo II em termos de P , K e constantes universais. Você pode utilizar que a função de massa é dada por:

$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$

- (b) **(10 pontos)** Utilizando suas medidas, Hugo calcula que a função de massa do binário é $f = 46,2M_\odot$. Desejamos encontrar o valor mínimo $M_{2,min}$ para a massa de Plo II, sabendo que ele corresponde ao caso em que $i = 90^\circ$. Suponha $M_{2,min} \gg M_1$. A partir disso, determine $M_{2,min}$. Seu resultado é condizente com a hipótese? Responda SIM ou NÃO, justificando com cálculos.

Dica: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, se $|x| \ll 1$

- (c) **(5 pontos)** Com base em sua resposta do item anterior, conclua: é mais provável que Plo II seja um exoplaneta, uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro?

9. Um distante sistema planetário... (45 pontos)

Em um distante sistema planetário, um planeta rochoso orbita sua estrela, idêntica ao Sol, em uma órbita elíptica de semi-eixo maior de 1 UA. Um jovem habitante desse planeta constatou que a estrela possuía, em um certo dia, as seguintes coordenadas equatoriais: $(\alpha_1 = 18,5^\circ, \delta_1 = 16^\circ)$

- (a) **(25 pontos)** Adotando que os sistemas de coordenadas equatoriais e elípticos são dispostos da mesma maneira que na Terra, calcule, em graus, a obliquidade da órbita do planeta.

O jovem habitante, como um astrônomo curioso, decide observar alguns parâmetros físicos que dizem respeito ao ocaso da estrela em seu planeta. Sabendo que o mesmo vive no equador, responda as seguintes questões:

- (b) **(8 pontos)** Qual o diâmetro angular da estrela, em minutos de arco, nos momentos de afélio e periélio da órbita, observado pelo jovem habitante? Considere que a órbita possua excentricidade $e = 0,1$ e que a longitude eclíptica do periélio seja igual a 90°
- (c) **(12 pontos)** Qual a diferença entre a duração do pôr da estrela no momento de afélio e periélio, em segundos, identificado pelo jovem em suas observações no equador? Considere que a duração de um ano tropical e de um dia sideral no planeta sejam idênticos ao da Terra e que o tempo de Ocaso é dado pelo momento em que o disco estelar toca o horizonte até o instante de seu total desaparecimento.